УДК 517.977

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ЛИНЕЙНЫХ СТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ*

С.П. Шарый

г. Новосибирск, ИВТ СО РАН

Работа посвящена математическим и вычислительным аспектам анализа линейных статических систем в условиях интервальной неопределённости: при различных допущениях на реализации системы мы рассматриваем минимаксные задачи оценивания состояний (обратные минимаксные задачи). Как формализация математической постановки задачи вводится понятие *$\alpha\beta$-решений* интервальных уравнений. Основной результат работы — новый *алгебраический подход* к внутреннему оцениванию $\alpha\beta$-множеств решений интервальных линейных уравнений, математической основой которого является замена исходной задачи на задачу отыскания алгебраического решения некоторой вспомогательной системы уравнений в полной интервальной арифметике Каухера. Доказывается свойство максимальности по включению интервальных решений задачи, получаемых с помощью алгебраического подхода.

1 Введение

Предмет данной работы — математические и вычислительные аспекты моделирования линейных статических систем с интервальной неопределённостью. Основным содержательным примером будет служить так называемая *обратная задача* системного анализа, когда по заданным сигналам на входе системы и её выходе требуется определить (оценить) внутренние состояния системы. О самих же этих сигналах предполагается, что они могут принимать значения в пределах некоторых границ — нижней и верхней, или, что эквивалентно, нам даны средние значения величин и амплитуды возможных отклонений от них. Всюду в этой работе будем выделять интервалы и интервальные величины (векторы, матрицы) жирным шрифтом (например, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$).

Пусть входное воздействие на систему, её внутреннее состояние и выходной отклик описываются конечномерными векторами $a \in \mathbb{R}^l$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ соответственно. При этом во множестве всех входных воздействий на систему будем различать *возмущения* a_1, ..., a_k, не зависящие от нас и действующие в пределах интервалов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, и *управления* a_{k+1}, ..., a_l, которые мы можем выбирать по своей воле из $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_l$. Аналогично, во множестве выходных откликов системы мы выделяем компоненты b_1, b_2, ..., b_t, которые

*Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки, грант 4F307.

должны переводиться в любые значения из заданных интервалов достижимости $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_t$ (*регулируемые выходы*), и компоненты $b_{t+1}, \dots, b_m$, от которых требуется гарантированное попадание в некоторые коридоры значений $\mathbf{b}_{t+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ (*стабилизируемые выходы*). Предполагаем, что зависимость вход-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b, \tag{1}$$

с некоторой известной функцией $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, а в целом ситуация описывается структурной схемой изображённой на Рис. 1.

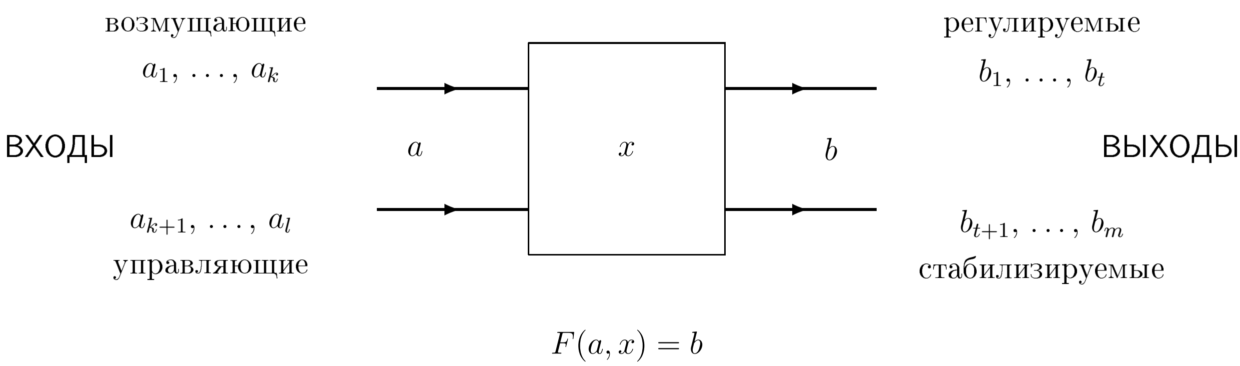

Рис. 1: Структурная схема системы.

По отношению к рассматриваемым нами системам могут возникать вопросы различного сорта. В настоящей работе исследуется следующая математическая постановка — задача о гарантированном (минимаксном) оценивании состояний системы по её входным и выходным реализациям:

> **Задача 1.** *Для каких состояний системы x при любых возмущениях $a_1, \dots, a_k$, не выходящих за пределы интервалов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, и любых* a priori *заданных значениях $b_1, \dots, b_t$ из интервалов достижимости $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_t$ можно подобрать такие управляющие воздействия на систему $a_{k+1} \in \mathbf{a}_{k+1}, \dots, a_l \in \mathbf{a}_l$, что её выходной отклик $F(a, x)$ будет в точности равен $b_1, \dots, b_t$ на управляемых выходах и не выскочит за пределы $\mathbf{b}_{t+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ на стабилизируемых выходах?*

В случае, когда входы и выходы системы заданы точно, решение этой задачи сводится к решению относительно x системы уравнений (1). Если же входные и выходные реализации системы имеют интервальную неопределённость, то, в соответствии с терминологической традицией интервального анализа, процесс решения задачи 1 мы также будем называть "решением" интервальной системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \tag{2}$$

где $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l)^\top$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top$, но смысл, вкладываемый в понятие такого "решения" потребует специального разъяснения. Прежде всего определим, что будет пониматься под "множеством решений" интервальной системы (2).

Формальное определение множества состояний x, являющихся решениями основной задачи 1, имеет в точности следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid \\ & (\ \ \forall a_1 \in \mathbf{a}_1\ \ )\ \cdots\ (\forall a_k \in \mathbf{a}_k)(\ \ \forall b_1 \in \mathbf{b}_1\ \ )\ \cdots\ (\ \forall b_t \in \mathbf{b}_t\ ) \\ & (\exists a_{k+1} \in \mathbf{a}_{k+1})\ \cdots\ (\ \exists a_l \in \mathbf{a}_l\ )(\exists b_{t+1} \in \mathbf{b}_{t+1})\ \cdots\ (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\ F(a, x) = b\ )\ \}. \end{aligned} \tag{3}$$

Определение (3) основано на *аксиоме выделения* из теории множеств (см., например, [1]) и потому впредь мы будем называть предикат, выписанный после вертикальной черты в записи (3), *выделяющим* для множества (3). Помимо задания функциональной зависимости F и интервальных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ в определении (3) ключевым является указание кванторов, находящихся при тех или иных элементах, или, иначе, l-вектора $\alpha = (\alpha_i)$ и m-вектора $\beta = (\beta_i)$, составленных из кванторов и таких, что

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall, & i = 1, 2, \ldots, k, \\ \exists, & i = k+1, \ldots, l, \end{cases} \qquad\qquad \beta_i = \begin{cases} \forall, & i = 1, 2, \ldots, t, \\ \exists, & i = t+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Итак, отталкиваясь от обратной задачи системного анализа — задачи 1, — мы пришли к множеству решений (3). При этом в отношении входов системы a_j, о которых известна лишь принадлежность некоторым интервалам, мы использовали кванторы всеобщности и существования, выражая с их помощью принципиальное различие [3] между

> входными воздействиями, которые нашей воле неподвластны и являются внешними неконтролируемыми возмущениями (это соответствует $\forall a_j \in \mathbf{a}_j$), и
>
> входными воздействиями, которые мы можем варьировать в пределах заданных интервалов по своей воле, т.е. управлять ими (это соответствует $\exists a_j \in \mathbf{a}_j$).

В отношении выходов системы b_i логические кванторы применялись для разграничения между

> коридорами стабилизации системы, в пределах которых требуется обеспечить её функционирование вне зависимости от конкретных значений возмущений (это соответствует $\exists b_i \in \mathbf{b}_i$), либо
>
> множествами достижимости системы, каждый элемент которых должен быть накрыт в результате подходящего выбора управляющих воздействий (это соответствует $\forall b_i \in \mathbf{b}_i$).

Но к необходимости введения общего определения множества решений вида (3) для интервальных уравнений можно подойти и с других позиций, рассматривая, например, некоторые задачи идентификации систем в условиях интервальной неопределённости данных, или даже с совершенно абстрактных позиций. Действительно, интервальная неопределённость данных системы может трактоваться двояко, в соответствии с двойственным характером понимания самих интервалов. С одной стороны, интервал $[\underline{x}, \overline{x}]$ может представлять собой множество *всех* вещественных чисел от $\underline{x}$ до $\overline{x}$, а с другой — быть лишь вместилищем, указателем границ для какого-то, *хотя бы одного* значения между $\underline{x}$ и $\overline{x}$. Математически это различие как раз таки и выражается употреблением кванторов — либо всеобщности $\forall$, либо существования $\exists$: в первом случае мы пишем $\forall x \in [\underline{x}, \overline{x}]$, а во втором $\exists x \in [\underline{x}, \overline{x}]$. При этом, в соответствующих ситуациях уместно говорить о $\forall$-типе неопределённости и $\exists$-типе неопределённости. Давая строгое определение множеств решений интервальных уравнений и систем, мы должны чётко разграничивать эти два типа неопределённости и именно это сделано в определении (3). Особенно рельефно вышеупомянутое различие между двумя типами интервальной неопределённости проявляется тогда, когда мы имеем дело не с единственным интервалом самим по себе, но когда несколько интервалов описывают воздействия на систему различной природы, нередко конфликтующие между собой.

В целом, математический объект, определяемый посредством (3) имеет самостоятельное значение и потому целесообразно вычленить его в отдельное понятие:

Определение 1. Для интервального уравнения $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β тех же размеров, что и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, соответственно, будем называть множество (3) *$\alpha\beta$-множеством решений.*

Другие возможные термины для обозначения (3) — *множество решений типа $\alpha\beta$* или *$\alpha\beta$-множество решений* интервального уравнения. В случае, когда умолчание о кванторах α и β не будет приводить к путанице, можно говорить просто об *обобщённых множествах решений* интервального уравнения.

Несмотря на большую общность определения (3), оно всё же не самое общее. В принципе, поскольку кванторы $\forall$ и $\exists$ не коммутируют друг с другом [1], путём комбинирования их сочетаний с коэффициентами уравнения и перестановки порядка можно определять и другие множества решений интервальных уравнений. В общем случае они могут быть содержательно проинтерпретированы [3] как решения некоторых игр или многошаговых процессов принятия решений в условиях интервальной неопределённости (в отличие от рассматриваемого нами одношагового). Но в этой работе мы будем рассматривать только множества решений интервальных уравнений вида (3), у которых в выделяющем предикате *все вхождения квантора всеобщности $\forall$ предшествуют вхождениям квантора существования* $\exists$, или, иными словами, только те множества решений, для которых выделяющий предикат имеет AE-форму.

2 Обобщённые множества решений интервальных линейных систем

В настоящей работе мы ограничимся анализом простейших статических систем, относительно которых сделаны следующие допущения:

(i) все компоненты $F_i(a, x)$ — билинейные функции x и a, т.е. имеют вид

$$F_i(a, x) = \sum_{j,k} h_{ijk} a_j x_k \tag{4}$$

с некоторыми известными коэффициентами $h_{ijk} \in \mathbb{R}$,

(ii) каждый из a_j имеет единственное вхождение не более чем в одном из компонентных выражений $F_i(a, x)$ билинейного вида (4).

Последнее означает, в частности, что каждый из входов системы a_j может влиять лишь на один из выходов F_i. В этих условиях индекс k становится излишним, но дополнительным индексом i имеет смысл снабдить входы a_j, чтобы указывать номер той компоненты F_i, на которую эти входы влияют. Таким образом, a_j превращаются в a_{ij}, и мы принимаем, что

$$F_i(a, x) = \sum_j h_{ij} a_{ij} x_j$$

или, что равносильно,

$$F(a, x) = Ax$$

с некоторой $m \times n$-матрицей $A = (\, a_{ij})$ и $a_{ij} := h_{ij} a_{ij}$. Соответственно, при наличии интервальной неопределённости мы будем иметь интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{5}$$

с интервальной $m \times n$-матрицей $\mathbf{A} = (\, \mathbf{a}_{ij})$ образованной элементами $\mathbf{a}_{ij} := h_{ij}\mathbf{a}_{ij}$.

Переформулируем рассмотренные нами в §1 понятия применительно к специфике интервальных линейных систем. Пусть всё множество индексных пар (i, j) элементов матрицы разбито на две непересекающиеся части $\Omega' = \{\, \omega'_1, \dots, \omega'_p\}$ и $\Omega'' = \{\, \omega''_1, \dots, \omega''_q\}$, $p + q = m \cdot n$, такие что элемент a_{ij} принадлежит $\forall$-типу неопределённости при $(i, j) \in \Omega'$ и $\exists$-типу неопределённости при $(i, j) \in \Omega''$. Аналогично, введём непересекающиеся множества натуральных индексов $\Theta' = \{\, \vartheta'_1, \dots, \vartheta'_r\}$ и $\Theta'' = \{\, \vartheta''_1, \dots, \vartheta''_s\}$, $\Theta' \cup \Theta'' = \{1, 2, \dots, m\}$, такие что элемент правой части b_i имеет интервальную неопределённость $\forall$-типа при $i \in \Theta'$ и $\exists$-типа при $i \in \Theta''$. Естественно, допускается возможность того, что некоторые из множеств Ω', Ω'', Θ', Θ'' пусты.

Как и в случае общих интервальных уравнений вида (2), для удобного и наглядного представления типов неопределённости, отвечающих различным элементам линейной системы, уместно ввести кванторные $m \times n$-матрицу $\alpha = (\, \alpha_{ij})$ и m-вектор $\beta = (\beta_i)$ такие, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall, & (i, j) \in \Omega', \\ \exists, & (i, j) \in \Omega'', \end{cases} \qquad\qquad \beta_i = \begin{cases} \forall, & i \in \Theta', \\ \exists, & i \in \Theta''. \end{cases}$$

Определение 2. Для заданных кванторных $m \times n$-матрицы α и m-вектора β назовём множеством $\alpha\beta$-решений интервальной линейной $m \times n$-системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \\ &= \{\; x \in \mathbb{R}^n \mid \\ &\qquad (\forall a_{\omega'_1} \in \mathbf{a}_{\omega'_1}) \cdots (\forall a_{\omega'_p} \in \mathbf{a}_{\omega'_p})\, (\forall b_{\vartheta'_1} \in \mathbf{b}_{\vartheta'_1}) \cdots (\forall b_{\vartheta'_r} \in \mathbf{b}_{\vartheta'_r}) \\ &\qquad (\exists a_{\omega''_1} \in \mathbf{a}_{\omega''_1}) \cdots (\exists a_{\omega''_q} \in \mathbf{a}_{\omega''_q})\, (\exists b_{\vartheta''_1} \in \mathbf{b}_{\vartheta''_1}) \cdots (\exists b_{\vartheta''_s} \in \mathbf{b}_{\vartheta''_s}) \\ &\qquad\qquad (Ax = b)\; \}. \end{aligned} \tag{6}$$

Как видим, хорошо известные в интервальном анализе множества решений интервальных линейных систем:

– *объединённое множество решений* $\Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\; x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists\, b \in \mathbf{b})(Ax = b)\,\}$, образованное решениями всех систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$, исторически первое и, несомненно, наиболее популярное из множеств решений ИСЛАУ [4]–[8],

– *живучее множество решений* $\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists\, b \in \mathbf{b})(Ax = b)\,\}$, образованное всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что произведение Ax попадает в $\mathbf{b}$ для любой $A \in \mathbf{A}$ [5, 8, 9]; это множество решений иногда называют также *допустимым множеством решений* (tolerable solution set), *ограниченным множеством решений* (restricted solution set), *множеством поточечных включений* и пр., терминология, к сожалению, не вполне устоялась.

– *управляемое множество решений* $\Sigma_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, b \in \mathbf{b})(\exists\, A \in \mathbf{A})(Ax = b)\,\}$, образованное всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ мы можем подобрать соответствующую $A \in \mathbf{A}$, удовлетворяющую $Ax = b$ [10],

— являются крайними точками обширной совокупности $2^{m(n+1)}$ всех возможных множеств решений вида (6). Четвёртая крайняя точка этого семейства — множество решений $\Sigma_{\forall\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax = b)\,\}$ — пусто, если в $\mathbf{A}$ или $\mathbf{b}$ имеется достаточно много интервалов с ненулевой шириной. Поэтому его рассмотрение для уравнений, как правило, бессодержательно, хотя и не бессмысленно.

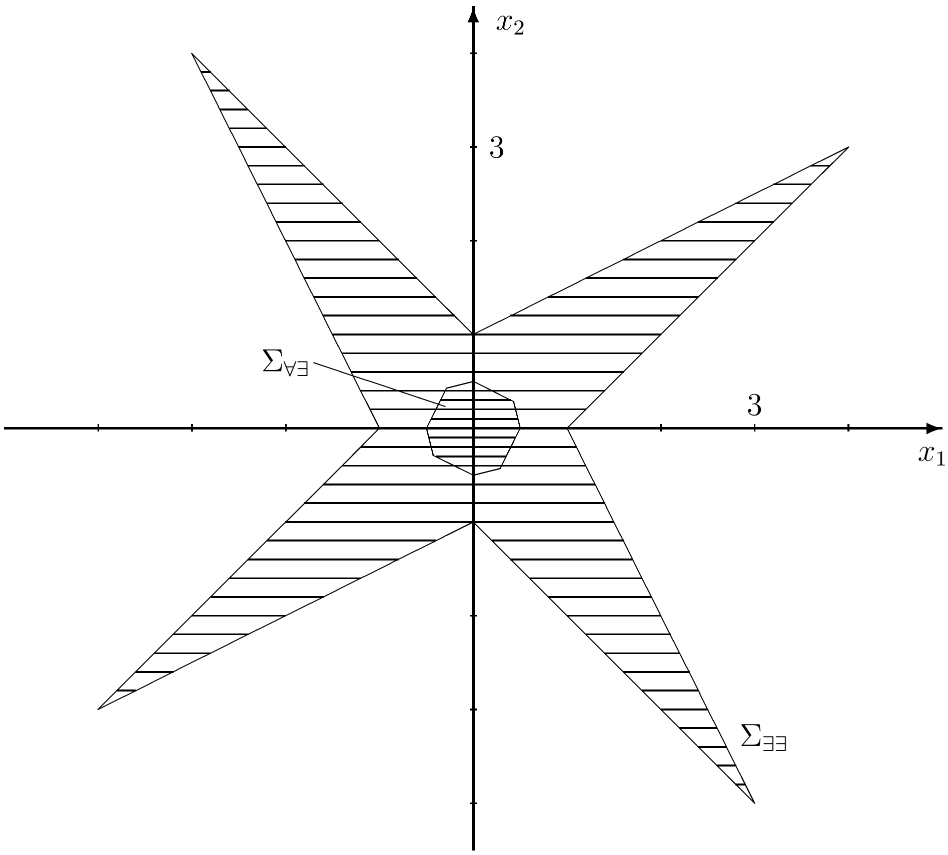

Рис. 2: Объединённое $\Sigma_{\exists\exists}$ и живучее $\Sigma_{\forall\exists}$ множества решений системы (7).

Вообще, пусть i-ая строка матрицы α целиком состоит из кванторов $\forall$ и соответствующий элемент вектора β также есть $\forall$. Тогда $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \emptyset$, если среди элементов $\mathbf{a}_{1j}, \ldots, \mathbf{a}_{in}$, $\mathbf{b}_i$ имеется хотя бы один интервал с ненулевой шириной. Поэтому для интервальной линейной $m \times n$-системы, все элементы которой существенно интервальны,

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m - 1$$

множеств $\alpha\beta$-решений окажутся заведомо пусты. В целом для такой системы количество "содержательных" множеств решений уменьшается до $2^{m(n+1)} - 2^m + 1 = 2^m(2^{mn} - 1) + 1$ штук. Например, для интервальной линейной 2×2-системы можно рассмотреть $2^2(2^4 - 1)+1 = 61$ множество решений. На Рис. 2 и 3 изображены некоторые из множеств решений популярной интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix} \tag{7}$$

из [11], неоднократно рассматривавшейся многими авторами.

Отметим, что всегда $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) \subseteq \Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, т.е. объединённое множество решений ИСЛАУ является наиболее широким среди совокупности всех $\alpha\beta$-множеств решений. Это наблюдение может быть обобщено. Именно, если на множестве логических кванторов $\{\forall,\exists\}$ ввести частичный порядок "$\preceq$", положив $\forall \preceq \exists$, а соотношения $\alpha \preceq \alpha'$, $\beta \preceq \beta'$, $\alpha\beta \preceq \alpha'\beta'$ понимать покомпонентно и поэлементно, то для любых $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$

$$\alpha\beta \preceq \alpha'\beta' \quad \Rightarrow \quad \Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) \subseteq \Sigma_{\alpha'\beta'}(\mathbf{A},\mathbf{b}). \tag{8}$$

Это можно хорошо видеть на Рис. 2, 3. Свойство (8) может оказаться весьма полезным при исследовании обобщённых множеств решений интервальных уравнений. Обнаружив, к примеру, что для системы (7) $\Sigma_{\left(\begin{smallmatrix}\exists\exists\\\exists\exists\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\forall\\\exists\end{smallmatrix}\right)} = \Sigma_{\left(\begin{smallmatrix}\exists\forall\\\forall\exists\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\exists\\\forall\end{smallmatrix}\right)} = \emptyset$, мы путём "ослабления" кванторов в выделяющем предикате можем заключить, что управляемое множество решений $\Sigma_{\exists\forall}$ для (7) также пусто и пустыми являются ещё 45 множеств решений системы (7), получающихся из вышеупомянутых трёх комбинированием кванторов при элементах матрицы.

3 Интервальные арифметики

Прежде чем перейти к изложению основных результатов работы, нам необходимо дать краткий обзор интервальных арифметик и их свойств.

Как известно, классическая интервальная арифметика — это алгебраическая система $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$, носитель которой образован интервалами вещественной оси $[\underline{x}, \overline{x}]$, $\underline{x} \leq \overline{x}$, а бинарные операции — сложение, вычитание, умножение и деление — определены таким образом, что фундаментальное свойство

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{\, x \star y \mid x \in \mathbf{x},\, y \in \mathbf{y} \,\} \tag{9}$$

оказывается выполненным для всех интервалов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, таких что $(x \star y)$, $\star \in \{\,+, -, \cdot, /\,\}$, имеет смысл для любых $x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$ [4]–[8]. Если через $\underline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{x}}$ обозначить левый и правый концы интервала $\mathbf{x}$, то развёрнутое определение интервальных арифметических операций таково:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + \mathbf{y} &= \left[\, \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}},\, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \,\right], \\
\mathbf{x} - \mathbf{y} &= \left[\, \underline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}},\, \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \,\right], \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \left[\, \min\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}\,,\, \max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\} \,\right], \\
\mathbf{x} / \mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot \left[\, 1/\overline{\mathbf{y}},\, 1/\underline{\mathbf{y}} \,\right] \qquad \text{для} \;\; \mathbf{y} \not\ni 0.
\end{aligned}$$

Для двух интервальных матриц одного размера сумма (разность) есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов.

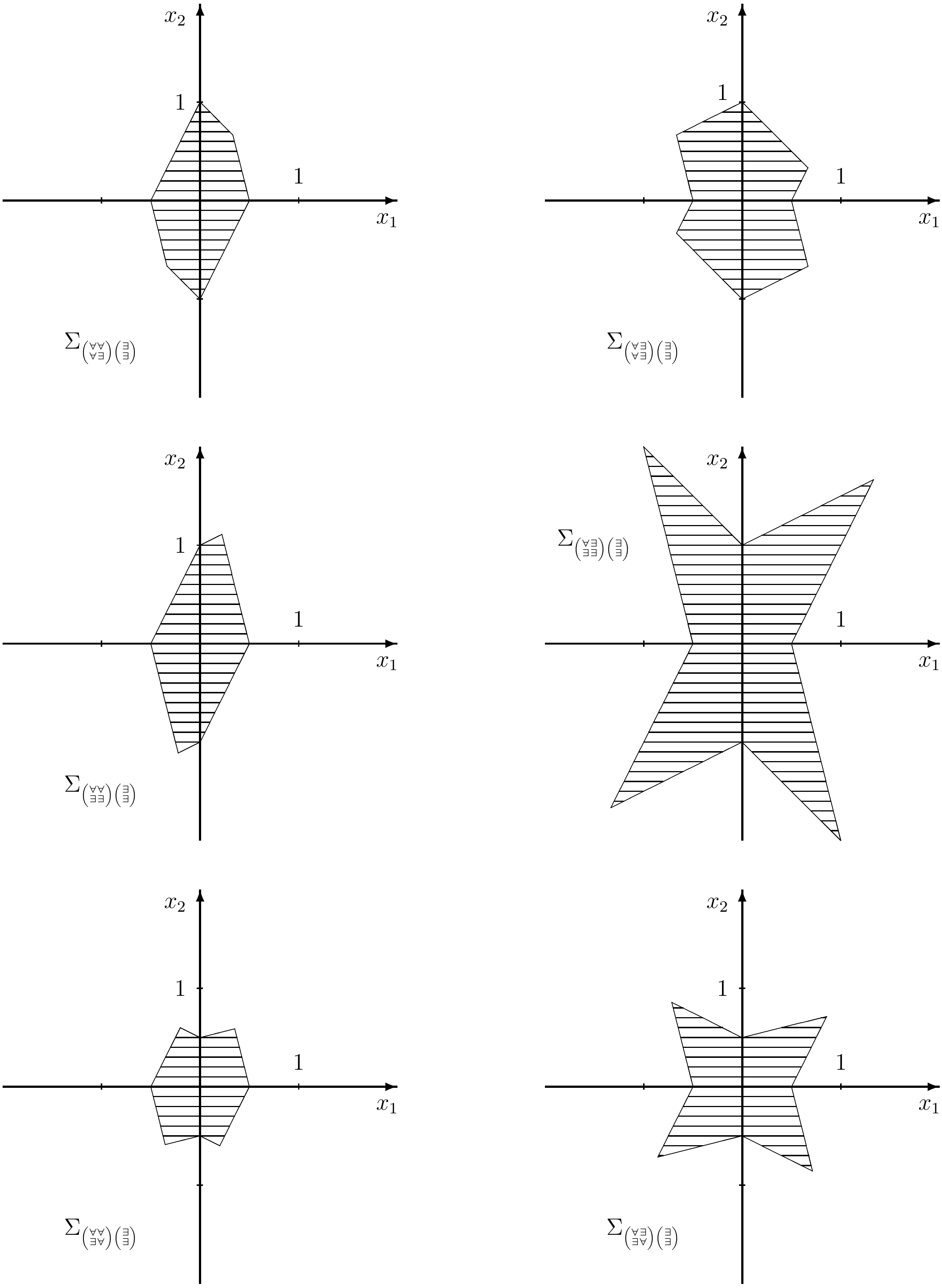

Рис. 3: Некоторые из $\alpha\beta$-множеств решений интервальной системы (7).

Произведение интервальных матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X} = (\,\mathbf{x}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m\times l}$, $\mathbf{Y} = (\,\mathbf{y}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l\times n}$, есть матрица $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{Z} = (\,\mathbf{z}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, такая что

$$\mathbf{z}_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{x}_{ik}\mathbf{y}_{kj}. \tag{10}$$

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$ является всего лишь коммутативной полугруппой и по сложению, и по умножению: интервалы с ненулевой шириной, т.е. большинство элементов $\mathbb{IR}$, не имеют ни противоположных, ни обратных элементов. Кроме того, относительно естественного порядка по включению "$\subseteq$" множество $\mathbb{IR}$ не является даже решёткой: из операций взятия супремума и инфимума —

$$\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} = \bigl[\,\max\{\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}\},\,\min\{\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}\}\,\bigr]\,, \qquad\qquad \mathbf{x}\vee\mathbf{y} = \bigl[\,\min\{\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}\},\,\max\{\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}\}\,\bigr]\,,$$

— первая не всегда выполнима в классической интервальной арифметике.

"Неполнота" как алгебраической, так и порядковой структур $\mathbb{IR}$ естественно стимулировала попытки "достроить" классическую интервальную арифметику, создать на её основе "более совершенную" интервальную арифметику. Такая достройка $\mathbb{IR}$ была осуществлена в работах Э. Каухера (см. [12] и имеющиеся там ссылки), который называл получившуюся алгебраическую систему "интервальной арифметикой $\mathbb{I}\mathbb{R}$". Мы также будем придерживаться этого термина, иногда используя более развёрнутый — "полная интервальная арифметика Каухера". Впоследствии ей занимались также Е. Гарденес и А. Трепат [13], установившие ряд полезных свойств и важных приложений. В целом полная интервальная арифметика $\mathbb{I}\mathbb{R}$ представляет собой нетривиально устроенную алгебраическую систему, и здесь мы опишем лишь те её свойства, которые понадобятся нам в дальнейшем изложении. Полное описание $\mathbb{I}\mathbb{R}$ можно найти в [13, 12].

Элементами $\mathbb{I}\mathbb{R}$ являются вещественные пары $[\,\underline{x},\,\overline{x}\,]$, не обязательно связанные соотношением $\underline{x} \leq \overline{x}$. Таким образом, $\mathbb{I}\mathbb{R}$ получается присоединением *неправильных* интервалов $[\,\underline{x},\overline{x}\,]$, $\underline{x} > \overline{x}$, к множеству $\mathbb{IR} = \{\,[\,\underline{x},\overline{x}\,] \mid \underline{x},\,\overline{x}\in\mathbb{R},\;\underline{x}\leq\overline{x}\,\}$ *правильных* интервалов и вещественных чисел. Элементы полной интервальной арифметики Каухера и составленные из них объекты мы будем обозначать, как и обычные интервалы, буквами жирного шрифта.

Правильные и неправильные интервалы, две половинки $\mathbb{I}\mathbb{R}$, меняются местами в результате отображения *дуализации* $\mathrm{dual}\;:\mathbb{I}\mathbb{R}\to\mathbb{I}\mathbb{R}$, такого что $\mathrm{dual}\,\mathbf{x} = [\overline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{x}}]$. Как и в классической интервальной арифметике,

$$\mathbf{x}\subseteq\mathbf{y} \quad\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \underline{\mathbf{x}}\geq\underline{\mathbf{y}} \;\text{ и }\; \overline{\mathbf{x}}\leq\overline{\mathbf{y}},$$

но, в отличие от $\mathbb{IR}$, относительно такого порядка арифметика Каухера $\mathbb{I}\mathbb{R}$ является уже дистрибутивной условно полной решёткой.

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на $\mathbb{I}\mathbb{R}$ в точности так же, как и для обычной интервальной арифметики:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} := \bigl[\,\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}\,\bigr]\,, \qquad\qquad \lambda\cdot\mathbf{x} := \begin{cases} [\,\lambda\,\underline{\mathbf{x}},\lambda\,\overline{\mathbf{x}}\,], & \lambda\in\mathbb{R}^+,\\ [\,\lambda\,\overline{\mathbf{x}},\lambda\,\underline{\mathbf{x}}\,], & \lambda\notin\mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Таким образом, каждый элемент $\mathbf{x}$ из $\mathbb{I}\mathbb{R}$ имеет единственный противоположный элемент $[\,-\underline{\mathbf{x}},-\overline{\mathbf{x}}\,]$, и интервальная арифметика Каухера $\mathbb{I}\mathbb{R}$ по сложению является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства $\mathbb{R}^2$. Следствием этого факта является, в частности, привычная возможность переносить члены из одной части уравнения в другую “с противоположным знаком”. Полезным оказывается также свойство дистрибутивности решёточных операций относительно сложения:

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} \vee \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \vee (\mathbf{x} + \mathbf{z}), \qquad \mathbf{x} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{z}).$$

Имеет место следующее представление, обобщающее формулу (9):

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathop{\text{И}^{\mathbf{x}}}_{x \in \operatorname{pro} \mathbf{x}} \; \mathop{\text{И}^{\mathbf{y}}}_{y \in \operatorname{pro} \mathbf{y}} (x + y), \tag{11}$$

где

$$\text{И}^{\mathbf{x}} \;:=\; \begin{cases} \bigvee, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \bigwedge, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \text{— условная решёточная операция,}$$

$$\operatorname{pro} \mathbf{x} \;:=\; \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \operatorname{dual} \mathbf{x}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \text{— правильная проекция интервала.}$$

Оно выражает связь между результатом интервального сложения $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ и результатами отдельных точечных сложений $x + y$ для $x \in \operatorname{pro} \mathbf{x}$ и $y \in \operatorname{pro} \mathbf{y}$. На основе аналогичного представления определяется и умножение в арифметике Каухера:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathop{\text{И}^{\mathbf{x}}}_{x \in \operatorname{pro} \mathbf{x}} \; \mathop{\text{И}^{\mathbf{y}}}_{y \in \operatorname{pro} \mathbf{y}} (x \cdot y). \tag{12}$$

Чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в $\mathbb{IR}$ следующие подмножества:

$$\mathcal{P} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid (\underline{\mathbf{x}} > 0) \,\&\, (\overline{\mathbf{x}} > 0) \,\}, \qquad -\mathcal{P} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{x} \in \mathcal{G} \,\},$$

$$\mathcal{Z} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{x}} \leq 0 \leq \overline{\mathbf{x}} \,\}, \qquad \operatorname{dual} \mathcal{Z} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \operatorname{dual} \mathbf{x} \in \mathcal{U} \,\},$$

так что в целом $\mathbb{IR} = \mathcal{P} \cup -\mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup \operatorname{dual} \mathcal{Z}$. Тогда умножение в арифметике Каухера описывается следующей таблицей Кэли [12]:

Умножение в интервальной арифметике Каухера.

$\cdot$	$\mathbf{y} \in \mathcal{P}$	$\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$	$\mathbf{y} \in -\mathcal{P}$	$\mathbf{y} \in \operatorname{dual} \mathcal{Z}$
$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$
$\mathbf{x} \in \mathcal{Z}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\min\{\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\},$ $\max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	0
$\mathbf{x} \in -\mathcal{P}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$
$\mathbf{x} \in \operatorname{dual} \mathcal{Z}$	$[\,\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\,]$	0	$[\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,]$	$[\,\max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\},$ $\min\{\underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}\}\,]$

Как видим, умножение в арифметике Каухера допускает наличие нетривиальных делителей нуля. К примеру, $[\,-1,\,2\,]\cdot[\,5,\,-3\,]=0$. Расширенное интервальное умножение оказывается и коммутативным, и ассоциативным, но мультипликативную группу $\mathbb{IR}$ образуют лишь интервалы $\mathbf{x}$ с $\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{x}}>0$ (т.е. $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$), поскольку на любом более широком подмножестве $\mathbb{IR}$ не выполнен закон сокращения [12, 13].

Определения интервальных вычитания и деления в арифметике Каухера такие же, что и в обычной арифметике $\mathbb{IR}$: $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\,/\,\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\left[\,1/\overline{\mathbf{y}},1/\underline{\mathbf{y}}\,\right]$ для $0\notin\operatorname{pro}\mathbf{y}$, причём для них также справедливы решёточные представления (11)–(12). Замечательно то, что в арифметике Каухера сохраняется монотонность интервальных операций по включению:

$$\mathbf{x}\subseteq\mathbf{x}',\ \mathbf{y}\subseteq\mathbf{y}'\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}\star\mathbf{y}\subseteq\mathbf{x}'\star\mathbf{y}'$$

для $\star\in\{\,+\,,\,-\,,\,\cdot\,,\,/\,\}$ и любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'\in\mathbb{IR}$.

Связь сложения и умножения в арифметике Каухера описывается следующим образом:

$$\text{если } \mathbf{x} \text{ правильный, то}\quad \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})\subseteq\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}\ \text{ — субдистрибутивность,}$$

$$\text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный, то}\quad \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})\supseteq\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}\ \text{ — супердистрибутивность.}$$

Эти включения обращаются в равенства в некоторых частных случаях, но в целом свойство дистрибутивности умножения по сложению в интервальной арифметике Каухера не выполняется [13, 12]. Кроме того, не имеет места и дистрибутивность умножения относительно решеточных операций $\vee$ и $\wedge$.

Операции над векторами и матрицами в интервальной арифметике Каухера определяются совершенно аналогично тому, как это делается для $\mathbb{IR}$, т.е. по формулам (10). Упорядочение по включению на множествах интервальных векторов и матриц представляет собой прямое произведение [14] порядков по включению на отдельных компонентах. Поэтому естественно

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{y}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\vee\mathbf{y}_1\\ \mathbf{x}_2\vee\mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\vee\mathbf{y}_n\end{pmatrix}\qquad\text{и}\qquad\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{y}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\wedge\mathbf{y}_1\\ \mathbf{x}_2\wedge\mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\wedge\mathbf{y}_n\end{pmatrix}.$$

Аналогично, покомпонентным образом будем понимать действие на интервальные векторы и матрицы операций дуализации dual и взятия правильной проекции pro.

Ниже нам понадобится следующее вспомогательное представление. Если $\mathbf{v}$ — правильный интервальный n-вектор, то для любой интервальной $m\times n$-матрицы $\mathbf{A}$ справедливо

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}=\bigvee_{v\in\mathbf{v}}\mathbf{A}\cdot v. \tag{13}$$

Действительно, если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}=(\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})_1,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})_2,\dots,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})_m)^\top$, то, используя (12) и дистрибутивность операции $\vee$ относительно сложения, получим для $i=1,2,\dots,m$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})_i\ &=\ \sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_{ij}\mathbf{v}_j=\sum_{j=1}^{n}\bigvee_{v_j\in\mathbf{v}_j}\mathbf{a}_{ij}v_j=\bigvee_{v_1\in\mathbf{v}_1}\bigvee_{v_2\in\mathbf{v}_2}\cdots\bigvee_{v_n\in\mathbf{v}_n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_{ij}v_j=\\ &=\ \bigvee_{v\in\mathbf{v}}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_{ij}v_j=\bigvee_{v\in\mathbf{v}}(\mathbf{A}\cdot v)_i.\end{aligned}$$

4 Характеризация обобщённых множеств решений ИСЛАУ

Возвратимся к задаче "решения" интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с правильными матрицей $\mathbf{A}$ и правой частью $\mathbf{b}$. Определим интервальные матрицы $\mathbf{A}^{\forall} = (\mathbf{a}^{\forall}_{ij})$ и $\mathbf{A}^{\exists} = (\mathbf{a}^{\exists}_{ij})$ и интервальные векторы $\mathbf{b}^{\forall} = (\mathbf{b}^{\forall}_i)$ и $\mathbf{b}^{\exists} = (\mathbf{b}^{\exists}_i)$, тех же размеров, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ соответственно, следующим образом:

$$\mathbf{a}^{\forall}_{ij} := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \mathbf{a}^{\exists}_{ij} := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathbf{b}^{\forall}_{i} := \begin{cases} \mathbf{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \mathbf{b}^{\exists}_{i} := \begin{cases} \mathbf{b}_{i}, & \text{если } \beta_{i} = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\forall} + \mathbf{A}^{\exists}$, $\mathbf{a}^{\forall}_{ij}\, \mathbf{a}^{\exists}_{ij} = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$, $\mathbf{b}^{\forall}_i\, \mathbf{b}^{\exists}_i = 0$, т.е. матрицы $\mathbf{A}^{\forall}$, $\mathbf{A}^{\exists}$ и векторы $\mathbf{b}^{\forall}$, $\mathbf{b}^{\exists}$ образуют *дизъюнктные разложения* для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ соответственно. Фундаментальным результатом наших исследований является

Теорема 1. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \;\subseteq\; \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x, \tag{14}$$

где через " $\cdot$ " обозначена операция интервального матричного умножения.

Доказательство. Отметим, что с использованием введённых выше матриц $\mathbf{A}^{\forall}$, $\mathbf{A}^{\exists}$ и векторов $\mathbf{b}^{\forall}$, $\mathbf{b}^{\exists}$ определение множества решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть записано в следующем эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \\ &\quad = \; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A' \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall b' \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists A'' \in \mathbf{A}^{\exists})(\exists b'' \in \mathbf{b}^{\exists})(\,(A' + A'')x = (b' + b'')\,)\,\}. \end{aligned}$$

Далее уже нетрудно завершить доказательство теоремы путём равносильных преобразований с выделяющим предикатом множества решений. Имеем

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \\ &\quad = \; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A' \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall b' \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists A'' \in \mathbf{A}^{\exists})(\exists b'' \in \mathbf{b}^{\exists})(A'x - b' = b'' - A''x)\,\} = \\ &\quad = \; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A' \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall b' \in \mathbf{b}^{\forall})(A'x - b' \in \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists}x)\,\} = \\ &\quad = \; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x\,\}, \end{aligned}$$

поскольку для любых интервальных матриц $\mathbf{C}$ и вещественных векторов x результат интервального умножения $\mathbf{C} \cdot x$ всегда совпадает с $\{\, Cx \mid C \in \mathbf{C}\,\}$ [4, 7, 8]. ■

Следствие Для любых α и β пересечение множества решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов пространства $\mathbb{R}^n$ представляет собой выпуклое полиэдральное множество.

Доказательство. Принадлежность вещественного вектора x какому-нибудь из ортантов определяется фиксацией знаков его компонент. В этом случае, для любой интервальной

$m \times n$-матрицы $\mathbf{C}$ компоненты произведения $\mathbf{C}\cdot x = (\,(\mathbf{C}\cdot x)_1, (\mathbf{C}\cdot x)_2, \ldots, (\mathbf{C}\cdot x)_m)^\top$ могут быть представлены в следующем виде

$$(\mathbf{C}\cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{ij} x_j = \left[\; \sum_{j=1}^{n} \underline{\mathbf{c}_{ij} x_j}\;,\; \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathbf{c}_{ij} x_j} \;\right] = \left[\; \sum_{j=1}^{n} \check{c}_{ij} x_j\;,\; \sum_{j=1}^{n} \hat{c}_{ij} x_j \;\right], \tag{15}$$

где $\check{c}_{ij}$ и $\hat{c}_{ij}$ — некоторые фиксированные для каждого ортанта числа из множеств концов $\{\, \underline{\mathbf{c}}_{ij}, \overline{\mathbf{c}}_{ij} \}$. Расписывая включение (14) покомпонентно и заменяя далее на основе представления (15) каждое из одномерных включений парой неравенств между концами интервалов, получим систему линейных неравенств, которая и определяет совместно с условиями на знаки компонент x выпуклое полиэдральное множество. ■

5 Формулировка задачи

Несмотря на простые и геометрически наглядные характеризационные результаты предыдущего параграфа, сложность прямого описания множеств решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ растёт экспоненциально с n, так что само это описание становится чрезвычайно трудоёмким и практически бесполезным при сколько-нибудь значительных размерностях ИСЛАУ. Как показали А.В. Лакеев и С.И. Носков [15], даже задачи распознавания непустоты объединённого множества решений $\Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и управляемого множества решений $\Sigma_{\exists\forall}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ являются NP-полными, т.е. в общем случае они, скорее всего, не могут быть решены проще, чем за экспоненциальное в зависимости от длины их кодировки время [16]. По этой причине на практике разумно ограничиться нахождением некоторых просто устроенных подмножеств из $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, поскольку для всех их представителей остаётся справедливым выделяющий предикат из определения (6) или, что эквивалентно, определяющее соотношение (14). Иными словами, мы заменяем множество решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ на некоторое его приближение изнутри.

В качестве оценивающих множеств мы будем брать прямые произведения отрезков вещественной оси — прямоугольные параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям, т.е. интервальные векторы, формулируя подлежащую решению задачу в виде:

> **Задача 2.** *Найти интервальный вектор, который содержится во множестве решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы.*

Естественно, эта постановка имеет смысл лишь в случае $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и выяснение условий непустоты множества решений является отдельным важным вопросом.

Полезно проиллюстрировать содержательный смысл задачи 2 на конкретных примерах. Если в качестве $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ взято живучее множество решений $\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то задача 2 — это классическая *линейная задача о допусках* [5, 8, 9], имеющая многочисленные и плодотворные практические приложения. Линейная задача о допусках является, фактически, задачей стабилизации системы в заданном коридоре выходных значений $\mathbf{b}$ для случая, когда *все* её параметры a_{ij} претерпевают некоторые ограниченные по амплитуде возмущения. Если же некоторые из a_{ij} — возмущаемые параметры, а некоторые — управляемые, и все кванторы правой части $\beta_i = \exists$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то приходим к задаче стабилизации с возможностью управления — задаче обеспечения *жувучести системы*. В работе [2] постановка проблем живучести иллюстрируется на конкретных практических задачах из области кораблестроения, токсикологии, экономики и электроэнергетики. Другое используемое в литературе название такого рода постановок — "задачи обеспечения устойчивости функционирования при крупномасштабных возмущениях" [17]. Наоборот, если часть a_{ij} — возмущаемые параметры, а часть — управляемые, и все $\beta_i = \forall$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то имеем дело с задачей управления при наличии ограниченных возмущений.

Цель настоящей работы — представить новый алгоритмически эффективный подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью, т.е. к решению задачи 2, но принципы, которые лежат в его основе, в значительной степени необычны. В наших построениях ключевое понятие — *алгебраического решение* интервальной системы уравнений, впервые рассмотренное для одного уравнения с правильными коэффициентами в [18].

Определение 3. Интервальный вектор называется *алгебраическим решением* интервальной системы уравнений, если его подстановка в эту систему и выполнение всех интервальных арифметических операций приводят к верному равенству.

Более точно, развиваемый в данной работе *алгебраический подход* подразумевает замену задачи 2 на задачу нахождения алгебраического решения некоторой специальной системы уравнений в полной интервальной арифметике Каухера, сводя тем самым исходную задачу к чисто алгебраической задаче численного анализа. Это весьма привлекательно, несмотря на то, что решение вспомогательной системы может не существовать даже тогда, когда соответствующее множество решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто, т.е. задача 2 совместна.

6 Основные результаты

Основу алгебраического подхода к анализу статических систем составляет в данной работе

Теорема 2. Если правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ представляет собой алгебраическое решение ИСЛАУ

$$(\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\ \mathbf{A}^{\exists})\, x = \mathrm{dual}\ \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}, \tag{16}$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. этот интервальный вектор и есть решение задачи 2.

Уместно привести и словесную формулировку этого замечательного результата:

Пусть требуется найти внутреннюю интервальную оценку для множества $\alpha\beta$-решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. Составим вспомогательную интервальную линейную систему того же размера в арифметике Каухера, матрица которой получена из $\mathbf{A}$ дуализацией интервальных элементов, соответствующих кванторам существования $\exists$ в α, а правая часть получена из $\mathbf{b}$ дуализацией элементов, соответствующих кванторам всеобщности $\forall$ в β. Если эта вспомогательная система имеет алгебраическое решение с правильными компонентами, то оно есть искомая внутренняя интервальная оценка для $\alpha\beta$-множества решений исходной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Определение 4. Будем называть уравнение (16) *уравнением в дуализациях* для интервальной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, соответствующим её $\alpha\beta$-множеству решений.

Доказательство. Пусть правильный интервальный вектор $\mathbf{x}$ — алгебраическое решение системы (16) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$. Тогда в силу монотонности арифметических операций $\mathbb{IR}$ по включению имеем

$$(\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists}) \cdot \tilde{x} \subseteq (\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists}) \cdot \mathbf{x} = \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}. \tag{17}$$

Поскольку матрицы $\mathbf{A}^{\forall}$ и $\mathbf{A}^{\exists}$ образуют дизъюнктное разложение $\mathbf{A}$, то мы вправе воспользоваться в (17) дистрибутивностью матричного умножения относительно сложения: $\mathbf{A}^{\forall} \cdot \tilde{x} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists} \cdot \tilde{x} \;\subseteq\; \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$. Перенося члены с дуализациями в противоположные части этого включения, окончательно получим $\mathbf{A}^{\forall} \cdot \tilde{x} - \mathbf{b}^{\forall} \;\subseteq\; \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot \tilde{x}$, т.е. $\tilde{x} \in \Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ по Теореме 1. ■

Например, непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что для модельной системы (7) алгебраическим решением является правильный интервальный вектор $([-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])^{\top}$, и, как демонстрирует Рис. 3, он дает хорошее внутреннее приближение для допустимого множества решений $\Sigma_{\forall\exists}$ этой системы. С другой стороны, если алгебраическое решение интервального уравнения в дуализациях (16) не существует или не является целиком правильным, то, как мы уже отмечали, из этого отнюдь не следует пустота соответствующего множества решений и несовместность задачи 2. Одномерное уравнение $[-1, 1]\, x = [-1, 2]$ совсем не имеет алгебраических решений, но его живучее множество решений непусто: $\Sigma_{\forall\exists} = [-1, 1]$.

Замечательным свойством развиваемого алгебраического подхода является то, что с его помощью мы почти всегда получаем *максимальные по включению* внутренние интервальные оценки для рассматриваемых множеств решений ИСЛАУ. В отношении объединённого множества решений этот факт впервые обнаружила Л.В. Куприянова [19], а затем автор доказал максимальность оценок допустимого и управляемого множества решений ИСЛАУ [20]. Результат данной работы — более общая

Теорема 3. Если правильный интервальный вектор представляет собой максимальное по включению алгебраическое решение уравнения в дуализациях (16), то он также является максимальным по включению интервальным вектором, содержащимся в $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. предоставляет максимальное по включению решение для задачи 2.

В частности, если правильное алгебраическое решение уравнения в дуализациях единственно, то оно является максимальным по включению решением задачи 2.

Доказательство. Обозначим правильное максимальное алгебраическое решение ИСЛАУ (16) через $\mathbf{x}$. Предположим, что, вопреки утверждению Теоремы, существует правильный интервальный вектор $\mathbf{y}$, такой что $\mathbf{x} \subsetneqq \mathbf{y} \subseteq \Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Привлекая монотонность арифметики $\mathbb{IR}$ по включению, получим $\mathrm{dual}\,\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists} = (\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists}) \cdot \mathbf{x} \subset (\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists}) \cdot \mathbf{y}$, причём точное равенство на месте включения здесь невозможно в силу максимальности $\mathbf{x}$. Далее, из представления (13) следует

$$\bigvee_{y \in \mathbf{y}} (\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists}) \cdot y \;\supsetneqq\; \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}, \tag{18}$$

и мы можем заключить, что необходимо

$$(\mathbf{A}^{\forall} + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^{\exists}) \cdot \tilde{y} \;\not\subseteq\; \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$$

для какого-то (хотя бы одного) $\tilde{y} \in \mathbf{y}$. В противном случае, если бы для всех $y \in \mathbf{y}$ выполнялось $(\mathbf{A}^{\forall} + \operatorname{dual} \mathbf{A}^{\exists}) \cdot y \subseteq \operatorname{dual} \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$, то мы имели бы обратное к (18) включение.

Но на основании Теоремы 1 соотношение (18) эквивалентно тому, что $\tilde{y}$ не принадлежит обобщённому множеству решений $\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, так что $\mathbf{y} \not\subseteq \Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Это и требовалось доказать. ■

Например, единственным алгебраическим решением интервальных систем

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [4,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [2,-1] & [4,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$

является правильный вектор $(0, [-1,1])^{\top}$, и в соответствии с Теоремами 2 и 3 он предоставляет максимальную по включению внутреннюю оценку для $\binom{\forall\forall}{\forall\exists}\binom{\exists}{\exists}$-множества решений и для $\binom{\forall\forall}{\exists\exists}\binom{\exists}{\exists}$-множества решений модельной системы (7). То, что это на самом деле так, можно убедиться из Рис. 3, но сплющенность полученной оценки по первой координате — невыгодное для практики обстоятельство. Остальные изображенные на Рис. 2 и 3 множества $\alpha\beta$-решений дают более оптимистичные образцы оценивания. К примеру, для интервальных линейных систем

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [1,-2] \\ [-1,2] & [4,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [2,4] & [1,-2] \\ [2,-1] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$

предоставляемая с помощью алгебраического решения внутренняя интервальная оценка $([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])^{\top}$ для множеств $\binom{\forall\exists}{\forall\exists}\binom{\exists}{\exists}$-решений и $\binom{\forall\exists}{\exists\forall}\binom{\exists}{\exists}$-решений действительно заметает значительные части соответствующих множеств.

Итак, мы пришли к необходимости нахождения алгебраических решений для интервальных линейных уравнений вида (16) с матрицами, составленными из элементов арифметики Каухера. Эта задача имеет и самостоятельный математический интерес. Несмотря на простую структуру таких систем уравнений, мы лишь в очень частных ситуациях сможем воспользоваться для её решения какими-либо методами исключения, пакетами символьных преобразований и т.п. Причина — недостаточные алгебраические свойства $\mathbb{IR}$. Хотя они и значительно лучше, чем у $\mathbb{IR}$, отсутствие в арифметике Каухера полноценной дистрибутивности делает в общем случае невозможной даже такую простейшую операцию, как приведение подобных членов. По этой причине все разработанные к настоящему времени алгоритмы для нахождения алгебраических решений ИСЛАУ — существенно *численные*.

Отметим, что недавно А.В. Лакеев доказал NP-полноту задачи нахождения алгебраического решения интервальной системы линейных уравнений в арифметике Каухера [21]. Тем не менее, несмотря на этот неблагоприятный факт, для случая, когда интервальные данные задачи "не слишком широки" удаётся строить эффективные численные методы, быстро вычисляющие алгебраическое решение ИСЛАУ [20, 22].

Список литературы

[1] *Клини С.* Математическая логика. – М.: Мир, 1973.

[2] *Ащепков Л.Т.* К проблеме повышения живучести управляемых систем // Модели и методы исследования операций. – Новосибирск: Наука, 1988.

[3] *Ватолин А.А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, у 11.

[4] *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.

[5] *Добронец Б.С., Шайдуров В.В.* Двусторонние численные методы. – Новосибирск: Наука, 1990.

[6] *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.

[7] *Moore R.E.* Methods and Applications of Interval Analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979.

[8] *Neumaier A.* Interval Methods for Systems of Equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[9] *Shary S.P.* Solving the interval linear tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – Vol. 39.

[10] *Shary S.P.* On controlled solution set of interval algebraic systems // Interval Computations. – 1992. – у 4(6).

[11] *Barth W., Nuding E.* Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // Computing. – 1974. – Vol. 12.

[12] *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // Computing Suppl. 2. – 1980.

[13] *Gardeñes E., Trepat A.* Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing. – 1980. – Vol. 24.

[14] *Биркгоф Г.*, Теория решёток. – М.: Наука, 1984.

[15] *Лакеев А.В., Носков С.И.* О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. Матем. Журнал. – 1994. – Т. 35, у 5.

[16] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.

[17] *Зоркальцев В.И.* Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. – М.: Наука, 1988.

[18] *Ratschek H., Sauer W.* Linear interval equations // Computing. – 1982. – Vol. 28.

[19] *Kupriyanova L.V.* Inner estimation of the united solution set to interval linear algebraic systems // Reliable Computing. – 1995. – Vol. 1.

[20] *Shary S.P.* Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. – 1996. – Vol. 2, у1.

[21] *Lakeyev A.V.* Linear algebraic equation in Kaucher arithmetic // Reliable Computing, 1995, Supplement (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995).

[22] *Шарый С.П.* Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем // Дискретная математика. – КГТУ: Красноярск, 1996.