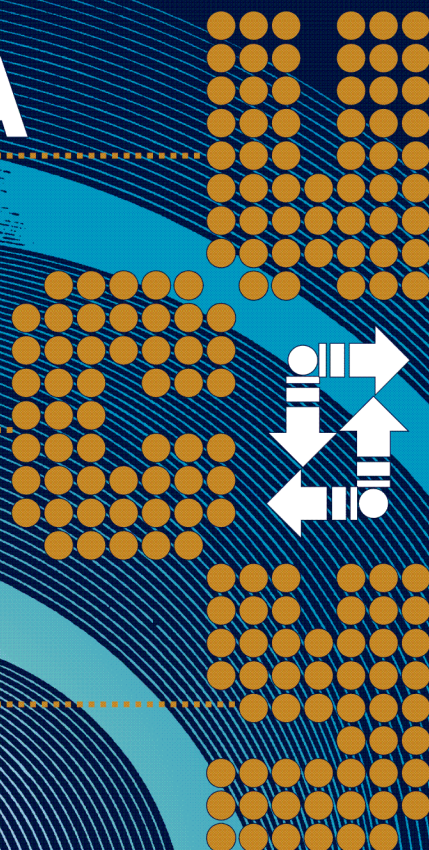


ISSN 1814-2400

ИНФОРМАТИКА

И СИСТЕМЫ

УПРАВЛЕНИЯ



3

2

0

2

2

УДК 519.23

© 2022 г. С.П. Шарый, д-р физ.-мат. наук
(ФИЦ ИВТ и НГУ, Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПО ДАННЫМ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассматривается задача восстановления функциональной зависимости по данным, которые неточны и имеют интервальную неопределенность. Предлагается подход к решению этой задачи, сводящий ее к безусловной максимизации так называемого распознающего функционала, который выражает количественную меру совместности параметров восстанавливаемой функции и интервальных данных.

Ключевые слова: задача восстановления зависимостей, интервальная неопределенность данных, интервальная система уравнений, метод максимума совместности, распознающий функционал.

DOI: 10.22250/18142400_2022_73_3_130

Введение и постановка задачи

Предметом работы является развитие методов анализа данных, которые неточны и имеют интервальную неопределенность. Мы рассматриваем задачу восстановления функциональной зависимости вида

$$y = f(x, \beta), \quad (1)$$

в которой $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – вектор независимых переменных (называемых также входными, или предикторными переменными); y – зависимая переменная (называемая также выходной, или критериальной переменной), а $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$ – вектор параметров. Эти неизвестные параметры должны быть определены на основе ряда измерений значений $x_1, x_2, \dots, x_m$ и y . Будем считать, что всего имеется n измерений, результатами которых являются

$$\begin{aligned} & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, y_1 \\ & x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, y_2 \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \\ & x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}, y_n, \end{aligned} \quad (2)$$

(первый нижний индекс обозначает номер измерения, а второй – номер переменной). Задача восстановления зависимостей – это одна из классических задач обработки данных, где требуется найти функцию из заданного параметрического класса, которая «наилучшим образом приближает» (аппроксимирует и т.п.) множество точек, полученных в результате измерений или наблюдений.

В практических задачах восстановления зависимостей данные почти всегда неточны, поскольку на результаты измерений влияют внешние неконтролируемые факторы, сами измерительные приборы не являются абсолютно точными и т.п. Далее мы будем описывать и обрабатывать неопределенности и неточности в данных с помощью методов интервального анализа (к примеру, [1 – 3, 11, 13]). При этом для результатов измерений считаются заданными интервальные оценки, которым принадлежат истинные значения измеряемых величин. В частности, в рассматриваемой нами задаче оценивания параметров зависимости мы считаем, что даны интервалы для x_{ij} и y_i :

$$x_{ij} \in \mathbf{x}_{ij} = [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] \text{ и } y_i \in \mathbf{y}_i = [\underline{y}_i, \bar{y}_i],$$

где жирный шрифт обозначает в соответствии с неформальным международным стандартом [12] интервальность соответствующих величин, а подчеркивание и надчеркивание – это операции взятия нижней и верхней границ интервала.

Простейший вариант задачи восстановления зависимостей – нахождение параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ линейной функции вида

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_l x_l, \quad (3)$$

по данным измерений независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_l$ и соответствующих значений функции y . Для этого случая (хотя и в несколько упрощенной постановке) задача впервые была рассмотрена в 1962 г. Л.В. Канторовичем в статье [4], где для случая линейной функциональной зависимости (3) были также кратко намечены доступные методы ее решения. В последующие годы значительные результаты в теории и практическом решении задачи восстановления зависимостей по интервальным данным были получены у нас в стране и за рубежом (см., в частности, [1, 2, 14]). Этой же задаче посвящены статьи автора [6 – 9, 15], развивающие так называемый *метод максимума совместности*. При этом в подавляющем большинстве работ рассматривается упрощенная (хотя и очень важная с практической точки зрения) версия общей задачи, когда входные (предикторные) переменные задаются точно, а интервальные неопределенности присущи только выходным (критериальным) переменным восстанавливаемой зависимости. В этой работе намечено

решение наиболее общей постановки, в которой невырожденные интервалы возможных значений заданы как для входных, так и для выходных переменных, а восстанавливаемая функциональная зависимость имеет общий нелинейный вид.

Следует отметить, что исследования по анализу данных с интервальной неопределенностью часто находятся в более широком контексте так называемых ограниченных неопределенностей (англоязычные термины – *bounded uncertainty*, *set membership estimation* и др.), когда множествами, описывающими неопределенности интересующих нас величин, выступают не только обычные интервалы или их обобщения, но и многогранники, эллипсоиды и другие более общие параметризованные классы ограниченных множеств [14].

Далее мы считаем, что результаты измерений являются некоторыми интервалами, которые дают двусторонние границы истинных значений измеренных величин. Более точно, в результате i -го измерения получаются такие интервалы $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \mathbf{y}_i$, что истинное значение x_1 лежит в $\mathbf{x}_{i1}$, истинное значение x_2 – в $\mathbf{x}_{i2}$ и т.д., вплоть до y , истинное значение которого принадлежит $\mathbf{y}_i$. Иными словами, вместо (2) рассматриваем интервальные данные

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{y}_1 \\ &\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m}, \mathbf{y}_2 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}, \dots, \mathbf{x}_{nm}, \mathbf{y}_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти данные образуют семейство брусов вида $(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \mathbf{y}_i)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, грани которых параллельны координатным осям. Их называют *брусами неопределенности измерений* [1], которые показаны на рис. 1.

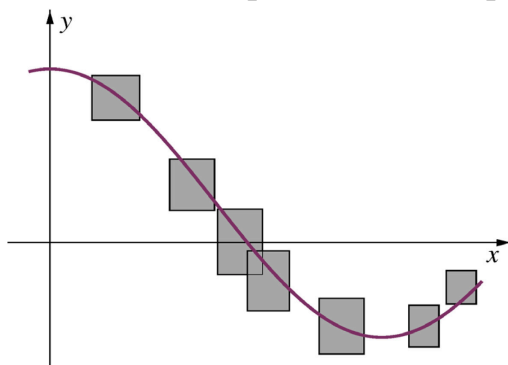


Рис. 1. Восстановление функциональной зависимости по интервальным данным измерений.

Ниже в выкладках нам потребуется интервальная матрица $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{ij})$ размера $n \times m$ и интервальный n -вектор $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_i)$ составленные из данных за-

дачи, интервалов независимых переменных и интервалов значений функции соответственно. Отдельному i -му измерению отвечает i -я вектор-строка $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ матрицы X , которую мы будем обозначать посредством X_i , т.е. как «сечение» двумерного массива X . Это удобное и выразительное обозначение из MATLAB'a и подобных ему языков программирования сегодня широко распространилось в вычислительной математике.

Нам необходимо найти или оценить параметры $\beta_j, j=1, 2, \dots, l$, для которых функция вида (1) «наилучшим образом приближает» данные (4) (см. рис. 1). При этом идеальным является, конечно, случай, когда график восстанавливаемой зависимости «проходит через все точки измерений», совершенно так же, как, например, в задаче интерполирования. Но огромное значение имеет конкретный способ прохождения графика через брусы неопределенности измерений.

В условиях неточности данных, когда результат каждого измерения-наблюдения вместо точки представляет собой целое множество возможных значений рассматриваемой величины, само понятие «прохождения через точки наблюдений» имеет неоднозначный смысл. Теперь множества неопределенности измерений приобретают структуру, которая вызывает необходимость различать те или иные случаи прохождения графика функции через эти множества. Это вызывается, в частности, тем, что входы и выходы системы (соответствующие независимым аргументам функции и зависимым переменным) отличаются друг от друга по функциональному назначению, а их измерения могут выполняться отличными друг от друга способами или даже в разное время.

Необходимость различать такие случаи вызывает к жизни понятия *слабого согласования* и *сильного согласования* данных и параметров восстанавливаемой зависимости. В настоящей работе, продолжающей статьи [6 – 9, 15], развивается технология нахождения оценок параметров зависимостей, удовлетворяющих условию сильной совместности с данными, так как они имеют лучшие теоретические свойства и практически более удобны. Мы предполагаем знакомство читателя с основными понятиями интервального анализа [1, 2, 11, 13].

Теория

Пусть β – l -мерный вектор параметров, т.е. $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) \in \mathbb{R}^l$. Подставляя полученные в ходе экспериментов интервальные данные (4) в равенство для функциональной зависимости (1), получаем интервальную си-

стему из n уравнений относительно неизвестных $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$:

$$\begin{cases} f(X_i, \beta) = y_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Нахождение оценки параметров функциональной зависимости (1) – это фактически «решение» в определенном смысле выписанной выше интервальной системы уравнений (5) относительно $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, аналогично тому, как построение параметров модели в случае обычных точечных данных сводится к нахождению решений или псевдорешений соответствующей системы уравнений, аналогичной системе (5).

Но для интервальных уравнений и систем уравнений понятие решения можно трактовать различными способами, смотря по тому, какой тип интервальной неопределенности несут интервалы, входящие параметрами в это уравнение или систему уравнений (см. [11]). Эти различные смыслы понимания решений интервальных уравнений отвечают различным способам приближения интервальных данных в нашей задаче, т.е. различным способам прохождения графика восстанавливаемой функциональной зависимости (6) через брусы неопределенности измерений. Впервые это обстоятельство было отмечено в работе [8], и оно влечет важные следствия для методов решения задачи восстановления зависимостей по интервальным данным.

Исторически первым множеством решений для интервальных систем уравнений было *объединенное множество решений*, которое определяется как множество всевозможных решений обычных (точечных) систем уравнений, параметры которых принадлежат заданным интервалам. Для системы (5) строгое определение этого множества решений, которое мы будем обозначать Ξ_{uni} (от фразы *united solution set*), выглядит следующим образом:

$$\Xi_{uni}^* = \{ \beta \in \mathbb{R}^l \mid f(x, \beta) = y_i \text{ для некоторых } x \in X_i \text{ и } y_i \in \mathbf{y}_i, i = 1, 2, \dots, n \},$$

или, формально:

$$\Xi_{uni} = \{ \beta \in \mathbb{R}^l \mid (\exists x \in X_i)(\exists y_i \in \mathbf{y}_i) f(x, \beta) = y_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Определение 1. Набор параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ функции (1) называется *слабо совместным* с интервальными экспериментальными данными $(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, если для каждого измерения i в пределах полученных интервалов найдутся такие представители $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}$, $x_{i2} \in \mathbf{x}_{i2}$, $x_{im} \in \mathbf{x}_{im}$, $y_i \in \mathbf{y}_i$, что

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = y_i.$$

Этому определению соответствует тот способ прохождения графика

восстанавливаемой зависимости через брусы неопределенности, когда график может просто иметь какие-то общие точки с этим брусами, т.е. непусто пересекаться с ними. Нетрудно видеть, что множество параметров функции (1), слабо совместных с интервальными данными (4), образует объединенное множество решений интервальной системы уравнений.

Но объединенное множество решений – не единственное возможное для интервальных уравнений и систем уравнений. В 70 – 80-е гг. была осознана ценность другого множества решений, которое получило название *допускового множества решений*. Для системы уравнений (9) строгое определение этого множества решений, которое мы будем обозначать Ξ_{tol} (от фразы *tolerable solution set*), выглядит следующим образом:

$\Xi_{tol} = \{ \beta \in \mathbb{R}^l \mid \text{для любого } x \in X_i \text{ выполнено } f(x, \beta) \in y_i, i = 1, 2, \dots, n \}$,
или, формально:

$$\Xi_{tol} = \{ \beta \in \mathbb{R}^l \mid (\forall x \in X_i) (\exists y_i \in y_i) f(x, \beta) \in y_i, i = 1, 2, \dots, n \}. \quad (7)$$

Допусковое множество решений (7) образовано всеми β , для которых значение $f(x, \beta)$ попадает в интервалы правой части y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, при любых значениях $x \in X_i$. Таким образом, Ξ_{tol} отличается от Ξ_{uni} тем, что в его определении при интервальных величинах X_i логическими кванторами (задающими тип интервальной неопределенности, см. [11]) вместо кванторов существования « $\exists$ » стоят кванторы всеобщности « $\forall$ ».

Из определения множеств решений (6) и (7) следует, что $\Xi_{tol} \subseteq \Xi_{uni}$, т.е. допусковое множество решений всегда является подмножеством объединенного множества решений. Условия, определяющие допусковое множество решений, – более жесткие, и оно может оказаться пустым даже для вполне обычных интервальных данных. Допусковому множеству решений отвечает другой способ приближения интервальных данных.

Определение 2. Набор параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ функции (6) называется *сильно совместным* с интервальными экспериментальными данными $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, если для каждого измерения i для любых значений $x_{i1} \in x_{i1}, x_{i2} \in x_{i2}, \dots, x_{im} \in x_{im}$ в пределах интервала значений функции найдется такое $y_i \in y_i$, что

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = y_i.$$

Это определение описывает тот способ прохождения графика функциональной зависимости $y = f(x, \beta)$ через брусы неопределенности данных, когда график содержится в «коридоре», задаваемом интервалом y_i , незави-

симо от конкретных значений независимых переменных этого измерения $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, x_{i2} \in \mathbf{x}_{i2}, \dots, x_{im} \in \mathbf{x}_{im}$ (еще говорят – «равномерно по $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, x_{i2} \in \mathbf{x}_{i2}, \dots, x_{im} \in \mathbf{x}_{im}$ »). Слабая совместность подразумевает, что график восстановленной функциональной зависимости $y = f(x, \beta)$ «хоть как-то задевает» брусы неопределенности, и в общем случае это может привести к неоднозначностям и патологиям при решении сложных задач восстановления зависимостей, где брусы неопределенности существенно пересекаются друг с другом [8, 15]. Сильная совместность не допускает подобных ситуаций.

Множества решений (6) и (7) часто объединяют общим термином – *информационные множества* задачи восстановления зависимостей [1]. Так называют множества параметров функции, которые являются совместными (согласуются) с данными в том или ином конкретном смысле, требующемся в задаче.

Если информационное множество задачи (т.е., необходимое множество решений) непусто, то из него можно выбирать оценку параметров. Но если множества решений пусты, т.е. система уравнений (5) несовместна в нужном нам смысле, то возникает методическая проблема – как выбирать оценку?

Естественная идея состоит в том, чтобы тогда в качестве оценки параметров функции (1) взять точку, в которой достигается «наименьшая несовместность». Для этого необходимо определить количественную меру совместности и несовместности системы уравнений (5), построенной по данным задачи и восстанавливаемой зависимости, и для нахождения оценки параметров максимизировать эту меру.

Что брать в качестве меры совместности? В традиционном неинтервальном случае естественной мерой совместности уравнения или системы уравнений на каком-нибудь приближенном решении является *невязка*, разность между левой и правой частями уравнения при подстановке в него этого приближения. Но для исследования совместности интервальных уравнений, под которой понимается непустота того или иного множества решений, подобная конструкция не годится.

Для определения подходящей меры совместности для интервальных уравнений и систем уравнений нужно внимательнее посмотреть на характеристики точек из этих множеств решений.

Условия принадлежности точки различным множествам решений интервальной системы уравнений (5) могут быть сформулированы как условия на взаимное расположение в $\mathbb{R}^n$ области значений левой части системы уравнений, т.е. множества

$$F(X, \tilde{\beta}) := \left\{ \begin{pmatrix} f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ f(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} x_{ij} \in x_{ij}, \\ i=1, 2, \dots, n, \\ j=1, 2, \dots, m \end{array} \right. \right\} \quad (8)$$

и бруса правой части $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$. В частности, точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит объединенному множеству решений Ξ_{uni} тогда и только тогда, когда

$$F(X, \tilde{\beta}) \cap y \neq \emptyset. \quad (9)$$

Точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит допусковому множеству решений Ξ_{tol} тогда и только тогда, когда

$$F(X, \tilde{\beta}) \subseteq y. \quad (10)$$

Эти факты вытекают из определений объединенного и допускового множеств решений. Но для того, чтобы практически применять сформулированные выше признаки, нужен конструктивный способ нахождения области значений $F(X, \tilde{\beta})$.

Это непростая задача даже в одномерном случае, т.е. при оценивании областей значений отдельных компонент вектор-функции. Но в многомерной ситуации трудности возрастают за счет новых эффектов. Прежде всего, это несовпадение формы идеальной области значений с формой интервальных брусов, которыми мы ее оцениваем. В результате оценивание области значений интервальными методами, скорее всего, даст брус, который не будет равен точной области значений, но лишь содержит ее. Тогда, к примеру, проверка пересечения (9) становится проблематичной.

Сформулированное затруднение преодолевается в случае, когда область значений вектор-функции $F(X, \tilde{\beta})$ есть прямое декартово произведение областей значений отдельных компонент. Тогда область значений сама является интервальным брусом. Это условие выполнено для множества (8), если интервальные величины, получающиеся в результате различных измерений и входящие в разные компоненты вектор-функции, являются независимыми друг от друга (см. [4]). Обычно считается, что это условие выполнено для интервальных результатов измерений в разные моменты времени [1].

Обозначим посредством $f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ область зна-

чений отображения f при изменении первых m аргументов в пределах интервалов $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}$ соответственно, т.е. пусть

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) &= f(\mathbf{X}_i, \beta) = \\ &:= \left\{ f(\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) \mid \mathbf{x}_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2} \in \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{im} \in \mathbf{x}_{im} \right\}. \end{aligned}$$

Эта область значений может быть найдена точно или же оценена с помощью объемлющего интервала и методов интервального анализа. Для простоты мы предположим, что нам доступна точная интервальная оценка данного множества значений. Это в самом деле реализуется на практике для линейных и некоторых частных случаев нелинейных отображений. Тогда условиям (9) и (10) можно придать более конструктивный характер.

Именно: точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит объединенному множеству решений Ξ_{uni} тогда и только тогда, когда

$$\left(\begin{array}{c} f(\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ f(\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f(\mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}, \dots, \mathbf{x}_{nm}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \end{array} \right) \cap \left(\begin{array}{c} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{array} \right) \neq \emptyset.$$

Это утверждение является непосредственным обобщением критерия Бекка принадлежности объединенному множеству решений для интервальных линейных систем уравнений (см. [11]). Точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит допусковому множеству решений тогда и только тогда, когда

$$\left(\begin{array}{c} f(\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \dots, \mathbf{x}_{1m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ f(\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \dots, \mathbf{x}_{2m}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f(\mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}, \dots, \mathbf{x}_{nm}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l) \end{array} \right) \subseteq \left(\begin{array}{c} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{array} \right). \quad (11)$$

Для пересечения брусков и для включения одного бруса в другой, соответственно, можно ввести количественные меры, так что тогда совместность или несовместность интервальной системы уравнений будет охарактеризована количественно, т.е. числом. Фактически этот план был реализован в линейном случае в работах [6 – 9, 15], и его результатом являются так называемые распознающие функционалы множеств решений, специальные функции, с помощью которых можно дать количественную меру совместности или несовместности интервальных уравнений. В этой работе мы распространяем

разработанную ранее технику на общий нелинейный случай.

Ниже подробно рассматривается допусковое множество решений и связанная с ним сильная совместность интервальных данных и параметров функции, так как они обладают более благоприятными математическими свойствами и смысл сильной совместности лучше соответствует реальному процессу измерений с погрешностями для входов и выходов какого-то объекта. Рассмотрим поэтому отношение включения (11).

Пусть даны два интервала $a, b \subset \mathbb{R}$, причем $a \subseteq b$. Как можно количественно охарактеризовать «запас включения» интервала a в интервал b , т.е. то, «насколько сильно» a включен в b ? Один из возможных естественных способов сделать это состоит в следующем [10]. Начнем равномерно «раздувать» меньший интервал a относительно его середины на величину t , т.е. организуем семейство интервалов $a + [-t, t]$ для различных $t \in \mathbb{R}$, и отследим момент, когда включение получающегося интервала в b нарушится. Чем больше нужно будет взять значение t для нарушения включения $a + [-t, t] \subseteq b$, тем большим является резерв (запас) включения интервала a в интервал b . В многомерном случае, если a и b – интервальные векторы, эту конструкцию можно применить покомпонентно. На сформулированных идеях основывается следующее соображение.

Определение 3. Для интервальных n -векторов a, b резервом интервального включения $a \subseteq b$ (или же просто резервом) мы называем наибольшее вещественное число Rsv , такое что $a + [-Rsv, Rsv] \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \subseteq b$.

Это определение имеет смысл также при отрицательном Rsv , если все арифметические операции и отношения рассматриваются в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$ (см. детали в [11]). Если $Rsv < 0$, то $[-Rsv, Rsv]$ – это неправильный интервал из $\mathbb{KR}$, и абсолютное значение резерва показывает, насколько сильно в отношении $a \subseteq b$ левая часть далека от включения в правую. В целом смысл понятия резерва вполне очевиден из его определения: если рассматриваемое включение истинно, то его «резерв» – это наибольший радиус интервала, на который можно «раздуть» левую часть включения (или сузить правую), чтобы оно еще оставалось истинным. Если же рассматриваемое включение неверно, то мы всегда можем добиться его выполнения, сужая левую часть, хотя для этого может понадобиться перейти к неправильным интервалам. В этом случае резерв превращается в «дефицит включения» и показывает, насколько нужно сузить левую часть, чтобы она стала включаться в правую.

Выведем аналитическое представление для резерва Rsv . Если a и b –

одномерные интервалы, для которых $\underline{a} \subseteq \underline{b}$, то $\underline{a} \geq \underline{b}$ и $\bar{b} \geq \bar{a}$, то

$$\text{Rsv} = \min \{ \underline{a} - \underline{b}, \bar{b} - \bar{a} \}. \quad (12)$$

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – интервальные n -векторы, для которых $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$, то

$$\text{Rsv} = \min_{1 \leq i \leq n} \min \{ \underline{a}_i - \underline{b}_i, \bar{b}_i - \bar{a}_i \}. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) не очень удобны для исследования, поскольку дают представление для резерва через концы интервалов, тогда как в определении резерва раздутие интервала $\mathbf{a}$ выполняется симметрично относительно его середины. Как следствие, желательно иметь альтернативное представление резерва через середины и радиусы интервалов.

Имеем:

$$\begin{aligned} \min \{ \underline{a} - \underline{b}, \bar{b} - \bar{a} \} &= \min \{ \underline{a} - \text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b}, \text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b} - \bar{a} \} = \\ &= \text{rad } \mathbf{b} + \min \{ \underline{a} - \text{mid } \mathbf{b}, \text{mid } \mathbf{b} - \bar{a} \} = \\ &= \text{rad } \mathbf{b} - \max \{ \text{mid } \mathbf{b} - \underline{a}, \bar{a} - \text{mid } \mathbf{b} \} = \\ &= \text{rad } \mathbf{b} - |\mathbf{a} - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{b} - |\text{mid } \mathbf{b} - \mathbf{a}|, \end{aligned}$$

где использовано представление модуля интервала в виде $|\mathbf{a}| = \max \{ -\underline{a}, \bar{a} \}$ (см. [11]). Соответственно, для многомерного случая вместо (13) получаем следующее выражение для резерва включения:

$$\text{Rsv} = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \text{rad } \mathbf{b}_i - |\text{mid } \mathbf{b}_i - \mathbf{a}| \}.$$

Отталкиваясь от полученного соотношения, можем переписать критерий (10) принадлежности точки допусковому множеству решений в аналитическом виде. Точка $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_l)^\top$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной системы уравнений (5) тогда и только тогда, когда

$$\text{Rsv} = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \text{rad } \mathbf{y}_i - |\text{mid } \mathbf{y}_i - f(\mathbf{X}_i, \tilde{\beta})| \} \geq 0.$$

С другой стороны, даже отрицательные значения выражения в левой части имеют смысл, так как они показывают «дефицит совместности» системы в точке $\hat{\beta}$.

В силу сказанного будет удобно ввести специальную функцию

$$\text{Tol}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \text{rad } \mathbf{y}_i - |\text{mid } \mathbf{y}_i - f(\mathbf{X}_i, \beta)| \}, \quad (14)$$

которая знаком и величиной своих значений показывает совместность или несовместность точки $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ с данными задачи восстановления зависимости и дает количественную меру этой совместности. Будем называть отображение $\text{Tol}: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемое посредством (14),

распознающим функционалом допускового множества решений Ξ_{tol} интервальной системы уравнений (5). Он обладает следующим основным свойством:

$$\text{Tol}(\beta, X, y) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \in \Xi_{tol}.$$

Отметим, что описанные конструкции ранее были развиты для линейного случая, когда восстанавливаемая функция имеет вид (3). Распознающий функционал выглядит тогда следующим образом (см. [8, 15]):

$$\text{Tol}(\beta, X, y) = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{rad } y_i - \left| \text{mid } y_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} \beta_j \right| \right\},$$

т.е. является частным случаем функционала (14).

Метод максимума совместности

Метод максимума совместности – это метод нахождения оценок параметров функциональной зависимости по интервальным данным, основанный на отыскании точки, дающей наибольшую совместность интервальной системы уравнений, которая возникает в задаче. Он опирается на нахождение безусловного максимума (на всем пространстве $\mathbb{R}^l$) распознающего функционала соответствующего множества решений интервальной системы.

Опираясь на вид восстанавливаемой функциональной зависимости (1) и интервальные данные (4), организуем интервальную систему уравнений (5), т.е.

$$\begin{cases} f(X_i, \beta) = y_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

где $X = (x_{ij}) - n \times m$ – матрица интервалов независимых переменных; y_i – интервалы значений функции; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ – вектор параметров функции (1). Построим распознающий функционал $\text{Tol}(\beta, X, y)$ вида (14) для допускового множества решений этой интервальной системы уравнений. Решая задачу безусловной максимизации по $\hat{\beta}$ распознающего функционала, естественно приходим к методу оценивания параметров, который будем называть *методом максимума совместности*:

Оценкой параметров восстанавливаемой функции берем точку $\hat{\beta} = \arg \max \text{Tol}$, в которой достигается максимум распознающего функционала $\text{Tol}(\beta, X, y)$.

В силу теории предшествующего раздела найденная точка $\hat{\beta}$ в самом

деле доставляет максимум совместности системе уравнений (5). Более точно:

если $\max \text{Tol} \geq 0$, то точка $\hat{\beta}$ лежит в непустом множестве параметров, сильно совместных с данными;

если $\max \text{Tol} < 0$, то множество параметров, сильно совместных с данными, пусто, но в $\hat{\beta}$ минимизируется «несовместность» параметров и данных.

Распознающий функционал Tol – это негладкая функция, так как в выражении для него присутствуют негладкие операции взятия модуля и максимума. Тем не менее для ряда важных частных случаев математические свойства распознающего функционала хороши и позволяют применять для нахождения его максимума развитые методы негладкой оптимизации. Если восстанавливаемая функция f – линейная, то распознающий функционал является вогнутым [11]. Если функция f – дробно-линейная, то распознающий функционал – квазивогнутый. В обоих случаях для максимизация распознающего функционала созданы эффективные алгоритмы и свободное программное обеспечение.

Что произойдет с методом максимума совместности, если интервальные неопределенности в данных исчезнут и эти данные превратятся в обычные точечные, X и y ? Тогда все $\text{rad } y_i = 0$, а $\text{mid } y_i = y_i$. Соответственно распознающий функционал Tol вместо (14) будет иметь вид

$$\text{Tol}(\beta, X, y) = -\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - f(X_i, \beta)| = -\|y_i - f(X_i, \beta)\|_{\infty},$$

т.е. станет равным взятой с противоположным знаком чебышевской норме (равномерной или ∞ -норме) невязки системы (5) на векторе β . Максимизация такого функционала Tol равносильна минимизации чебышевской нормы невязки, и метод максимума совместности превращается в чебышевское сглаживание экспериментальных данных, давно и успешно используемое на практике [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью. Рукопись книги. – Новосибирск, 2022. URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/ApplBooks/InteDataProcessing.pdf> (дата обращения: 02.07.2022).
2. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – Москва-Ижевск: Изд-во «РХД», 2007.
3. Интервальный анализ и его приложения. – Тематический веб-сайт. URL: <http://www.nsc.ru/interval/> (дата обращения: 02.07.2022).
4. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и

- обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701-709.
5. Рemez Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наукова думка, 1969.
 6. Шарый С. П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №2. – С. 111-125.
 7. Шарый С. П., Шарая И. А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 80-109.
 8. Шарый С. П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределенности данных // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, №2. – С. 150-172.
 9. Шарый С.П. Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределенностью // Известия Академии наук. Теория и системы управления. – 2017. – № 6. – С. 3-19.
 10. Шарая И.А., Шарый С.П. Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений // Вычислительные технологии. – 2021. – Т. 26, №3. – С. 61-85.
 11. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. – XYZ: Новосибирск, 2022. URL: <http://www.nsc.ru/interval/?page=Library/InteBooks> (дата обращения: 02.07.2022).
 12. Kearfott R. B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S. P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, №1. – С. 7-13.
 13. Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J. Introduction to Interval Analysis. – Philadelphia: SIAM, 2009. – xi+223 p.
 14. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., eds. Bounding Approaches to System Identification. – New York: Plenum Press, 1996.
 15. Shary S.P. Weak and strong compatibility in data fitting problems under interval uncertainty // Advances in Data Science and Adaptive Analysis. – 2020. – Vol. 12, No. 1. – 2050002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Нурминским.

E-mail:

Шарый Сергей Петрович – shary@ict.nsc.ru.