АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР (г. Красноярск)

ВЦ

Препринт № 5

ШАЙДУРОВ В. В., ШАРЫЙ С. П.

РЕШЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ДОПУСКАХ

г. Красноярск 1988 г.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Вычислительный центр

Шайдуров В.В., Шарый С.П.

РЕШЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ДОПУСКАХ

Препринт № 5

Красноярск - 1988

УДК 519.6

Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. Препринт ВЦ СО АН СССР № 5, Красноярск, 1987, 27 стр., 4 рис., 7 библ.

При изучении систем линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами в понятие интервального решения может вкладываться различный смысл. В работе проводится сопоставление трех разных постановок. Наиболее распространено понятие интервального решения как множества, охватывающего совокупность решений обычных числовых линейных алгебраических систем со всевозможными допустимыми комбинациями элементов матрицы и правой части. В задаче о допусках ищется интервальное решение, элементы которого после умножения на интервальную матрицу лежат в пределах, определяемых правой частью. И, наконец, представляет интерес формальное решение интервальной системы, т.е. нахождение интервального вектора, произведение которого на интервальную матрицу дает вектор правой части.

В работе на примерах показаны элементы различия и сходства. Приведены два алгоритма решения задачи о допусках. Первый из них довольно прост и экономичен, но не дает оптимального результата. Имеется оценка его точности. Второй алгоритм дает лучшие результаты, но более сложен. Для повышения его эффективности используется алгоритм обхода соседних вершин n-мерного прямоугольника. Рассмотрены численные эксперименты.

Рецензент - Б.С.Добронец
Ответственный за выпуск - С.П.Шарый

Введение

При изучении систем линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами в понятие интервального решения может вкладываться различный смысл. Это приводит не только к разным ответам, но и к разным методам их отыскания. Наиболее распространено понятие интервального решения как множества, охватывающего решения обычных числовых линейных алгебраических систем со всевозможными допустимыми комбинациями элементов матрицы и правой части. Достаточно полно такая постановка задачи и методы ее решения обсуждаются в монографиях [I] и [2], содержащих также хорошую библиографию. В ряде случаев (особенно в экономических и конструкторских расчетах) возникает так называемая задача о допусках [3]. В ней ищется интервальное решение, элементы которого после умножения на интервальную матрицу лежат в пределах, определяемых правой частью. И, наконец, представляет интерес формальное решение интервальной системы, т.е. нахождение интервального вектора, произведение которого на интервальную матрицу (по правилам интервальной арифметики) дает вектор правой части.

В настоящей работе после введения обозначений в § I мы проведем в § 2 сопоставление всех трех постановок и на простых примерах покажем их различие и элементы сходства (особенно второй и третьей постановок). В § 3 приводится простейший алгоритм решения задачи о допусках, который, как показано далее, дает такие же результаты, что и описанный в [3]. Трудоемкость выполнения этих алгоритмов невелика, но предоставляемые ими допуски могут быть недостаточно широкими. § 4 посвящен изложению более сложного алгоритма, требующего для своей реализации значительных вычислительных затрат, но дающего более широкие допуски. Это подтверждается численными примерами в § 5. Приведена также оценка отклонения решений, даваемых алгоритмами § 3 и § 4 при небольшой ширине элементов интервальной матрицы.

§ I. Основные обозначения

Как обычно, через R^n обозначим n-мерное вещественное арифметическое пространство. Введем также пространство IR -

– множество всех замкнутых отрезков вещественной оси $\mathbb{R}$. При этом элементы $a^I = [\alpha\,;\ \beta]$ из $\mathbb{IR}$ в связи с традициями будем называть интервалами. Положим

$$\underline{a}^I = \alpha \quad , \qquad \bar{a}^I = \beta$$

и введем середину и ширину интервала по формулам

$$m(a^I) = (\alpha + \beta)/2 \ , \quad \omega(a^I) = \beta - \alpha \ .$$

Символом $\mathbb{IR}^n$ обозначим множество n-мерных интервальных векторов. И, наконец, для любого подмножества S из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{IR}$ под $\mathcal{M}_{mn}(S)$ будем иметь в виду множество $m \times n$ матриц с элементами из S.

Для интервального вектора $a^I \in \mathbb{IR}^n$ средним значением будем называть вектор $m(a^I) \in \mathbb{R}^n$ с элементами $m(a^I)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для интервальной $m \times n$ матрицы $A^I = (a^I_{ij})$ среднее значение будет вещественной матрицей $m(A^I)$ той же структуры с элементами $m(a^I_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично п о к о м п о н е н т н ы м образом определяются ширина $\omega(a^I)$ и абсолютное значение $|a^I|$ интервального вектора a^I (или интервальной матрицы, соответственно).

§ 2. Постановка задач

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = b \tag{I}$$

с матрицей $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ и правой частью $b \in \mathbb{R}^n$

Предположим, что нам известны не точные значения A, b, а пределы возможных изменений их элементов – отрезки $[\underline{a}_{ij}\,;\ \bar{a}_{ij}]$ и $[\underline{b}_i\,;\ \bar{b}_i]$ соответственно. Таким образом, заданы интервальная матрица $A^I \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{IR})$ и интервальный вектор $b^I \in \mathbb{IR}^n$ такие, что $A \in A^I$ и $b \in b^I$. В этой ситуации возникает несколько задач, естественно обобщающих задачу (I). Мы остановимся на наиболее содержательных постановках

З а д а ч а А. Найти множество

$$X^* = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in A^I)(\exists b \in b^I)(Ax = b) \}, \qquad (2)$$

состоящее из решений линейных систем $Ax = b$, когда матрица A и правая часть b независимо пробегают A^I и b^I соответственно.

Обычно X^* называют **о б ъ е д и н е н н ы м м н о ж е с т в о м р е ш е н и й** (ОМР) интервальной системы $A^I x = b^I$. Оно может иметь непростое строение. На рис.I, заимствованном из [4], изображено объединенное множество решений для случая

$$A^I = \begin{pmatrix} [2;\ 4] & [-2;\ 1] \\ [-1;\ 2] & [2;\ 4] \end{pmatrix}, \quad b^I = \begin{pmatrix} [-2;\ 2] \\ [-2;\ 2] \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

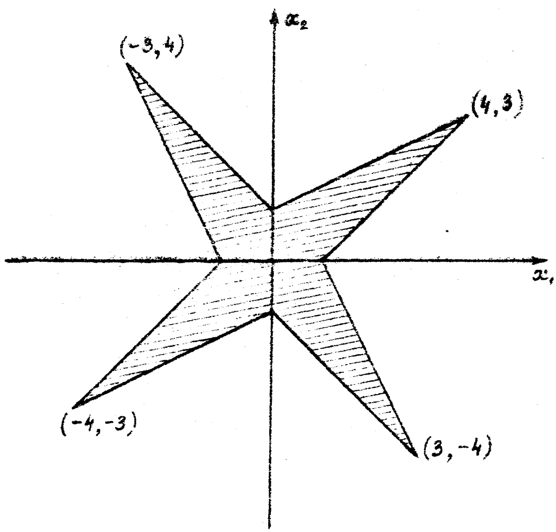

Рис. I. Объединенное множество решений X^*.

В большинстве случаев точное описание таких множеств нецелесообразно, особенно при больших размерностях задачи. Обычно ограничиваются задачей отыскания такого интервального вектора что

$$X^* \subseteq v^I . \tag{4}$$

Далее такая задача интервального анализа будет называться Линейной задачей о разбросе решений (ЛЗРР).

Если интервальная матрица A^I такова, что все вещественные $A \in A^I$ невырождены, то

$$X^* = \{A^{-1}b \mid A \in A^I,\ b \in b^I\}$$

– непустое ограниченное связное множество в R^n. Другие полезные свойства X^* можно найти, в частности, в [5].

Ясно, что более предпочтительным с практической точки зрения решением ЛЗРР является интервальный вектор v^I с более узкими интервальными компонентами. Если компоненты v^I имеют при этом наименьшую возможную ширину – совпадают с проекциями X^* на оси координат,– то v^I называют оптимальным интервальным решением соответствующей ЛЗРР. Например, для ЛЗРР с A^I, b^I из (3) оптимальное интервальное решение равно, как легко видеть из рис.I, $([-4;\ 4],\ [-4;\ 4])^T$.

З а д а ч а В Найти множество

$$X_* = \{x \in R^n \mid (\forall A \in A^I)(\exists b \in b^I)(Ax = b)\}, \tag{5}$$

состоящее из векторов x, для которых при любой матрице $A \in A^I$ произведение Ax попадает в интервал правых частей b^I.

Множество X_* – наибольшее (по включению) из множеств $\tilde{X} \subseteq R^n$, обладающих свойством

$$\{Ax \mid A \in A^I,\ x \in \tilde{X}\} \subseteq b^I .$$

Мы будем называть его о б л а с т ь ю д о п у с т и м ы х з н а ч е н и й (ОДЗ) вектора x. На рис.2 X_* приведено для данных (3).

Отметим также, что принадлежность вектора x области до-

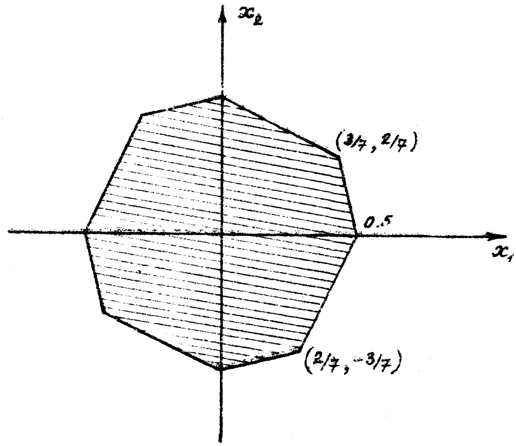

Рис. 2. Область допустимых значений X_* .

пустимых значений X_* равносильна включению

$$A^I x \subseteq b^I ,$$

поскольку интервальные матричные операции обладают следующим свойством: $\{Ax \mid A \in A^I\} = A^I x$ [2] .

Может показаться, что достигается равенство

$$\{Ax \mid A \in A^I, x \in X_*\} = b^I .$$

Это не всегда так, что видно из одномерного примера с интервалами $A^I = [-1; 1]$, $b^I = [0; 1]$. Ясно, что здесь $0 \in X_*$. Других элементов в X_* нет, иначе, умножая $t \neq 0$ на $-\operatorname{sign} t \in [-1; 1]$, получили бы отрицательное число $-|t| \notin [0;1]$. Таким образом,

$$0 = \{Ax \mid A \in [-1;1], x \in X_*\} \neq [0;1] .$$

В свою очередь, из существования множества $\tilde{X} \subseteq R^n$,удовлетворяющего свойству

$$\{Ax \mid A \in A^I, x \in \tilde{X}\} = b^I ,$$

не следует, что $\tilde{X} = X_*$. Для иллюстрации рассмотрим одномерный пример с интервалами $A^I = b^I = [-1; 1]$. Решением задачи В является множество $X_* = [-1; 1]$. Но для любого $\varepsilon \in (-1; 1)$ интервалы вида $[\varepsilon; 1]$ или $[-1; \varepsilon]$ удовлетворяют соотношению

$$\{Ax \mid A \in A^I,\ x \in \tilde{X}\} = [-1; 1]$$

Из приведенных рассуждений видно, что формальное решение задачи определения интервального вектора x^I, удовлетворяющего равенству (в интервальной арифметике)

$$A^I x^I = b^I ,$$

в первом примере не имеет решения, а во втором - имеет их бесконечно много. Задача В в обоих случаях однозначно разрешима.

Снова с целью упрощения описания множества X_* рассмотрим интервальный вариант задачи В по отысканию интервального вектора $u^I \in IR^n$ такого, что

$$u^I \subseteq X_* \quad . \tag{6}$$

В дальнейшем мы будем называть его *линейной задачей о допусках* (ЛЗД).

Постановка ЛЗД не является новой, ее обсуждение можно найти, например, в [3], там же имеется история вопроса и краткая библиография.

Рассмотрим строение множества X_* и выясним, насколько содержательным является вписывание в X_* интервальных векторов.

Лемма 1. Если в ЛЗД $X_* \neq \varnothing$, то X_* - многогранное множество (т.е. пересечение конечного числа замкнутых полупространств).

Доказательство. Сначала покажем выпуклость X_*. Пусть $x, y \in X_*$, тогда $A^I x \subseteq b^I$ и $A^I y \subseteq b^I$. Поэтому для любого $\lambda \in [0; 1]$ имеем

$$A^I(\lambda x + (1-\lambda)y) \subseteq \lambda A^I x + (1-\lambda)A^I y \subseteq b^I ,$$

что и означает выпуклость.

Теперь докажем, что пересечение X_* с каждым координатным углом в R^n является многогранным множеством. Для этого зафиксируем знаки компонент вектора $x' \in R^n$ в соответствии с принадлежностью определенному координатному углу. С учетом этих знаков условие $A^I x' \subseteq b^I$ записывается в виде системы $3n$ неравенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \check{a}_{ij} x'_j \geqslant \underline{b}_i^I, \\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x'_j \leqslant \bar{b}_i^I, \\ x' \text{ находится в фиксированном координатном углу } R^n. \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

Здесь $\check{a}_{ij} = \begin{cases} \bar{a}_{ij}^I, & \text{если } x'_j \leqslant 0, \\ \underline{a}_{ij}^I, & \text{если } x'_j \geqslant 0, \end{cases}$ $\hat{a}_{ij} = \begin{cases} \underline{a}_{ij}^I, & \text{если } x'_j \leqslant 0, \\ \bar{a}_{ij}^I, & \text{если } x'_j \geqslant 0 \end{cases}$

Ясно, что множество, задаваемое условиями (7) – многогранное. Объединяя все части X_*, расположенные в разных координатных углах, приходим к утверждению леммы.

То, что X_* может быть и неограниченным, демонстрирует пример ЛЗД со следующими данными:

$$A^I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b^I = \begin{pmatrix} [0;\ 1] \\ [0;\ 1] \end{pmatrix}.$$

Здесь X_* – это множество векторов из R^2, первая координата которых произвольна, а вторая заключена в $[0;\ 1]$.

Но если хотя бы одна вещественная матрица $A_0 \in A^I$ является невырожденной, то X_* – ограниченное множество, поскольку $X_* \subseteq \{A_0^{-1} b \mid^* b \in b^I\}$.

В этом случае процесс решения ЛЗД имеет наглядную геометрическую интерпретацию – вписывание прямоугольного параллелепипеда в выпуклый многогранник X_*.

Л е м м а 2. Если множество невырожденных вещественных матриц плотно в A^I, то имеет место представление

$$X_* = \bigcap_{\substack{A \in A^I \\ \det A \neq 0}} \{A^{-1} b \mid b \in b\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим правую часть этого равенства через Ω. Включение $X_* \subseteq \Omega$ очевидно. Покажем, что $\Omega \subseteq X_*$. По условию леммы для любой вещественной матрицы $A \in A^I$ существует последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $A_k \in A^I$, $\det A_k \neq 0$ и $A = \lim_{k\to\infty} A_k$. Если $x \in \Omega$, то все произведения $A_k x$ попадают в b^I, поэтому $Ax = (\lim A_k)\cdot x = \lim(A_k x) \in b^I$ для любой $A \in A^I$. Следовательно, $x \in X_*$ и лемма доказана.

Из нее, в частности, следует, что

$$X_* = \bigcap_{A\in A^I} \{A^{-1}b \mid b \in b^I\}$$

если все $A \in A^I$ невырождены.

Часто в приложениях постановка линейной задачи о допусках является более жесткой, чем (6). Например, задается отношение допусков отдельных компонент с помощью вещественного вектора $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i > 0$ так, что $\omega(u_i^I)/\omega(u_j^I) = d_i/d_j$. Подобные случаи легко свести к одному стандартному, когда $d = (1, 1, \ldots)$ и нам требуется вписать куб в соответствующим образом модифицированное множество X_*. В самом деле, введем матрицы $D = diag\{d_1, d_2, \ldots\}$ и $\tilde{A}^I = A^I D$. Пусть $\tilde{u}^I \in IR^n$ с $\omega(u_i^I) = const$ - решение ЛЗД с интервальной матрицей $\tilde{A}^I$ и правой частью b^I. Тогда $u^I = D\tilde{u}^I$ - решение исходной задачи, поскольку

$$\{Ax \mid A \in A^I, x \in u^I\} = \{ADD^{-1}x \mid A \in A^I, x \in u^I\} =$$
$$= \{\tilde{A}\tilde{x} \mid A \in \tilde{A}^I, \tilde{x} \in \tilde{u}^I\} \subseteq b^I,$$
$$\omega(u_i^I)/\omega(u_j^I) = d_i/d_j.$$

Поэтому далее линейной задачей о допусках мы будем называть задачу отыскания интервального вектора $u^I \in IR^n$ с компонентами одинаковой ширины такого, что

$$\{Ax \mid A \in A^I, x \in u^I\} \subseteq b^I.$$

Для сравнения отметим, что число "степеней свободы" в ЛЗД почти вдвое меньше, чем в ЛЗРР: в ЛЗРР $2n$ неизвестных левых и правых границ компонент вектора v^I, а в ЛЗД можно ограничиться $(n+1)$-й степенью свободы, взяв середину u^I и общую ширину всех компонент вектора u^I. Поэтому решение ЛЗД обычно проще, чем решение ЛЗРР.

В отличие от ЛЗРР линейная задача о допусках может не иметь решений даже при невырожденности всех $A \in A^I$: если интервальная матрица A^I "достаточно широка", а интервальный вектор правых частей b^I "узок", то может случиться, что $X_* = \varnothing$. Простейший пример неразрешимости ЛЗД доставляют одномерные данные $A^I = [1;\ 2]$, $b^I = [2;\ 3]$. Действительно, на основании (7) X_* является объединением двух множеств: $\{x \in R \mid (x \geq 2) \,\&\, (2x \leq 3) \,\&\, (x \geq 0)\}$ и $\{x \in R \mid (2x \geq 2) \,\&\, (x \leq 3) \,\&\, (x \leq 0)\}$. Но они оба пусты.

Выясним, как связаны между собой решения ЛЗРР и ЛЗД. В случае $X_* \neq \varnothing$ очевидно включение

$$X_* = \{x \in R^n \mid (\forall A \in A^I)(\exists b \in b^I)(Ax = b)\} \subseteq$$

$$\subseteq \{x \in R^n \mid (\exists A \in A^I)(\exists b \in b^I)(Ax = b)\} = X^*.$$

Поэтому если интервальные векторы u^I, v^I являются решениями ЛЗД и ЛЗРР, соответственно, то

$$u^I \subseteq X_* \subseteq X^* \subseteq v^I.$$

Это остается верным и для $X_* = \varnothing$, если считать в такой ситуации решением ЛЗД пустое множество. Таким образом, любое решение задачи о допусках содержится в любом решении задачи о разбросе решений. Сопоставляя масштабы на рис. I и 2, видим, что множества X^* и X_* могут различаться очень сильно.

Помимо рассмотренных постановок задач встречаются и более простые их модификации. Например, при отсутствии в системе (I) ошибок у матрицы A или вектора b происходит их вещественное вырождение. Иногда для задачи о разбросе решений большой размерности требуется найти границы только одной определенной компоненты или линейной комбинации вида $\sum_i p_i x_i$ для $p_i \in \mathbb{R}$.

Мы рассмотрим далее некоторые методы решения упрощенных модификаций, отличающиеся от методов решений полных задач.

§ 3. Простейшие алгоритмы решения ЛЗД

Сначала рассмотрим упрощенный вариант линейной задачи о допусках, когда в (5) матрица A^I вырождается в вещественную матрицу A. Отметим, что в этом случае решение задачи всегда непусто. Затем мы опишем простой достаточный критерий разрешимости исходной линейной задачи о допусках и проведем обобщение численного алгоритма решения со случая вещественной матрицы A на интервальную матрицу A^I.

Итак, сначала рассмотрим упрощенный вариант.

Упрощенная ЛЗД. Найти интервальный вектор $u^I \in I\mathbb{R}^n$ с компонентами одинаковой максимальной ширины и такой, что

$$A u^I \subseteq b^I.$$

Пусть матрица A для определенности невырождена, так что для нее существует обратная матрица A^{-1}. Ей соответствует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, за которым мы сохраним обозначение A^{-1}. С теоретико-множественной точки зрения вектор b^I - это прямоугольный параллелепипед $\Pi = b_1^I \times b_2^I \times \ldots \times b_n^I$, отображением A^{-1} он переводится в область допустимых значений вектора x (см.рис.3).

Поскольку при линейном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные прямые, то область допустимых значений X_* будет n-мерным параллелепипедом. Обе фигуры имеют центральную симметрию с центром на пересечении n главных диагоналей. Опять-таки из линейности A^{-1} следует, что диагональ в Π соответствует диагонали в X_*, и поэтому центр Π отображается в центр X_*.

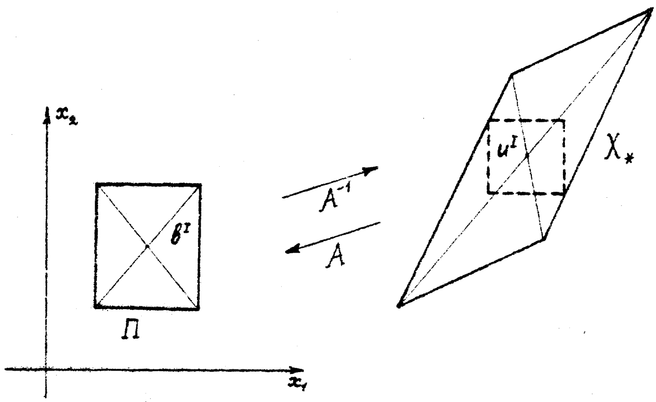

Рис. 3. Преобразование области допустимых значений

Центр $П$ совпадает с вектором $m(b^I)$, а центр X_* обозначим через $m(X_*)$. Тогда

$$A \cdot m(X_*) = m(b^I).$$

Построим теперь интервальный вектор u^I с центром

$$m(u^I) = m(X_*)$$

и компонентами ширины $2h$, т.е. некоторый кубик в $\mathbb{R}^n$ с длиной ребра $2h$. При этом произвольный элемент $u \in u^I$ представим в виде

$u = m(u^I) + \varepsilon = m(X_*) + \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $\max\limits_i |\varepsilon_i| \le h/2$.

Отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - взаимно-однозначное, следовательно, включение $u^I \subseteq X_*$ имеет место тогда и только тогда, когда $\{Au \mid u \in u^I\} \subseteq \{Ax \mid x \in X_*\} = b^I$, а это равносильно покомпонентному выполнению неравенства

$$m(b^I) - \frac{1}{2}\omega(b^I) \le A \cdot (m(u^I) + \varepsilon) \le m(b^I) + \frac{1}{2}\omega(b^I).$$

Отсюда, учитывая равенство

$$A \cdot m(u^I) = A \cdot m(X_*) = m(b^I),$$

получим

$$|A\varepsilon| \le \frac{1}{2}\,\omega(b^I). \tag{8}$$

Поскольку

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||\varepsilon_j| \le \max_j|\varepsilon_j|\cdot\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \tag{9}$$

то соотношение (8) будет справедливым для любого h такого, что

$$h\cdot\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \le \frac{1}{2}\,\omega(b_i^I) \quad \text{для} \quad i=1,\dots,n.$$

С другой стороны, это значение h нельзя улучшить из-за равенства в (9) при $\varepsilon_j = h\cdot \operatorname{sign} a_{ij}$.

Отсюда вытекает следующий алгоритм решения упрощенной ЛЗД.

А л г о р и т м I. Найдем вектор u как решение системы

$$Au = m(b^I). \tag{10}$$

Затем определим параметр

$$h = \frac{1}{2}\min_{1\le i\le n}\Big\{\omega(b^I)\Big/\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big\}. \tag{11}$$

Тогда интервальный вектор u^I с компонентами

$$u_i^I = [u_i - h\,;\,u_i + h] \tag{12}$$

является решением упрощенной ЛЗД.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда в качестве центра куба берется $\tilde{u}\in\mathbb{R}^n$, не совпадающий с u. Она возникает, например, при численном решении системы (10) на ЭВМ из-за ошибок округления. При плохообусловленной матрице A отклонение $\tilde{u}$ от u бывает весьма значительным.

Численный анализ показывает, что для наиболее распространенных методов решения вектор $\tilde{u}$ сильно смещается только вдоль тех диагоналей, длина которых также весьма значительна из-за плохой обусловленности матрицы A (см.рис.4).

Тем не менее, необходимо проверить, лежит ли $\tilde{u}$ в параллелепипеде X_*. Для этого достаточно выяснить, попадает ли

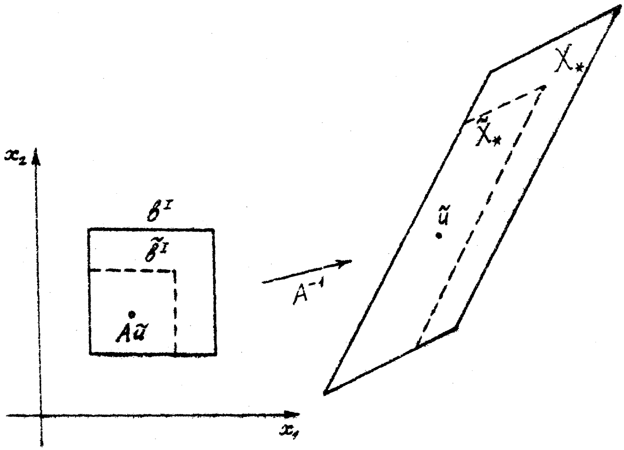

Рис. 4. Смещение центра в плохообусловленной задаче

$A\tilde{u}$ в b^I (см.рис.4). Если $A\tilde{u} \notin b^I$, то надо более тщательно повторить решение системы (10).

Найдем интервальный вектор (прямоугольный параллелепипед) $\tilde{b}^I$ с центром в $A\tilde{u}$, вписанный в b^I. Решая упрощенную ЛЗД с вектором правых частей $\tilde{b}^I$, мы получаем решение некоторой новой модификации ЛЗД о поиске интервального вектора $\tilde{u}^I \in I\mathbb{R}^n$ с фиксированным центром $\tilde{u}$, компонентами одинаковой максимальной ширины и такого, что $A\,\tilde{u}^I \subseteq b^I$. Докажем это.

Действительно, включение $A\tilde{u}^I \subseteq b^I$ следует из условий $A\tilde{u}^I \subseteq \tilde{b}^I$ и $\tilde{b}^I \subseteq b^I$. Кроме того, из непрерывности отображения A^{-1} и построения $\tilde{b}^I$ вытекает, что одна из двух любых параллельных граней параллелепипеда $\tilde{X}_*$, являющегося прообразом $\tilde{b}^I$, будет частью грани параллелепипеда X_* (см.рис.4). Поэтому касание кубика $\tilde{u}^I$ двух противоположных граней $\tilde{X}_*$ означает касание им одной из граней X_*, так что размеры кубика действительно нельзя увеличивать ни в $\tilde{X}_*$, ни в X_*.

Отметим, что ширина компонент вектора $\tilde{b}^I$ уменьшается при смещении центра

$$\omega(\tilde{b}^I) = \omega(b^I) - 2\,|\,m(b^I) - m(\tilde{b}^I)\,|. \qquad (13)$$

Кроме того, при заранее выбранном центре $\tilde{u} \in X_*$ параметр h

определяется однозначно даже для вырожденной матрицы $A \neq O$, как это можно увидеть из (II).

И, наконец, рассмотрим линейную задачу о допусках с интервальной матрицей A^I. Сначала найдем центр будущего кубика u^I. Для этого решим вещественную систему

$$m(A^I)\cdot u = m(b^I) . \tag{I4}$$

Если матрица $m(A^I)$ оказалась вырожденной или близка к вырожденной, необходимо подправить элементы $m(A^I)$ в пределах A^I, чтобы новая матрица $\tilde{A}$ была невырожденной, и после этого решить систему

$$\tilde{A} u = m(b^I) .$$

В пользу такого выбора центра u^I говорит теорема Лагранжа о среднем, согласно которой решение системы (I4) будет лежать в X_*, по крайней мере для достаточно малых вариаций элементов a_{ij}, или, что то же самое, при малой ширине компонент a_{ij}^I. Полезно все же убедиться, что u принадлежит области допустимых значений X_* задачи о допусках, проверив для этого справедливость соотношения

$$A^I u \subseteq b^I . \tag{I5}$$

Таким образом, (I5) является простым достаточным условием разрешимости ЛЗД.

При нарушении (I5) $u \notin X_*$. Это еще не означает, что $X_* = \emptyset$. Ситуация $u \notin X_* \neq \emptyset$ невозможна, если только компоненты интервальной матрицы A^I "достаточно узки". В случае большой ширины компонент A^I изложенные рекомендации по выбору центра куба u^I могут давать неудовлетворительный ответ при непустом множестве X_*. Важность выбора центра и возникающие при этом ситуации иллюстрируются в § 5. Отметим, что выбор центра интервального решения ЛЗД в общем случае представляет из себя непростую задачу, рассмотрение которой выходит за рамки настоящей работы.

После этого рассмотрим интервальные решения упрощенных

ЛЗД с этим фиксированным центром для каждой матрицы $A \in A^I$ и возьмем h в (I2) минимальным из всех полученных. Тогда на основании (II) и (I3) имеем

$$h = \min_{A \in A^I} \min_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{\frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \right\}.$$

В этом выражении можно переставить взятие минимумов по A и по i. В результате возникает вопрос о конструктивном вычислении величин

$$r_i = \min \left\{ \frac{\frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \right\}, \quad (I6)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Наиболее простой способ заключается в построении естественного интервального расширения для выражения в фигурных скобках: пусть

$$r_i^I = \frac{\frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^I u_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^I|} \quad (I7)$$

Тогда $r_i \geq \underline{r}_i^I$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, $h \geq \underline{h} = \min \underline{r}_i^I$ и интервальный вектор u^I с компонентами $[u_i - \underline{h};\ u_i + \underline{h}] = u_i^I$ будет решением ЛЗД.

Посмотрим, насколько $\underline{h}$ может отличаться от оптимального h . Пусть δ таково, что

$$1 - \frac{\min \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{\max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \le \delta \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (18)$$

Заменяя тогда в (16) знаменатель в фигурных скобках на величину $\left(\max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$, придем к выражению, содержащему по одному вхождению каждой переменной в первой степени. Известно [2], что область значений таких выражений совпадает с их естественным интервальным расширением. Поэтому из (18) можем заключить, что

$$(1 - \delta)\, r_i \le \underline{r}_i^{I} ,$$

откуда, взяв минимум по $i = 1, 2, \dots$, получаем

$$h - \underline{h} \le \delta h . \qquad (19)$$

Таким образом, при относительном изменении величины $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, равном δ , относительная погрешность для $\underline{h}$ также не превышает δ . Поэтому при малой ширине элементов матрицы A^I указанный метод вычисления h дает вполне удовлетворительные результаты.

А.Ноймайером в [3] предложен простой метод решения линейной задачи о допусках, который применительно к нашим рассмотрениям выглядит следующим образом.

Пусть $u \in R^n$ - внутренняя точка X_* (существование которой предполагается априори), $e^I = ([-1, 1], [-1, 1], \dots)^T$, а знак "$\dot{-}$" означает поконцевое вычитание интервалов:

$$[\underline{a},\bar{a}] \div [\underline{b},\bar{b}] = [\underline{a}-\underline{b}, \bar{a}-\bar{b}].$$

В[3] не указано какого-либо конструктивного способа отыскания внутренней точки X_*, поэтому, исходя из тех же соображений, что и при выборе центра кубика u^I, можно считать вектор u решением "средней системы" уравнений (I4).

Найдем наибольшее неотрицательное число $\tilde{h}$ такое, что

$$\tilde{h}(A^I e^I) \subseteq b^I \div A^I u$$

Тогда интервальный вектор $(u+\tilde{h}e^I)$ - искомое решение ЛЗД, поскольку $A^I x \subseteq A^I(u+\tilde{h}e^I) \subseteq A^I u + A^I(\tilde{h}e^I) \subseteq \subseteq A^I u + b^I \div A^I u = b^I$ для любого $x \in u+\tilde{h}e^I$.

Оказывается, метод А.Ноймайера в точности совпадает с предложенным выше алгоритмом, в котором (I6) вычисляется как нижний конец соответствующего естественного интервального расширения.

Действительно, условие $\tilde{h}(A^I e^I) \subseteq b^I \div A^I u$ означает, что

$$\begin{cases} \tilde{h}(\underline{A^I e^I})_i \geqslant (\underline{b^I \div A^I u})_i, \\ \tilde{h}(\overline{A^I e^I})_i \leqslant (\overline{b^I \div A^I u})_i, \quad i=1,2,\dots,n. \end{cases}$$

Поэтому для всех $i=1,2,\dots$ имеет место неравенство

$$\tilde{h} \leqslant \min\left\{\frac{(\underline{b^I \div A^I u})_i}{(\underline{A^I e^I})_i}, \frac{(\overline{b^I \div A^I u})_i}{(\overline{A^I e^I})_i}\right\} =$$

$$= \frac{\min\{|\underline{b}_i^I - (\underline{A^I u})_i|, |\bar{b}_i^I - (\overline{A^I u})_i|\}}{|(A^I e^I)_i|} =$$

$$= \frac{\min\left\{\left|m(b_i^I) - \frac{1}{2}\,\omega(b_i^I) - (\underline{A^I u})_i\right|, \left|m(b_i^I) + \frac{1}{2}\,\omega(b_i^I) - (A^I u)_i\right|\right\}}{\left|(A^I e^I)_i\right|} =$$

$$= \frac{\min\left\{\left|\frac{1}{2}\,\omega(b_i^I) - \left|m(b_i^I) - (A^I u)_i\right|\right|, \left|\frac{1}{2}\,\omega(b_i^I) - \left|m(b_i^I) - (A^I u)_i\right|\right|\right\}}{\left|(A^I e^I)_i\right|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,\omega(b_i^I) - \left|m(b_i^I) - (A^I u)_i\right|}{\left|(A^I e^I)_i\right|} .$$

Поскольку последнее выражение совпадает с нижней границей интервального выражения (I7), то взятие минимума по i приводит к равенству $\tilde{h} = \underline{h}$.

Оба рассмотренных алгоритма имеют простую вычислительную схему, достаточно быстры и требуют для реализации небольшие ресурсы ЭВМ. В частности [3], если внутренняя точка u множества X_* уже известна, то для решения ЛЗД требуется $O(n^2)$ арифметических действий. Но нередко из-за грубого вычисления минимума в (I6) предоставляемые этими алгоритмами допуски оказываются "слишком узкими". В следующем параграфе мы покажем, как выражение (I6) можно вычислить точно.

§ 4. Более точный алгоритм решения ЛЗД.

Напомним следующее определение (см. [6]). Пусть S -непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, функция $f:\ S \to \mathbb{R}$ называется квазивогнутой, если для любых x , $y \in S$, $\lambda \in (0\,;1)$ выполнено неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geqslant \min\{ f(x) , f(y)\}$$

Равносильным квазивогнутости свойством функции является выпуклость всех ее множеств уровня $S_\alpha = \{ x \in S \mid f(x) \geqslant \alpha \}$.

Поскольку взятие минимума по i не представляет сложности, сконцентрируем внимание на минимизации величины (6), счититая i фиксированным.

Л е м м а 3. Функция $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{\frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|}$$

– квазивогнутая на любом выпуклом множестве, не содержащем начало координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S_α – непустое множество уровня функции Φ, т.е. $\Phi(x) \geqslant \alpha$, $\Phi(y) \geqslant \alpha$ для некоторых $x, y \in S_\alpha$. Тогда при $\lambda \in (0;1)$ справедливы неравенства

$$\Phi(\lambda x + (1-\lambda) y) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \lambda \cdot \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right| - (1-\lambda) \cdot \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right|}{\lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j| + (1-\lambda) \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_j|} =$$

$$= \frac{\lambda \cdot p(x) + (1-\lambda) \cdot p(y)}{\lambda \cdot q(x) + (1-\lambda) \cdot q(y)},$$

где $p(x) = \frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right|$, $q(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.

Заметим, что в силу исходных предположений

$\frac{p(x)}{q(x)} = \Phi(x) \geqslant \alpha$ и $q(x) > 0$. Поэтому $p(x) \geqslant \alpha \cdot q(x)$ и, аналогично, $p(y) \geqslant \alpha \cdot q(y)$. Суммируя эти неравенства с весами λ и $(1-\lambda)$, получим

$$\lambda p(x)+(1-\lambda)\cdot p(y)\geqslant \alpha\lambda\cdot q(x)+\alpha(1-\lambda)\cdot q(y),$$

а, значит,

$$\Phi(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \frac{\lambda\cdot p(x)+(1-\lambda)\cdot p(y)}{\lambda\cdot q(x)+(1-\lambda)\cdot q(y)}\geqslant\alpha .$$

Это неравенство завершает доказательство леммы.

Как известно [6], минимум квазивогнутой функции достигается в крайних точках выпуклой области определения. В нашем случае такими крайними точками являются вершины прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{P}=a^I_{i1}\times a^I_{i2}\times\ldots\times a^I_{in}$, их всего 2^n. Поэтому, в принципе, $\min\Phi(x)$ можно найти, перебрав все вершины $\mathcal{P}$. Покажем, как значительно уменьшить трудоемкость такого перебора.

На каждом шаге процесса перебора нам требуются значения сумм $\sigma_1=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j u_j$ и $\sigma_2=\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|$, где x – – вершина $\mathcal{P}$. Если перебор организован так, что на каждом следующем шаге просматриваем соседнюю вершину, то в суммах σ_1 и σ_2 изменяется лишь по одному слагаемому. Поэтому для вычисления новых значений σ_1 и σ_2 нет необходимости заново производить суммирование n слагаемых. Например, если вновь просматриваемая вершина отличается от предшествующей одной ℓ-ой координатой - вместо x'_ℓ она становится равной x''_ℓ, то

(новое значение σ_1)=(старое значение σ_1)+($x''_\ell-x'_\ell$)$\cdot u_\ell$.
Аналогично перевычисляется и σ_2 .

Заканчивая изложение метода, приведем алгоритм полного обхода соседних вершин прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{P}$. Занумеруем его вершины n-значными двоичными числами от 0 до II...I, у которых j-ая позиция равна 0, если j-ая координата вершины совпадает с левым концом интервала a^I_{ij}, и I - если с правым.

Алгоритм последовательного перебора вершин в порядке возрастания этих номеров не обладает нужным свойством "перехода к соседней вершине". Например, последовательные числа OII и 100 отличаются в трех разрядах, а не в одном, как должно быть у соседних вершин. Поэтому нужен специальный алгоритм обхода, являющийся, по-существу, перенумерацией вершин. Мы опишем его рекуррентно, причем шаги обхода будем также последовательно нумеровать n-значными двоичными числами.

Алгоритм 2.

1) На начальном шаге $s=0$ возьмем вершину с номером $m_0=0$.

2) Пусть уже определен номер вершины m_s. Рассмотрим числа s и $s+1$ и обозначим через k номер старшего разряда, в котором они отличаются. Тогда в качестве m_{s+1} возьмем номер m_s, в котором k-й разряд изменен на противоположный (1 на 0 или 0 на 1).

Лемма 4. Алгоритм 2 выполняет полный обход по одному разу всех вершин параллелепипеда $\mathcal{P}$, причем любые две вершины m_t, m_{t+1} являются соседними.

Доказательство. Свойство полного перебора всех вершин в алгоритме 2 сохраняется в случае, когда на шаге $s=0$ берется любая вершина. Докажем это более общее утверждение индукцией по размерности n. Действительно, для $n=1$ это утверждение очевидно для обеих возможных последовательностей $\{0, 1\}$ и $\{1, 0\}$. Предположим, что оно справедливо для размерности $(n-1)$. Рассмотрим полученную с помощью алгоритма 2 нумерацию для размерности n

$$m_0, m_1, \ldots, m_{11\ldots1}. \tag{20}$$

Отметим, что при выполнении алгоритма 2 в этой последовательности n-й разряд изменяется только один раз – при переходе номера шага от 011...1 к 10...0. Поэтому ни одно из чисел в первой половине (20) не может быть равным числу во второй половине из-за разных n-х разрядов. Отбросим n-ный разряд у чисел в (20). Тогда мы получим две последовательности обхода вершин ($n-1$)-мерного параллелепипеда:

$$m'_0, m'_1, \ldots, m'_{\underbrace{11\ldots1}_{n-1}}, m''_0, m''_1, \ldots, m''_{\underbrace{11\ldots1}_{n-1}},$$

представленные алгоритмом 2, но с разными начальными номерами m'_0 и m''_0, причем $m''_0 = m'_{\underbrace{11\ldots1}_{n-1}}$. По индукционному допущению внутри каждой из этих подпоследовательностей (20) содержатся только разные числа от 0 до 11...1. А поскольку всего их 2^n , то это означает, что каждое из них встречается в (20) ровно по одному разу.

Таким образом, последовательность (20) является полным перебором вершин параллелепипеда $\mathcal{P}$. Тот факт, что вершины с номерами i , $i+1$ являются соседними, вытекает непосредственно из описания алгоритма. Лемма доказана.

В целом отыскание величины

$$H = \min_{A\in A^I} \min_{1\le i\le n} \left\{ \frac{\frac{1}{2}\omega(b_i^I) - \left| m(b_i^I) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \right\}$$

с помощью алгоритма 2 можно реализовать в виде следующего фрагмента ФОРТРАН-программы:

```
        DO 80 I=1,NDIM
         OMEGA=0,5 * ( BI(2,1)-BI(1,I) )
          DO 50 J=1,NDIM
          S(J)=0
50        M(J)=0
             SIGMA1=0
             SIGMA2=0
        DO 60 J=1,NDIM
        SIGMA1 = SIGMA1 + AI(1,I,J) * U(J)
60      SIGMA2 = SIGMA2 + ABS( AI(1,I,J) )
            RMIN = ( OMEGA - ABS( B(I)-SIGMA1 ) ) / SIGMA2
70        K=0
71        K=K+1
          S(K)=S(K)+1
          IF ( S(K)  .LE. 1 ) GOTO 75
72        IF ( K .GE. NDIM ) GOTO 77
73        S(K)=0
             GOTO 71
75             P1 = AI(M(K)+1,I,K)
               M(K) = 1 - M(K)
               P2 = AI(M(K)+1,I.K)
          SIGMA1 = SIGMA2 + (P2 - P1 ) * U (K)
          SIGMA2 = SIGMA2 + ABS( P2 ) - ABS( P 1 )
        FUN = ( OMEGA - ABS( B(I)-SIGMA1 )) / SIGMA2
        IF ( RMIN .GT. FUN ) RMIN=FUN
           GOTO 70
77           IF ( H .GT.RMIN .OR. I .EQ. 1 ) H=RMIN
80      CONTINUE
```

Здесь NDIM – размерность (n) ;

массив $AI(2, NDIM, NDIM)$ – интервальная матрица ; ее первый индекс принимает значение I или 2 в зависимости от того, левый или правый конец соответствующего интервального элемента рассматривается;

массив $BI(2, NDIM)$ – интервальный вектор правых частей b^I , первый индекс имеет тот же смысл, что у AI ;

массив $A(NDIM, NDIM)$ – средняя матрица $m(A^I)$;

массив $B(NDIM)$ – "средняя" правая часть $m(b^I)$;

массив $U(NDIM)$ – решение "средней системы" уравнений (I4).

Остальные параметры имеют тот же смысл, что при описании алгоритма 2.

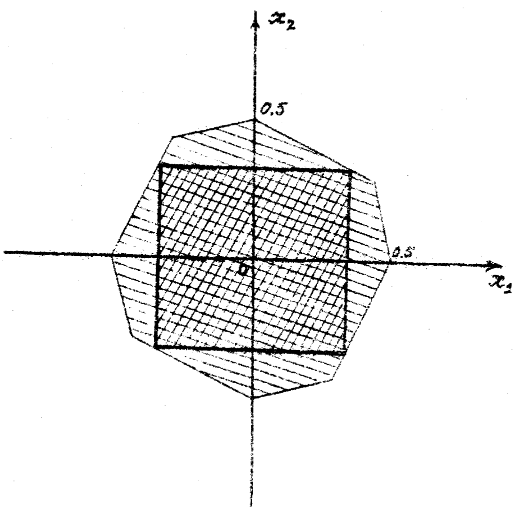

Рис. 5 . Оптимальное (неулучшаемое) решение ЛЗД .

§ 5. Численные примеры

В заключение работы приведем несколько иллюстративных примеров применения рассмотренных алгоритмов.

П р и м е р 1. Для данных (3) алгоритм А.Ноймайера и алгоритм из § 4 дают один и тот же результат(см. рис. 5):

$$u^I = \begin{pmatrix} [-0.3333;\ 0.3333] \\ [-0.3333;\ 0.3333] \end{pmatrix} .$$

Видно, что при точных вычислениях полученный интервальный вектор u^I касается границы множества X_* , поэтому решение является оптимальным (неулучшаемым). Можно показать, что это не случайно: так происходит, когда интервальный вектор правых частей b^I симметричен относительно нуля,т.е. $b^I = -b^I$.

П р и м е р 2 [7].

Пусть

$$A^I = \begin{pmatrix} [2;\ 4] & [-5;\ -1] & [-2;\ 3] \\ [-3;\ 1] & [5;\ 7] & [4;\ 6] \\ [-1;\ 1] & [-2;\ 1] & [-7;-2] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [-28;\ 43] \\ [-60;\ 29] \\ [-11;\ 39] \end{pmatrix} = b^I.$$

Тогда алгоритм А.Ноймайера или упрощенный алгоритм § 3 дают решение

$$u^I = \begin{pmatrix} [\ 2.4998; & 4.9520] \\ [-0.5315; & 1.9207] \\ [-4.4144; & -1.9621] \end{pmatrix},$$

ширина компонент которого равна 2.452.

С помощью полного алгоритма из § 4 (точное вычисление min в (16) путем полного перебора) получаем интервальный вектор

$$u^I = \begin{pmatrix} [2.3636; & 5.0883] \\ [-0.6678; & 2.0569] \\ [-4.5506; & -1.8259] \end{pmatrix}.$$

На этот раз ширина компонент равна 2.725.

При увеличении размерности n расхождение результатов этих алгоритмов, как правило, быстро нарастает.

П р и м е р 3 (демонстрирующий важность хорошего выбора центра интервального решения ЛЗД).

В примере 2 в качестве центра интервального решения бралось решение "средней" системы (I4). Теперь зафиксируем центром u^I вектор $(3.5, 0.5,-2.5)^T$. В итоге получаем следующие результаты.

В алгоритме А.Ноймайера и упрощенном алгоритме §3

$$u^I = \begin{pmatrix} [2.35;\ 4.65] \\ [-0.65;\ 1.65] \\ [-3.65;-1.35] \end{pmatrix}.$$

Ширина компонент равна 2.3, так что результат несколько хуже, чем в примере 2.

В полном алгоритме из § 4

$$u^I = \begin{pmatrix} [1.6;\ 5.4] \\ [-1.4;\ 2.4] \\ [-4.4;-0.6] \end{pmatrix}.$$

Здесь ширина компонент равна 3.8, что существенно лучше, чем с центром, выбираемым из решения "средней системы" (I.4).

Литература

I. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа.- Новосибирск: Наука, I986.
2. Alefeid,G., Herzberger,T. Introduction to interval computations.-N.-Y.:Academic Press,1983.
3. Neumaier, A. Tolerance analysis with interval arithmetic //Freiburger Intervall-Berichte,1986,N°9.
4. Barth W.,Nuding E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen//Computing,1974,v.12,pp.117-125.
5. Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // SIAM J.Numer.Anal.,1965,v.2,pp.115-118.
6. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование.Теория и алгоритмы. М.:Мир, I982.
7. Захаров А.В.,Шокин Ю.И. Алгебраическое интервальное решение систем линейных интервальных уравнений $Ax = b$ и $Ax + d = b$. //Препринт ВЦ СО АН СССР.Красноярск,I987, № 5.

Подписано к печати 16.02.88.
Тираж I80 экз. Объем I.8 п.л.
Заказ 34 АЛ 0II00

Типография КФ СО АН СССР