СТАТИСТИКА. МОДЕЛИРОВАНИЕ. ОПТИМИЗАЦИЯ

СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
(ЧЕЛЯБИНСК, 28 НОЯБРЯ – 2 ДЕКАБРЯ 2011 г.)

ББК С601.я43
С78

Одобрено
Советом факультета вычислительной математики и информатики.

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук, профессор ***А. В. Панюков***

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор ***В. В. Карачик***,
доктор экономических наук, профессор, ***А. Ю. Даванков***

С78 **Статистика. Моделирование. Оптимизация:** *сборник трудов Всероссийской конференции (Челябинск, 28 ноября – 3 декабря 2011 г.).* – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 339 с.

ISBN 978-5-696-04185-8

Сборник содержит представленные на конференции доклады.

На конференции организованы пленарные и секционные заседания, а также молодежная школа по современным проблемам математического и статистического исследования задач естествознания, техники, экономики.

Работа секций организована по следующим направлениям: 1) теоретические проблемы математического моделирования, статистики и исследования операций; 2) приложения математического моделирования, статистики и методов оптимизации.

Конференция организована кафедрой «Экономико-математические методы и статистка» факультета «Вычислительная математика и информатика» Южно-Уральского государственного университета при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-06077-г).

ББК С601.я43

ISBN 978-5-696-04185-8

Интервальные методы в доказательном решении уравнений

Шарый С.П.

shary@ict.nsc.ru

ИВТ СО РАН, Новосибирск

Введение

Мы рассматриваем задачу решения вещественных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

или, кратко,

$$Ax = b, \tag{2}$$

где $A = (\,a_{ij}\,)$ — $n \times n$-матрица и $b = (\,b_i\,)$ — n-вектор. Необходимо найти, по-возможности, наиболее точные (наиболее узкие) двусторонние границы для решения $x^* = (\,x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\,)^\top$ этой системы уравнений, т. е. такие векторы $\underline{x}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, что $\underline{x}_i \leq x_i^* \leq \overline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для вектора x^*, удовлетворяющего $Ax^* = b$. Подобную постановку задачи будем называть *задачей доказательного решения* системы линейных алгебраических уравнений согласно терминологии, введённой К.И. Бабенко [2]. Фактически, речь идёт о получении решения СЛАУ вместе с гарантированной оценкой его погрешности. Задачи подобного сорта и различные аспекты их решения на протяжении десятилетий привлекают внимание математиков (см., к примеру, [3]).

С поставленной выше задачей тесно связана задача об оценивании так называемого множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений. Напомним, что интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{n2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{nn}x_n & = & \boldsymbol{b}_n \end{array}\right. \tag{3}$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $n \times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный n-вектор, называется семейство систем (1)–(2) с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{A}$. *Множество решений* интервальной линейной системы уравнений — это множество $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\bigr\}$, образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ [4, 8]. Далее интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ предполагается неособенной, т.е. содержащей только неособенные (невырожденные) точечные матрицы A с $\det A \neq 0$. Тогда множество решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ системы (3)–(4) ограничено, и мы будем решать задачу его внешнего интервального оценивания: найти (по-возможности, наиболее узкий) брус $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий множество решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Интервальная система (3)–(4), как правило, получается в результате различных преобразований с исходной точечной системой (1)–(2). Желая сохранить доказательность процесса решения на цифровых ЭВМ с конечной разрядной сеткой, мы должны выполнять их в машинной интервальной арифметике с внешним направленным округлением (см., к примеру, [1]). Отсюда и возникает интервализация исходно неинтервальной СЛАУ.

В последние десятилетия большое развитие получили интервальные подходы к доказательному решению СЛАУ [14], и одной из целей настоящей работы является представление нового метода подобного типа, но с существенно улучшенными характеристиками. Используемые ниже в работе обозначения следуют неформальному международному стандарту [10], в частности, интервалы и интервальные объекты выделяются жирным шрифтом ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ..., $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$), а подчёркивание и надчёркивание ($\underline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{a}}$) означают взятие нижнего и верхнего концов интервалов.

Обзор текущего состояния

Наиболее простым, понятным и исторически первым является *пошаговый подход* к оценивания погрешностей решений различных вычислительных задач. Его суть состоит в том, чтобы разбить алгоритм вычисления решения на «элементарные шаги» и оценить погрешности на каждом таком шаге вычислений. Полная погрешность при этом получается как сумма погрешностей отдельных элементарных шагов. В применении к решению СЛАУ такой подход последовательно развивается, в частности, в [3], где в качестве элементарных шагов берутся последовательности арифметических операций, соответствующие различным этапам ортогональных матричных преобразований СЛАУ и обратной подстановки решения.

Крупный недостаток пошагового подхода заключается в том, что его применение неявно привязывается к конкретному алгоритму вычисления решения или даже к его конкретной реализации в той или иной среде.

Например, в [3] оценки погрешностей выводятся лишь для прямого метода решения СЛАУ, основанного на её ортогональной двухдиагонализации.

При применении пошагового подхода оценки погрешностей получаются завышенными во много раз (иногда даже на порядки), причём качество оценок решения существенно зависит от алгоритма, и «хороший» в обычном смысле алгоритм не обязательно хорош для пошагового оценивания погрешностей.

Особенно неудовлетворительны результаты прямого использования в пошаговом подходе для оценок погрешностей классической интервальной арифметики. Главной причиной огрубления интервальных оценок является быстрое приобретение переменными, участвующими в вычислениях, связанности (взаимозависимости) как следствие их общего происхождения от исходных аргументов, тогда как классическая интервальная арифметика предназначена для работы с независимыми интервальными величинами. Это явление называют *эффектом связанности (зависимости)* [8].

Следует отметить, что эффект связанности носит универсальный характер и является причиной огрубления любых пошаговых оценок, в том числе и полученных неинтервальными методами в [3].

Другой подход к оцениванию погрешности результата, получивший значительное развитие в последние десятилетия — это *апостериорное оценивание.* В нём погрешность ответа оценивается уже после его получения и на его основе. Иными словами, при этом разделяются

– способ получения двусторонней оценки решения,

– установление её доказательности (гарантированности).

При этом интервальную (двустороннюю) оценку решения можно получать на основе известного приближённого точечного решения, например, «раздувая» его до интервального вектора-бруса путём уширения во все стороны, т. е. по всем координатным направлениям. Доказательность интервальных оценок можно устанавливать с помощью некоторых результатов анализа, среди которых в первую очередь должна быть упомянута

Теорема Брауэра о неподвижной точке [5, 6, 7] *Пусть D — выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Если непрерывное отображение $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ переводит D в себя, $g(D) \subseteq D$, то оно имеет на D неподвижную точку x^*, т. е. такую что $x^* = g(x^*)$.*

Если вместо произвольных выпуклых компактов ограничиться интервальными векторами-брусами в $\mathbb{R}^n$, а вычисление области значений заменить на внешнее оценивание с помощью интервального расширения, то условия теоремы Брауэра могут быть конструктивно проверены на компьютере.

Как следствие сказанного Р. Кравчиком [11] и впоследствии Р.Е. Муром [13] была развита схема апостериорного интервального оценивания решений различных задач, которая в применении к СЛАУ выглядит следующим образом. Исходная система $Ax = b$ приводится к рекуррентному виду $x = (I - \Lambda A)\, x + \Lambda\, b$, где Λ — предобуславливающая $n \times n$-матрица, а затем для построенного некоторым образом интервального вектора-бруса $\boldsymbol{X}$ проверяем выполнение условия

$$(I - \Lambda A)\, \boldsymbol{X} + \Lambda\, b \;\subseteq\; \boldsymbol{X}. \tag{$\star$}$$

Если это включение выполнено, то в силу теоремы Брауэра интервальный брус $\boldsymbol{X}$ содержит решение СЛАУ.

Одним из наиболее популярных интервальных методов доказательного решения СЛАУ, основанных на идее апостериорного оценивания, является метод Румпа [14]. Он комбинирует представленные выше идеи Кравчика-Мура со следующими техническими модификациями:

1) Предобуславливающая матрица в ($\star$) берётся как $\Lambda \approx A^{-1}$, т. е. приближённо обратной к матрице СЛАУ, чтобы сделать как можно меньшей норму матрицы $(I - \Lambda A)$.

2) Для построения нужного интервального бруса вокруг известного приближённого решения $\tilde{x}$ и далее последовательно применяется так называемое «ε-раздутие», определяемое как

$$\varepsilon\text{-раздутие}\,(\boldsymbol{X}) \;=\; \boldsymbol{X}\cdot[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] + [-\delta, \delta].$$

   Основываясь на вычислительном опыте, обычно полагают здесь $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 10^{-20}$, причём на первом шаге $\boldsymbol{X} = [\tilde{x}, \tilde{x}]$.

3) Сначала находится приближение $\check{x}$ к решению, а затем его поправка, как решение системы уравнений $Ax = b - A\check{x}$.

Естествено, что для обеспечения доказательности процесса решения при реализации на ЭВМ все операции выполняются в машинной интервальной арифметике.

Метод Румпа для высокоточного доказательного решения СЛАУ реализован в виде процедуры `verifylss` из пакета INTLAB, свободно распространяемого интервального расширения Matlab'а [9]. Отметим также, что метод Румпа, как и вся идеология апостериорного оценивания, очень просто обобщается на нелинейные задачи (см. подробности в [14]), тогда как развиваемый в [3] пошаговый подход в принципе неприменим к нелинейным системам уравнений.

Теория

Можно ли улучшить подход Кравчика-Мура, реализованный в методе Румпа? Ответ на этот вопрос утвердителен, и одной из целей настоящей работы является представление нового метода апостериорного оценивания, но с существенно улучшенными характеристиками.

В идею апостериорного оценивания можно внести следующие модификации:

Во-первых, вместо теоремы Брауэра для проверки существования решения в брусе можно использовать более тонкие результаты, использующие исследование функции лишь на границе бруса.

Во-вторых, вместо приведения исходной системы уравнений к рекуррентной форме, требуемой теоремой Брауэра (и, как следствие, тестом Кравчика-Мура), мы можем использовать результаты, относящиеся к СЛАУ в исходном виде, затрачивая меньшее количество интервальных операций и округлений.

В-третьих, мы вводим в алгоритм «обратную связь», преодолевая пассивный характер алгоритма Румпа.

В связи с первым пунктом отметим, что широко известная формулировка теоремы Брауэра допускает важное обобщение, в котором вместо образа всего выпуклого компакта D исследуется лишь образ его границы [5, 7]. На этом пути получается существенное усиление теста Кравчика-Мура [15].

Основой нашего подхода является сравнительно малоизвестная в математическом анализе

Теорема Миранды [12]. *Пусть* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x) = (\,F_1(x),\ F_2(x),\ \dots,\ F_n(x)\,)^\top$ *— функция, непрерывная на брусе* $\boldsymbol{X}\subset\mathbb{R}^n$ *со сторонами, параллельными координатным осям, и для каждого* $i=1,2,\dots,n$ *имеет место*

$$F_i\big(\boldsymbol{X}_1,\dots,\underline{\boldsymbol{X}}_i,\dots,\boldsymbol{X}_n\big)\geq 0 \quad \text{и} \quad F_i\big(\boldsymbol{X}_1,\dots,\overline{\boldsymbol{X}}_i,\dots,\boldsymbol{X}_n\big)\leq 0$$

или

$$F_i\big(\boldsymbol{X}_1,\dots,\underline{\boldsymbol{X}}_i,\dots,\boldsymbol{X}_n\big)\leq 0 \quad \text{и} \quad F_i\big(\boldsymbol{X}_1,\dots,\overline{\boldsymbol{X}}_i,\dots,\boldsymbol{X}_n\big)\geq 0,$$

т.е. области значений компонент $F_i(x)$ *функции* F *на соответствующих противоположных гранях бруса* $\boldsymbol{X}$ *имеют разные знаки. Тогда на брусе* $\boldsymbol{X}$ *существует нуль функции* F.

Теорема Миранды является многомерным обобщением хорошо известной теоремы Больцано-Коши о том, что непрерывная на интервале функция, которая на его концах принимает значения разных знаков, имеет внутри интервала нуль.

Если $F(x) = Ax - b$ для $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ и n-вектора $b = (b_i)$, то в качестве следствия теоремы Миранды получаем условие существования решения системы линейных уравнений в интервальном векторе-брусе $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)^\top$: если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \tag{5}$$

или

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0, \tag{6}$$

то брус $\boldsymbol{X}$ содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$.

В случае неособенной матрицы A без какого-либо ограничения общности можно полагать, что $a_{ii} > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, так как путём подходящей перестановки уравнений системы (и соответствующей перестановки строк матрицы) мы всегда можем добиться того, чтобы диагональные элементы сделались ненулевыми, а затем домножить на -1 обе части уравнений, имеющих отрицательный диагональный элемент. Аналогичная процедура применима и к интервальным линейным системам уравнений с неособенными матрицами, и её результатом также является положительность диагональных элементов. По этой причине мы будем считать, что в матрицах рассматриваемых систем линейных уравнений (точечных или интервальных) диагональные элементы положительны. Это ограничение делает нереализуемой вторую пару неравенств из (5)–(6) и тем самым облегчает проверку условий теоремы Миранды.

Коль скоро интервальная система уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ является семейством точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, то, основываясь на сделанном наблюдении и условии (5), нетрудно выписать достаточный признак того, что брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$:

Предложение. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— интервальная* $n \times n$*-матрица с положительными диагональными элементами,* $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{X}$ *— интервальные* n*-векторы. Если справедливы неравенства*

$$\underline{\left(\boldsymbol{a}_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} \;\geq\; \overline{\boldsymbol{b}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

и

$$\overline{\left(\boldsymbol{a}_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} \;\leq\; \underline{\boldsymbol{b}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

то вектор-брус $\boldsymbol{X}$ *содержит множество решений* $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

В случае, когда какое-либо из неравенств (7)–(8) не выполняется, на основе Предложения нетрудно указать способ коррекции бруса $\boldsymbol{X}$, который сделает неверное неравенство истинным. В самом деле, если нарушено i-е из неравенств (7), то в силу положительности $\boldsymbol{a}_{ii} > 0$ мы должны увеличивать $\overline{\boldsymbol{X}}_i$, чтобы вырос нижний конец у произведения $\boldsymbol{a}_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i$ и, как следствие, у суммы $\boldsymbol{a}_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j$. При достаточном увеличении $\overline{\boldsymbol{X}}_i$ мы всегда сможем этим способом добиться выполнения соответствующего неравенства. Совершенно аналогично, путём уменьшения $\underline{\boldsymbol{X}}_i$, корректируются неравенства (8).

Но коррекция отдельно взятого i-го неравенства может «запортить» выполнение других неравенств, с номерами $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Этого, очевидно, не произойдёт, если в матрице $\boldsymbol{A}$ внедиагональные члены пренебрежимо малы в сравнении с диагональными. Для придания матрице исходной системы $Ax = b$ диагонального преобладания мы используем предобуславливание приближённо обратной $\Lambda \approx A^{-1}$, вследствие чего в предобусловленной системе матрица становится приближённо равной единичной.

Алгоритм

Предлагаемый алгоритм (см. таблицу) строит интервальный брус $\boldsymbol{X}$, который удовлетворяет условиям Предложения, отправляясь от некоторой точки $\tilde{x}$, которая может быть взята приближённым решением данной системы линейных алгебраических уравнений. Чем ближе $\tilde{x}$ к точному решению рассматриваемой СЛАУ, тем меньшие размеры будет иметь интервальный брус $\boldsymbol{X}$, т. е. тем точнее получатся доказательные двусторонние границы для решения исходной линейной системы. Отметим, что в отличие от интервального метода Румпа [14], также носящего апостериорный характер, но основанного на пассивном многократном раздутии начальной точки $\tilde{x}$, наш алгоритм является *адаптивным*, т. е. он подстраивается под задачу, имея в себе «обратную связь» от конструируемого бруса.

Мы начинаем с точки $\tilde{x}$, полагая $\boldsymbol{X} = [\tilde{x}, \tilde{x}]$, и проверяем, насколько отличаются от истинных неравенства (7) и (8) для $i = 1, 2, \ldots, n$. В ходе выполнения этой проверки корректируем те концы компонент оценки решения $\boldsymbol{X}$, для которых неравенства (7) и (8) не выполняются: увеличиваем $\overline{\boldsymbol{X}}_i$ или уменьшаем $\underline{\boldsymbol{X}}_i$, «раздувая» в необходимой мере брус $\boldsymbol{X}$. Шаг проверки по всем компонентам выполняем до тех пор, пока не будут удовлетворены все неравенства (7)–(8), но не более *КоличествоПопыток* раз. Обычно вполне достаточно верхнего ограничения в 7–8 шагов, как и в методе Румпа [14], идейно близком к нашему.

Применяя какой-либо метод, находим приближение $\tilde{x}$ к решению данной системы $Ax = b$.

Находим приближённо обратную матрицу $\Lambda \approx A^{-1}$.

Предобуславливаем исходную систему, т. е. переходим от исходной СЛАУ к решению интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A} = \Lambda A$, $\boldsymbol{b} = \Lambda b$ и матричные умножения выполняются в машинной интервальной арифметике.

```
Успех ← ложь;
X ← [x̃, x̃] ;
цикл по  k = 1  до  КоличествоПопыток
    цикл по  i = 1  до  n
        если ( нарушается i-е неравенство (7) )
            увеличиваем X̄_i
        конец если
        если ( нарушается i-е неравенство (8) )
            уменьшаем X_i (нижний конец)
        конец если
    конец цикла
    если  ( брус X не был изменён на текущей итерации )
        Успех ← истина ;
        выход из цикла
    конец если
конец цикла
если  Успех
    брус X содержит решение СЛАУ
иначе
    доказательных двусторонних оценок
    для решения СЛАУ найти не удалось
конец если
```

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – Москва: Мир, 1987.

2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – Москва: Наука, 1986.

3. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. – Новосибирск: Наука, 1988 и 1992.

4. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.

5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984.

6. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – Москва: Мир, 1972.

7. Опойцев В.И. Нелинейная системостатика. – Москва: Наука, 1986.

8. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2011. – Электронная книга, доступная на `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/`

9. INTLAB — INTerval LABoratory, Matlab toolbox for reliable computing and self-validating algorithms. – URL: `http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab`

10. Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии. 2010. Т. 15, №1. С. 7–13.

11. Krawczyk R. Newton-Algorithmen zur Besstimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken // Computing. 1969. Vol. 4. P. 187–201.

12. Miranda C. Un’ osservatione su un teorema di Brouwer // Bollet. Unione Mat. Ital. Serie II. 1940. T. 3. C. 5–7.

13. Moore R.E. Methods and Applications of Interval Analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979.

14. Rump S. Verification methods for dense and sparse systems of equations // Topics in Validated Computations / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–136. – (Studies in Computational Mathematics 5).

15. Shary S.P. Krawczyk operator revised // Международная конференция по вычислительной математике МКВМ-2004. Рабочие совещания / Под ред. Ю.И. Шокина, А.М. Федотова, С.П. Ковалёва, Ю.И. Молородова, А.Л. Семенова и С.П. Шарого. – Новосибирск: Издательство ИВМиМГ, 2004. – С. 307–313. – Электронная версия доступна на `http://www.nsc.ru/interval` по адресу `Library/Thematic/VerifySol/IMRO-04.pdf`