Внутреннее оценивание множеств решений неотрицательных интервальных линейных систем

С. П. Шарый

УДК 519.6

Шарый С.П. Внутреннее оценивание множеств решений неотрицательных интервальных линейных систем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2006. — Т. 9, № 2. — С. 189–206.

В работе предлагается способ нахождения максимальных по включению внутренних оценок для множеств решений интервальных линейных систем с неотрицательными матрицами, основанный на свойстве *монотонности конфигурации* этих множеств решений.

Ключевые слова: *интервальная линейная система, неотрицательная матрица, множество решений, внутреннее оценивание, максимальная оценка.*

Shary S.P. Inner estimation of solution sets to non-negative interval linear systems // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2006. — Vol. 9, № 2. — P. 189–206.

This paper presents a new technique for constructing the maximum (with respect to an inclusion) inner estimates of the solution sets to the interval linear equations systems having non-negative matrices, based on *the shape monotonicity* of these solution sets.

Key words: *interval linear system, non-negative matrix, solution set, inner estimation, maximum estimate.*

1. Введение

Предмет рассмотрения нашей работы — интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1.1}$$

с интервальной $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$. Мы будем рассматривать их как совокупность обычных (точечных) систем уравнений вида

$$Ax = b \tag{1.2}$$

той же структуры, что и (1.1), у которых элементы матрицы a_{ij} и правой части b_i могут независимо друг от друга изменяться в пределах интервалов $\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$ соответственно.

Отметим, что всюду в нашей работе интервалы и интервальные объекты обозначаются в соответствии с проектом неформального международного стандарта [8] буквами жирного шрифта $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, тогда как обычные неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами — это операции соответствующих интервальных арифметик, либо классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ (см., напр., [1, 3, 12]), либо расширенной интервальной арифметики Кахана [7, 11]. Наконец, подчеркивание и надчеркивание — $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}$ — обозначают нижний и верхний концы интервала $\boldsymbol{a}$.

По мере того как параметры системы (1.1) — a_{ij} и b_i — варьируются в пределах соответствующих интервалов, решение вещественной системы (1.2) также дрейфует в пространстве $\mathbb{R}^n$, "заметая" некоторое множество, которое мы будем называть *множеством решений* интервальной системы (1.1) и обозначать $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Таким образом, множество решений интервальной системы линейных уравнений (1.1) образовано всевозможными решениями систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, и строгое его определение имеет вид

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\,\}. \tag{1.3}$$

Часто его называют также *объединенным множеством решений*, поскольку существуют и другие множества решений интервальных систем уравнений (см., напр., [5, 15]). Мы не будем рассматривать их в нашей работе, и потому для краткости опускаем эпитет "объединенное".

В качестве примера практического возникновения множества решений (1.3), важного для нашей работы, рассмотрим так называемую задачу идентификации в условиях интервальной неопределенности.

Рис. 1. Структурная схема объекта идентификации

Пусть имеется статический объект (рис. 1), входы и выходы которого описываются конечномерными векторами $\big(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n$ и $\big(b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(r)}\big) \in \mathbb{R}^r$ соответственно. Будем предполагать также, что зависимость "вход-выход" является линейной:

$$b^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} x_{kl} a^{(l)}, \qquad k = 1, 2, \dots, r,$$

с некоторыми постоянными коэффициентами x_{kl}. При функционировании объекта (или его экспериментальном исследовании) мы можем измерять его входные сигналы и соответствующие выходные отклики, и одна из практически наиболее важных задач, возникающих в подобных ситуациях, — это *задача идентификации*: требуется найти (или как-то оценить) значения x_{kl}, т. е. идентифицировать параметры объекта. Иными словами, мы должны сформировать математическую модель объекта на основе результатов измерений (наблюдений), например, с целью предсказания его будущего поведения и т. п.

Если серия наблюдений входа-выхода объекта является "достаточно представительной", то мы получаем в свое распоряжение набор отношений с числовыми параметрами, связывающий x_{kl}, т. е., фактически, некоторую систему уравнений относительно x_{kl}, из которой можно найти их значения.

Рассмотрим далее для простоты модель объекта, в которой на x_{kl} не накладывается никаких дополнительных ограничений, в частности, их можно считать независимыми друг от друга. Тем самым появляется возможность с каждым выходом объекта работать индивидуально, вне зависимости от других выходов, порознь решая задачу идентификации для каждого отдельно взятого $k = 1, 2, \ldots, r$. Можно при этом даже ограничиться идентификацией объекта с входом $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ и единственным одномерным выходом $b \in \mathbb{R}^1$, такого, что отношение вход-выход для него описывается простейшей линейной формой

$$b = a^{(1)}x_1 + a^{(2)}x_2 + \ldots + a^{(n)}x_n. \tag{1.4}$$

Для удобства условимся впредь обозначать результат i-го измерения входов через $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, а выхода — через b_i. Тогда решение задачи идентификации сводится к нахождению решения $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ (обычного, либо в каком-то обобщенном смысле) для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где m — общее количество измерений (наблюдений).

Вышеизложенное является кратким наброском техники идентификации в полностью детерминистском случае. Обратимся теперь к более сложной практической ситуации, когда входы и/или выходы объекта не являются точно известными и нам доступны лишь их интервальные оценки, т. е. все, что мы знаем теперь об идентифицируемом объекте — это принадлежности a_{ij} и b_i некоторым интервалам:

$$a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}] \qquad \text{и} \qquad b_i \in \boldsymbol{b}_i = [\underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i].$$

Подобная неопределенность может быть следствием не только неизбежных ошибок измерений, но вытекать из принципиальных трудностей в (более или менее) точном определении значений некоторых величин. Таковы, к примеру, особенности идентификации параметров быстропротекающих химических реакций взрывного типа. В этих новых условиях мы естественно приходим к необходимости рассматривать задачу идентификации при интервальных данных.

Как следует понимать решение подобной интервальной идентификационной задачи? Очевидно, что единого универсального ответа на этот вопрос не существует, но общая естественная идея — это “согласованность” в том или ином смысле решения идентификационной задачи с экспериментальной информацией. В нашей работе мы придерживаемся следующего широко принятого определения [2, 10]: будем говорить, что набор параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объекта, описываемого зависимостью (1.4), *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in})$ и $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если для каждого i (т. е. для каждого наблюдения) в пределах измеренных интервалов существуют точечные представители $a_{i1} \in \boldsymbol{a}_{i1}$, $a_{i2} \in \boldsymbol{a}_{i2}$, $\ldots$, $a_{in} \in \boldsymbol{a}_{in}$ и $b_i \in \boldsymbol{b}_i$, такие, что выполнено отношение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i. \tag{1.5}$$

Если $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $m \times n$-матрица, составленная из m результатов измерений входов, $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)^\top$ — интервальный вектор m измерений выходов, то семейство всех векторов параметров, согласующихся с интервально заданными экспериментальными данными, может быть представлено в виде

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\},$$

то есть как множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Специалистами по теории идентификации это множество часто называется *информационным множеством*, *(апостериорным) множеством возможных значений параметров* [10] и т. п. Но для нас наиболее существенно то, что это множество является ни чем иным, как определенным в (1.3) множеством решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

2. Постановка задачи

Известно, что пересечение множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ с каждым из ортантов пространства $\mathbb{R}^n$ является выпуклым и полиэдральным [13], так что в целом множество решений может быть представлено как объединение не более чем 2^n полиэдров. Следовательно, длина точного прямого описания множества решений ИСЛАУ, при котором мы скрупулезно выписываем в каждом ортанте все уравнения ограничивающих $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ гиперплоскостей, может расти экспоненциально с размерностью интервальной системы n, а потому оно представляется практически невозможным уже при n, превосходящем несколько десятков. В действительности, подобное точное описание и не нужно в большинстве реальных постановок задач. Пользователи, как правило, ограничиваются задачами нахождения оценок, в том или ином смысле, для множеств решений, т. е. заменяют задачу точного описания $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ на задачу его приближенного описания в соответствии со смыслом решаемой практической постановки [1–3, 7, 12, 15].

В зависимости от стоящей перед нами задачи возможны и различные способы оценивания множеств решений. К примеру, если в рассмотренной во введении задаче идентификации линейного статического объекта в условиях интервальной неопределенности мы собираемся использовать результаты для выбора параметров объекта на стадии его проектирования, то естественно оценивать $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ с помощью подмножеств, т. е. таким образом, чтобы наверняка не захватить "лишние" векторы параметров, не имеющие отношения к идентифицируемому объекту. С другой стороны, если мы планируем использовать результаты идентификации для гарантированной оценки по полученной модели наибольших возможных отклонений выходов в процессе функционирования объекта, то множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ следует оценивать "извне", с помощью объемлющих множеств, которые содержат все векторы результатов идентификации. Подробное обсуждение этих вопросов заинтересованный читатель может найти, в частности, в [2, 10].

В этой работе мы будем рассматривать задачу внутреннего (посредством подмножеств) оценивания множеств решений ИСЛАУ (см. рис. 2), причем в качестве оценивающих подмножеств возьмем интервальные векторы, т. е. брусы в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{\it Для интервальной линейной системы } \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}\\ \text{\it найти интервальный вектор, содержащийся}\\ \text{\it во множестве решений } \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}).\end{array}} \qquad (2.6)$$

Отметим, что интервальное представление ответа — внутренней оценки — является, как правило, весьма удобным для “лиц, принимающих решения” (конструктора, оператора технологического процесса и т. п.). Вдобавок, формулировка задачи в чисто интервальных терминах позволяет привлечь для ее решения развитый аппарат интервального анализа. Ясно, что внутренняя интервальная оценка неединственна, и на практике наибольшую ценность имеют *максимальные по включению* (неулучшаемые) внутренние оценки.

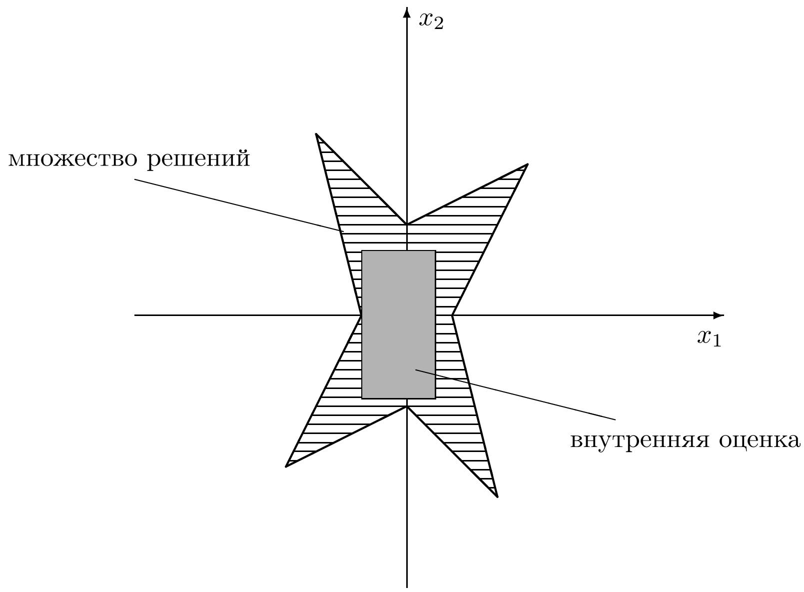

Рис. 2. Внутреннее оценивание множества решений

Задачи внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ рассматривались ранее, например, в [5, 15], где автором развивался подход, основанный на сведении исходной задачи оценивания к задаче нахождения формального (алгебраического) решения некоторой вспомогательной интервальной системы. Ниже мы развиваем еще одну методику внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными не обязательно квадратными матрицами, которая в ряде случаев может оказаться разумной альтернативой формально-алгебраическому подходу из [5, 15]. Она основана на свойстве *монотонности конфигурации* множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами (впервые отмеченном в [14]) и позволяет находить максимальные по включению внутренние оценки множеств решений.

Кроме неотрицательности, мы не накладываем никаких ограничений (квадратность, неособенность и т. п.) на интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$ системы уравнений (1.1), но при этом постановка задачи должна быть скорректирована на случай неограниченного множества решений. В этой ситуации мы будем искать внутреннюю оценку для пересечения множества решений с некоторым заранее заданным интервальным вектором-брусом $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \dots, \boldsymbol{U}_n)^\top \in \mathbb{IR}^n$, т. е. решать не (2.6), а задачу:

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *найти интервальный вектор, содержащийся в пересечении множества решений* $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *с некоторым a priori заданным брусом* $\boldsymbol{U}$.	(2.7)

3. Теоретическая основа

Зафиксируем натуральный индекс $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ и рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ прямую линию l с параметрическим уравнением

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & r_1, \\ & \cdots & \\ x_{\nu-1} & = & r_{\nu-1}, \\ x_\nu & = & t\,, \\ x_{\nu+1} & = & r_{\nu+1}, \\ & \cdots & \\ x_n & = & r_n, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

где $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$ — вещественные константы, а t — параметр, пробегающий вещественную ось $\mathbb{R}$. Эта прямая, которую мы будем называть “пробной”, параллельна ν-й координатной оси и полностью задается указанием $(n-1)$-мерного вещественного вектора $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$. Для явного указания параметров этой прямой мы будем использовать обозначение $l(r)$.

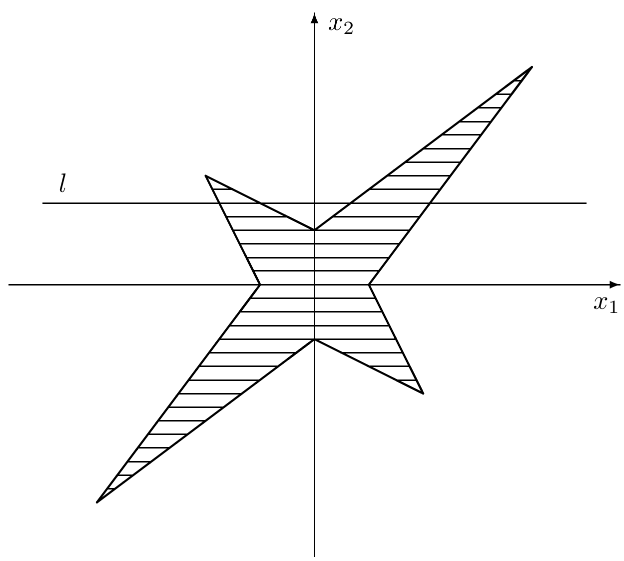

Рис. 3. Пересечение множества решений пробной прямой

Пусть также

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min\{\, x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r)\,\},$$

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \max\{\, x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r)\,\}$$

суть соответственно наименьшее и наибольшее значения ν-й координаты точек из пересечения $l(r)$ с множеством решений интервальной линейной системы (1.1), см. рис. 3 (в случае $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r) = \emptyset$ мы полагаем $\underline{\Omega}_\nu(r) = +\infty$ и $\overline{\Omega}_\nu(r) = -\infty$). Наша ближайшая цель — вывод явных выражений для функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$, которые, в некотором роде, “отслеживают” конфигурацию границы множества решений ИСЛАУ.

"Подставим" параметрическое уравнение пробной прямой (3.1) в исходную интервальную систему $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, которая превратится при этом в "распавшуюся" систему m одномерных линейных уравнений с интервальными коэффициентами и одной переменной t:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{1\nu}t & + & \sum\limits_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{1j}r_j & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m\nu}t & + & \sum\limits_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{mj}r_j & = & \boldsymbol{b}_m. \end{cases} \tag{3.2}$$

Содержательный смысл этой процедуры состоит в следующем. При подстановке параметрического уравнения (3.1) в точечную систему $Ax = b$ мы получаем некоторую систему из m одномерных уравнений, которая совпадает по структуре с (3.2), но имеет вещественные коэффициенты. Далее варьируем элементы a_{ij} матрицы и элементы b_i вектора правой части в пределах заданных для них границ $\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$ соответственно. Ясно, что множество всех полученных таким образом точечных систем уравнений как раз таки образует (3.2).

При сделанных нами предположениях о неотрицательности элементов матрицы интервальной линейной системы все интервалы $\boldsymbol{a}_{i\nu}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, также неотрицательны, и множество решений i-го уравнения этой системы может быть вычислено по правилам интервальной арифметики как

$$\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}r_j \right) \Big/ \boldsymbol{a}_{i\nu} \tag{3.3}$$

с единственной оговоркой, что в качестве "/" может потребоваться операция деления в расширенной интервальной арифметике Кахана [7, 11], допускающая нульсодержащие делители.

Напомним, что помимо обычных интервалов из $\mathbb{IR}$ элементами интервальной арифметики Кахана являются множества вида $]-\infty, p] \cup [q, +\infty[$, $p \leq q$, и $]-\infty, p]$, $[q, +\infty[$. Результаты сложения, вычитания, умножения и деления $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$ при $0 \notin \boldsymbol{b}$ в классической интервальной арифметике и арифметике Кахана полностью совпадают. Но в арифметике Кахана дополнительно определено деление обычных интервалов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$ с $0 \in \boldsymbol{b}$. Чтобы сделать нашу работу самодостаточной, мы выпишем соответствующие результаты в развернутой форме:

$$\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} = \frac{[\,\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,]}{[\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{b}}\,]} = \begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot[\,1/\overline{\boldsymbol{b}}, 1/\underline{\boldsymbol{b}}\,], & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{b}, \\ ]-\infty, +\infty\,[, & \text{если } 0 \in \boldsymbol{a} \text{ и } 0 \in \boldsymbol{b}, \\ [\,\overline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{b}}, +\infty\,[, & \text{если } \overline{\boldsymbol{a}} < 0 \text{ и } \underline{\boldsymbol{b}} < \overline{\boldsymbol{b}} = 0, \\ ]-\infty, \overline{\boldsymbol{a}}/\overline{\boldsymbol{b}}\,] \cup [\,\overline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{b}}, +\infty\,[, & \text{если } \overline{\boldsymbol{a}} < 0 \text{ и } \underline{\boldsymbol{b}} < 0 < \overline{\boldsymbol{b}}, \\ ]-\infty, \overline{\boldsymbol{a}}/\overline{\boldsymbol{b}}\,], & \text{если } \overline{\boldsymbol{a}} < 0 \text{ и } 0 = \underline{\boldsymbol{b}} < \overline{\boldsymbol{b}}, \\ ]-\infty, \underline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{b}}\,], & \text{если } 0 < \underline{\boldsymbol{a}} \text{ и } \underline{\boldsymbol{b}} < \overline{\boldsymbol{b}} = 0, \\ ]-\infty, \underline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{b}}\,] \cup [\,\underline{\boldsymbol{a}}/\overline{\boldsymbol{b}}, +\infty\,[, & \text{если } 0 < \underline{\boldsymbol{a}} \text{ и } \underline{\boldsymbol{b}} < 0 < \overline{\boldsymbol{b}}, \\ [\,\underline{\boldsymbol{a}}/\overline{\boldsymbol{b}}, +\infty\,[, & \text{если } 0 < \underline{\boldsymbol{a}} \text{ и } 0 = \underline{\boldsymbol{b}} < \overline{\boldsymbol{b}}, \\ \emptyset, & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{a} \text{ и } 0 = \boldsymbol{b}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Подробное описание интервальной арифметики Кахана, формализующей операции над интервалами и их дополнениями, аналогичные (3.4), можно найти в [11], но для наших целей вполне достаточно использовать только формулы (3.4), а затем пересекать результат с обычным интервалом.

Каждое из одномерных уравнений, образующих систему (3.2), мы можем решить отдельно от других, а затем пересечь все получившиеся при этом множества решений (3.3) друг с другом (а также с $\boldsymbol{U}_\nu$, если решаем постановку задачи (2.7)). В пределах всех интервалов, входящих в систему (3.2), соответствующие коэффициенты изменяются независимо друг от друга, как и в исходной ИСЛАУ, так что замкнутое множество $\mathcal{S}$, полученное в результате описанного выше раздельного решения уравнений и пересечения их одномерных множеств решений, является в точности множеством значений ν-й координаты точек из $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\cap l(r)$. Оно может оказаться пустым, если система (3.2) несовместна, но в любом случае

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min \mathcal{S} \qquad \text{и} \qquad \overline{\Omega}_\nu(r) = \max \mathcal{S}.$$

Если интервалы $\boldsymbol{a}_{i\nu}$, $i = 1,2,\dots,m$, не содержат нуля в своей внутренности, то все множества (3.3) — *связные* интервалы вида $[p,q]$ или $]-\infty,p]$, или $[q,+\infty[$, или же вся вещественная ось $\mathbb{R}$. Это следует из формул для арифметических операций в классической интервальной арифметике и формул (3.4) для деления в расширенной интервальной арифметике Кахана. Далее, пересечение получающихся интервалов-результатов тривиально организуется по формуле

$$\boldsymbol{x}\cap\boldsymbol{y} = \bigl[\,\max\{\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\},\min\{\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}\}\,\bigr].$$

Таким образом, в точках эффективной области определения функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ (т. е. когда пересечение множеств (3.3) непусто) мы имеем

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max_{1\le i\le m}\left\{\underline{\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\,j\neq\nu}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}r_j\right)\Big/\,\boldsymbol{a}_{i\nu}}\right\}, \tag{3.5}$$

если множество решений ограничено, и

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max\left\{\max_{1\le i\le m}\left\{\underline{\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\,j\neq\nu}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}r_j\right)\Big/\,\boldsymbol{a}_{i\nu}}\right\},\ \underline{\boldsymbol{U}}_\nu\right\}, \tag{3.6}$$

если множество решений неограничено, и мы решаем задачу (2.7) (тогда подчеркивание означает взятие инфимума, а не нижнего конца интервала).

Аналогично, в точках эффективной области определения функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$ имеет место

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min_{1\le i\le m}\left\{\overline{\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\,j\neq\nu}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}r_j\right)\Big/\,\boldsymbol{a}_{i\nu}}\right\}, \tag{3.7}$$

если множество решений ограничено, и

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min\left\{\min_{1\le i\le m}\left\{\overline{\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\,j\neq\nu}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}r_j\right)\Big/\,\boldsymbol{a}_{i\nu}}\right\},\ \overline{\boldsymbol{U}}_\nu\right\}, \tag{3.8}$$

если множество решений неограничено, и мы решаем задачу (2.7) (тогда надчеркивание означает взятие супремума).

Предложение. *Если в интервальной линейной системе* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *матрица* $\boldsymbol{A}$ *неотрицательна, то все функции* $\underline{\Omega}_\nu(r)$ *и* $\overline{\Omega}_\nu(r)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, *являются монотонно невозрастающими по любой переменной на эффективных областях своего определения.*

Доказательство. Оно основывается на следующем простом факте: как нижняя, так и верхняя огибающие (т. е. поточечные минимум и максимум) любого семейства монотонно невозрастающих функций также являются невозрастающими функциями.

Заметим, что если $\boldsymbol{a}_{ij} \geq 0$ и $\boldsymbol{a}_{i\nu} \geq 0$, то для всех i, j и ν выражения

$$\frac{\big(\text{ конец интервала } \boldsymbol{b}_i\big) - \displaystyle\sum_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \big(\text{ конец интервала } \boldsymbol{a}_{ij}\big)\, r_j}{\text{конец интервала } \boldsymbol{a}_{i\nu}} \tag{3.9}$$

являются монотонно невозрастающими по любому из аргументов r_j, $j = 1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$ (при условии, что остальные аргументы фиксированы). Интервальные арифметические операции в $\mathbb{IR}$ определяются, как известно, таким образом, что концы результирующих интервалов являются либо минимумами, либо максимумами результатов арифметических операций между концами интервалов-операндов. Отсюда следует, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ функции

$$\underline{\omega}_{i\nu}(r) = \underline{\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} r_j\right) \Big/ \boldsymbol{a}_{i\nu}}$$

суть нижние огибающие для (3.9), а функции

$$\overline{\omega}_{i\nu}(r) = \overline{\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1,\, j\neq\nu}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} r_j\right) \Big/ \boldsymbol{a}_{i\nu}}$$

суть верхние огибающие для (3.9). При этом все они также невозрастающие по любому своему аргументу r_j, $j = 1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$.

Далее, для всех ν такими же невозрастающими являются функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$, которые в силу (3.5)–(3.6) — верхние огибающие всех $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (и, возможно, константы $\underline{\boldsymbol{U}}_\nu$), а также функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$, которые, в силу (3.7)–(3.8) — нижние огибающие для всех $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (и, возможно, константы $\overline{\boldsymbol{U}}_\nu$). □

Например, для известной интервальной линейной системы Хансена [3, 6]

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

множество решений, изображенное на рис. 4, в целом является невыпуклым, но имеет веретенообразную “монотонную” конфигурацию. В то же время, в силу Предложения форма множества решений, подобная той, что представлена на рис. 3, с выпирающими в разных направлениях шипами, невозможна для множеств решений двумерных интервальных линейных систем с неотрицательными матрицами.

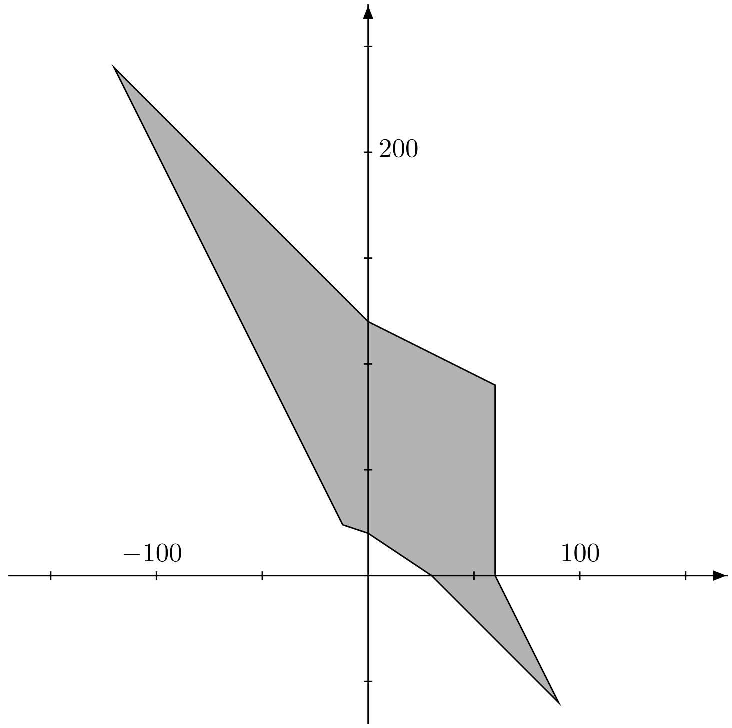

Рис. 4. Множество решений системы Хансена

Еще более наглядной иллюстрацией Предложения является интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix},$$

множество решений которой изображено на рис. 7 (оно воспроизведено также на суперобложке книги А. Ноймайера [12], но в несколько другой проекции). Внимательный наблюдатель заметит, что, несмотря на кажущуюся беспорядочность и неструктурированность конфигурации этого множества, ограничивающие его поверхности все равно монотонны! Рассмотренные примеры иллюстрируют также еще одну особенность функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ — их возможную разрывность, которая возникает из-за того, что концами интервальных элементов матрицы ИСЛАУ являются нули.

Теорема. *Если в интервальной линейной системе $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ матрица $\boldsymbol{A}$ неотрицательна, то для любых двух точек y, $z \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, таких что $y \leq z$ в покомпонентном смысле, интервальный вектор $[y, z]$ тоже является подмножеством множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.*

Доказательство. Из самого определения функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ следует, что для любого $r \in \mathbb{R}^{n-1}$ и любого индекса $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\underline{\Omega}_\nu(r) \leq \{ x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r) \} \leq \overline{\Omega}_\nu(r),$$

причем оба неравенства точны. Но при сделанном нами допущении о неотрицательности матрицы $\boldsymbol{A}$ справедливо даже большее:

$$\{\, x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r) \,\} = \left[\, \underline{\Omega}_\nu(r), \overline{\Omega}_\nu(r) \,\right],$$

так как множество $\{\, x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap l(r) \,\}$ связно. Следовательно, множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ есть в точности пересечение надграфика функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и подграфика функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$ (см. рис. 5). Утверждение доказываемой теоремы вытекает поэтому из того факта, что функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ являются монотонно невозрастающими. $\square$

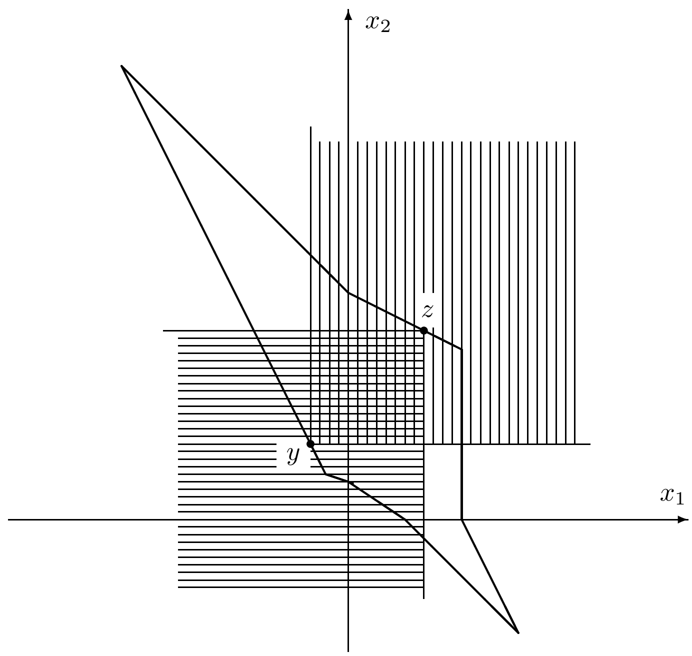

Рис. 5. Иллюстрация утверждения теоремы

Таким образом, структура множества решений ИСЛАУ с неотрицательной матрицей является весьма специальной, и для его внутреннего оценивания могут быть построены эффективные алгоритмы, даже полиномиальные по сложности в случае, когда уже известна какая-то точка из $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$.

4. Алгоритм

Псевдокод алгоритма для построения максимальной внутренней интервальной оценки множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами, вытекающий из теории п. 3, приведен в таблице. Знаком “$\leftarrow$” мы всюду далее обозначаем оператор присваивания.

Дадим необходимые пояснения к этому псевдокоду. Алгоритм осуществляет построение нижней y и верхней z границ интервального вектора $[y, z]$ внутренней оценки для $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, отправляясь от некоторой начальной точки $\tilde{x} \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Первоначально полагаем $y \leftarrow \tilde{x}$, $z \leftarrow \tilde{x}$, а далее i-й, $i = 1, 2, \ldots, n$, шаг алгоритма “раздвигает” точки y и z по i-й координате (см. рис. 6), так что в результате n-го шага получается, вообще говоря, строгое покомпонентное неравенство $y < z$.

Алгоритм `NonNeg` для внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами

Вход

Интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с неотрицательной матрицей $\boldsymbol{A}$.

Точка $\tilde{x}$ из оцениваемого множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Параметры λ, $\mu \in]0, 1]$.

Выход

Нижняя y и верхняя z границы интервального вектора $[y, z]$ внутренней оценки множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Алгоритм

$y \leftarrow \tilde{x}$;

$z \leftarrow \tilde{x}$;

`DO FOR` $k = 1$ `TO` n

$\quad \boldsymbol{Y} \leftarrow \mathbb{R}$;

$\quad \boldsymbol{Z} \leftarrow \mathbb{R}$;

$\quad$ `DO FOR` $i = 1$ `TO` n

$$\boldsymbol{Y} \leftarrow \boldsymbol{Y} \cap \left(\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, y_j \right) \big/ \boldsymbol{a}_{ik} \right);$$

$$\boldsymbol{Z} \leftarrow \boldsymbol{Z} \cap \left(\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, z_j \right) \big/ \boldsymbol{a}_{ik} \right);$$

$\quad$ `END DO`

$\quad$ `IF` ($k < n$) `THEN`

$\qquad y_k \leftarrow \lambda \underline{\boldsymbol{Y}} + (1 - \lambda)\, \tilde{x}_k$;

$\qquad z_k \leftarrow (1 - \mu)\, \tilde{x}_k + \mu \overline{\boldsymbol{Z}}$;

$\quad$ `ELSE`

$\qquad y_k \leftarrow \underline{\boldsymbol{Y}}$;

$\qquad z_k \leftarrow \overline{\boldsymbol{Z}}$;

$\quad$ `END IF`

`END DO`

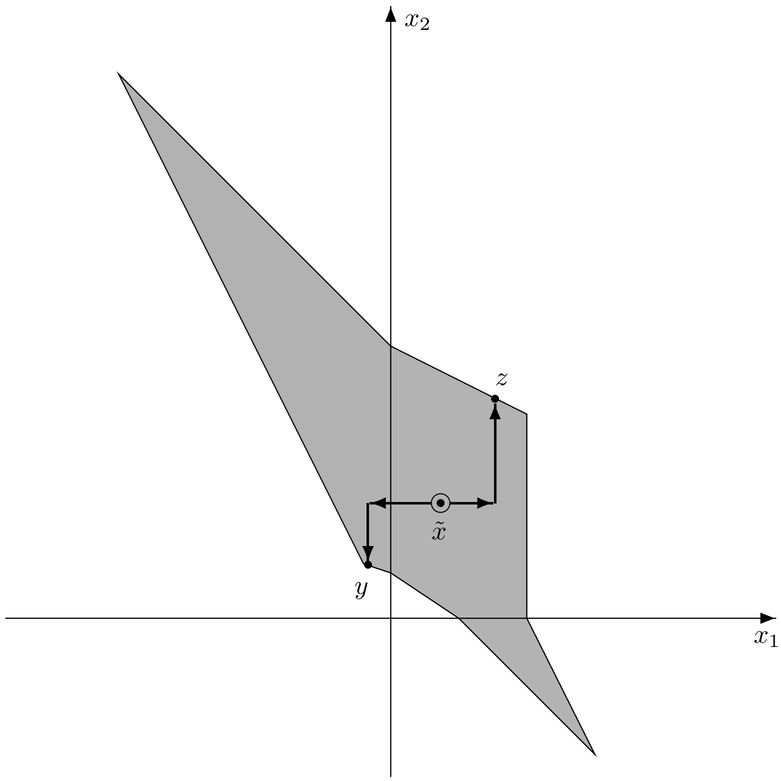

Рис. 6. Как работает алгоритм `NonNeg`

С помощью вспомогательных безразмерных параметров λ и μ пользователь имеет возможность изменять форму интервальной оценки $[y, z]$ и ее расположение внутри множества решений. Эти параметры регулируют то, насколько отличными от $\tilde{x}_i$ будут сделаны на i-м шаге алгоритма значения y_i и z_i соответственно. Величина $\lambda = 1$ или $\mu = 1$ задает максимально возможное в пределах множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ отклонение y_i от $\tilde{x}_i$ в сторону уменьшения и z_i от $\tilde{x}_i$ в сторону увеличения, а нулевые λ или μ соответствовали бы $z_i = y_i = \tilde{x}_i$. Конкретная величина сдвига y_i и z_i относительно $\tilde{x}_i$ определяется из информации о пересечении с множеством решений ИСЛАУ прямых, параллельных i-й координатной оси и проходящих через насчитанные к текущему шагу точки y и z. Методика вычисления таких пересечений подробно изложена нами в п. 3.

Отдельного пояснения требует факт различного подхода к обработке i-й, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и последней n-й компонент векторов y и z. Для получения максимального по включению внутреннего бруса имеет смысл взять точки y и z на границе множества решений, а потому по n-й координате эти точки раздвигаются максимально далеко друг от друга, на противоположные границы $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, так что параметры λ и μ уже никак не влияют на выполнение этого завершающего шага алгоритма. Из нахождения y и z на границе множества решений следует и максимальность по включению получающейся внутренней оценки.

Для получения "телесной" формы бруса внутренней оценки множества решений наш вычислительный опыт рекомендует выбирать "средние" между 0 и 1 значения для λ и μ, т. е. в районе 0.3–0.7. Слишком близкие к 0 или к 1 значения λ и μ могут привести к "сплющиванию" оценивающего бруса по некоторым координатам. Впрочем, нередко построение удовлетворяющей пользователя оценки может стать лишь результатом интерактивной процедуры, включающей многократный выбор $\tilde{x}$ и варьирование λ и μ.

Приведенная в таблице версия алгоритма рассчитана на интервальные линейные системы с неотрицательными квадратными матрицами и случай ограниченных множеств решений. Для ИСЛАУ с неотрицательными прямоугольными $m \times n$-матрицами внутренний цикл “DO FOR” следует выполнять до m. Если же предполагается неограниченность множества решений, и мы решаем постановку (2.7), то в начале внешнего цикла “DO FOR” по k нужно инициализировать интервалы $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ не всей числовой осью $\mathbb{R}$, а интервалами $\boldsymbol{U}_k$, т. е. k-ми компонентами ограничивающего бруса $\boldsymbol{U}_k$, данного нам из самой постановки (2.7).

Наконец, отметим, что трудоемкость исполнения алгоритма NonNeg при известной начальной точке $\tilde{x}$ составляет всего $O(mn^2)$ арифметических и логических операций.

5. Выбор начальной точки

Для получения телесной внутренней оценки множества решений желательно, чтобы начальная точка $\tilde{x}$ алгоритма NonNeg лежала во внутренности $\operatorname{int}\,\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ множества решений. В этом параграфе мы обсудим, как проверять, действительно ли $\tilde{x} \in \operatorname{int}\,\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, а в некоторых случаях и корректировать положение $\tilde{x}$.

В самой общей ситуации корректировка точки из множества решений ИСЛАУ представляет собой непростую задачу, так как NP-трудной задачей является распознавание самих этих множеств решений [9]. В качестве начального приближения для точки $\tilde{x}$ из $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ можно взять, например, решение какой-нибудь точечной системы уравнений с коэффициентами из $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$, скажем, “средней” системы

$$(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\, x = \operatorname{mid}\boldsymbol{b}, \tag{5.1}$$

матрица и правая часть которой образованы серединами $\operatorname{mid}\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i$ интервальных элементов $\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$ соответственно. Если этот выбор по тем или иным причинам неудовлетворителен, можно воспользоваться техникой так называемых “распознающих функционалов”, разработанной автором, в частности, в [4]. Напомним некоторые понятия и факты из этой работы.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — интервальная $m{\times}n$-матрица, $\boldsymbol{b}$ — интервальный m-вектор, и $\langle\boldsymbol{a}\rangle$ обозначает *наименьшее расстояние точек интервала* $\boldsymbol{a}$ *до нуля*, а $\operatorname{rad}\boldsymbol{a}$ — *радиус интервала* $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\langle\boldsymbol{a}\rangle := \begin{cases} \min\{\,|\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}|\,\}, & \text{если } \ \boldsymbol{a} \not\ni 0, \\ 0, & \text{если } \ \boldsymbol{a} \ni 0. \end{cases} \qquad \operatorname{rad}\boldsymbol{a} := \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}).$$

Тогда выражением

$$\operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \min_{1\le i\le m}\left\{\operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}x_j \right\rangle\right\}$$

задается функционал $\operatorname{Uni} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni:

$$x \in \Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ge 0.$$

Таким образом, множество решений соответствующей ИСЛАУ есть лебегово множество $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ge 0 \,\}$ функционала Uni.

Функционал Uni является вогнутым в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$, а если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ некоторые столбцы целиком точечные, то $\operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ достигает конечного максимума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то x — точка топологической внутренности $\mathrm{int}\, \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ множества решений ИСЛАУ. При некоторых дополнительных ограничениях на $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ верно и обратное: из принадлежности $x \in \mathrm{int}\, \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ следует $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.

Как следствие этих результатов, мы естественно приходим к следующему практическому рецепту коррекции начальной точки $\tilde{x}$ для алгоритма `NonNeg`. Если по каким-либо причинам $\tilde{x}$ не удовлетворяет нас (например, не находится во внутренности множества решений, о чем может свидетельствовать значение $\mathrm{Uni}(\tilde{x}) \leq 0$), то, пользуясь градиентным подъемом, пытаемся достичь лучшего значения распознающего функционала Uni. В случае, когда полученное новое значение функционала строго больше нуля, мы можем быть уверенными, что оказались во внутренности множества решений.

6. Численные эксперименты

Пример 1. Для интервальной линейной системы Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

применение алгоритма `NonNeg` с параметрами $\lambda = \mu = 1$ и начальной точкой в виде решения “средней системы” (5.1) приводит к ответу

$$\begin{pmatrix} [-25.909, 60] \\ [51.818, 90] \end{pmatrix},$$

а с параметрами $\lambda = \mu = 0.7$ получается внутренняя оценка

$$\begin{pmatrix} [-13.022, 47.114] \\ [26.045, 96.443] \end{pmatrix}.$$

Как видим, получающиеся интервальные векторы внутренней оценки в обоих случаях являются максимальными по включению и покрывают значительные куски множества решений.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим интервальную линейную систему с $n \times n$-матрицей

$$\begin{pmatrix} t & [0,2] & \cdots & [0,2] \\ [0,2] & t & \cdots & [0,2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,2] & [0,2] & \cdots & t \end{pmatrix},$$

которая была предложена А. Ноймайером в книге [12]. Здесь t — вещественный параметр, с помощью которого можно управлять свойствами матрицы. В частности, при $t > n$ для четных n и при $t > \sqrt{n^2 - 1}$ для нечетных n матрица Ноймайера неособенна (невырождена), т. е. содержит только неособенные вещественные матрицы. Кроме того, матрица Ноймайера неотрицательна, и потому интервальные линейные системы с ней могут служить тестовыми для развитой нами в этой работе методики.

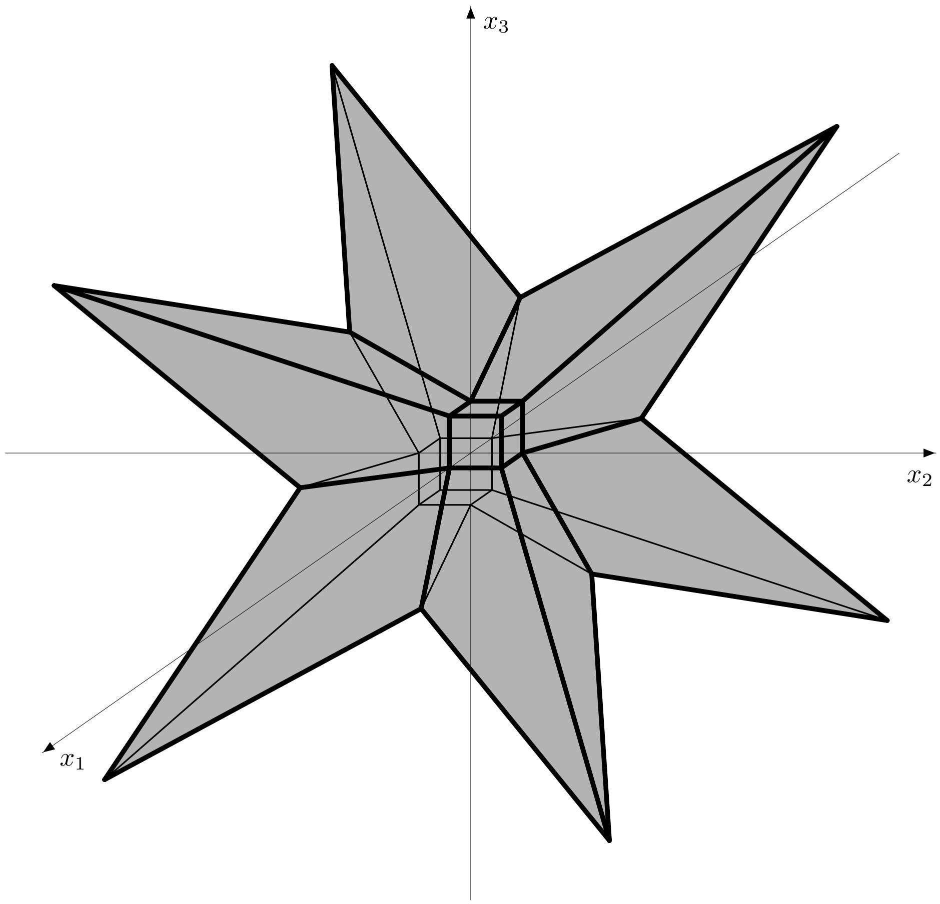

Рис. 7. Множество решений трехмерной системы Ноймайера

При $t = 3.5$, размерности 3 и правой части $([-1,1],[-1,1],[1,1])^\top$ множество решений этой интервальной системы имеет вид, изображенный на рис. 7. Взяв в качестве начальной точки $\tilde{x}$ решение "средней системы" — нулевой вектор, — после применения алгоритма внутреннего оценивания `NonNeg` с параметрами $\lambda = \mu = 1$ получим результат

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \end{pmatrix},$$

совпадающий с точной внутренней оценкой той части множества решений ("кубика"), которая прилегает к началу координат в положительном и отрицательном ортантах. Аналогично предыдущему примеру, столь хорошие результаты оценивания при граничных значениях параметров λ и μ имеют причиной специальную конфигурацию множества решений. Именно, так как в матрице ИСЛАУ "много" элементов имеют нулевые концы, то некоторые из граней множества решений оказываются параллельными координатным плоскостям.

Наши выводы подтверждает

Пример 3. Рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [1,2] & [1,2] \\ [1,2] & 3.5 & [1,2] \\ [1,2] & [1,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix},$$

которая отличается от системы Ноймайера тем, что вместо нулей левыми концами внедиагональных элементов матрицы взяты единицы. Для нее внутреннее оценивание множества решений алгоритмом `NonNeg` с нулевой начальной точкой $\tilde{x}$ и параметрами $\lambda = \mu = 1$ приводит к “сплющенному” интервальному ответу

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в этом случае правильнее взять параметры λ и μ внутри отрезка $]0,1]$. Например, мы получаем телесную внутреннюю оценку

$$\begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.16, 0.16] \\ [-0.14, 0.14] \end{pmatrix}$$

при использовании алгоритма `NonNeg` с $\lambda = \mu = 0.7$.

Список литературы

[1] **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987.

[2] **Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.** Оптимизация в условиях неопределенности. — Москва, София: Изд-во МЭИ “Техника”, 1989.

[3] **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.

[4] **Шарый С.П.** О характеризации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. — Красноярск, 1990. — Деп. в ВИНИТИ № 726–B91.

[5] **Шарый С.П.** Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 51–61.

[6] **Hansen E.R.** On linear algebraic equations with interval coefficients // Topics in Interval Analysis / E. Hansen, ed. — Oxford: Clarendon Press, 1969. — P. 35–46.

[7] **Kearfott R.B.** Rigorous global search: continuous problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.

[8] **Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis. — http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps.

[9] **Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P.** Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. — Dordrecht: Kluwer, 1997.

[10] **Куржанский А. Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 4. — С. 3–26.

[11] **Laveuve S.E.** Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // Interval Mathematics / K. Nickel, ed. — Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes in Computer Science. — Vol. 29. — P. 236–245).

[12] **Neumaier A.** Interval methods for systems of equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[13] **Oettli W.** On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1965. — Vol. 2, №1. — P. 115–118.

[14] **Shary S.P.** Solving interval linear systems with nonnegative matrices // Scientific Computations and Mathematical Modelling // Proc. of the International Conference MMSC–93 / S. M. Markov, ed. — Sofia: DATECS Publishing, 1993. — P. 179–182.

[15] **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. — 2002. — Vol. 8, № 5. — P. 321–418.
— http://www.ict.nsc.ru/shary/Papers/ANewTech.ps.

Институт вычислительных технологий СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6,
Новосибирск, 630090,
E-mail: shary@ict.nsc.ru

Статья поступила
20 июля 2005 г.
Переработанный вариант
11 августа 2005 г.