Методы оптимизации и их приложения

ТРУДЫ

XIV Байкальской международной школы-семинара

Иркутск-Северобайкальск, 2-8 июля 2008 г.

Том 3
Вычислительная математика

Иркутск
2008

УДК 517.518+517.983+517.63+519.642

Вычислительная математика: Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 2 – 8 июля 2008 года. Том 3: Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2008. – 183 с.

ISBN 978-5-93908-052-1 (т.3)

В данном томе представлены работы, посвященные различным разделам вычислительной математики: жестким обыкновенным дифференциальным уравнениям, вырожденным интегро-дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных и т.д.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в соответствующих областях прикладной математики.

Труды подготовлены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-06058-г)

Ответственные за выпуск: *д.ф.-м.н. Булатов М.В.*
к.ф.-м.н. Чистякова Е.В.

ISBN 978-5-93908-052-1 (т.3)

ЕЩЁ ОДНА ВЕРСИЯ ФОРМАЛЬНОГО ПОДХОДА К ВНЕШНЕМУ ОЦЕНИВАНИЮ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ[1]

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск
e-mail: shary@ict.nsc.ru

Аннотация. В работе исследуется новая версия формального (алгебраического) подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем уравнений, в основу которой положена известная из математического анализа теорема Миранды. Исследуются способы её численной реализации, условия применимости и качество оценивания.

Ключевые слова: интервальные линейные уравнения, множество решений, внешняя оценка, теорема Миранды, формальный (алгебраический) подход.

1. Постановка задачи

Предметом рассмотрения в нашей работе являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{n2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{nn}x_n & = & \boldsymbol{b}_n \end{array}\right. \tag{1}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и интервальными правыми частями $\boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $n\times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный n-вектор. Системы (1)–(2) мы понимаем как семейства точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с матрицами $A \in \boldsymbol{A}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b}$.

Множеством решений интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\,\bigr\}, \tag{3}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ (см., к примеру, [1, 3, 12]). Часто его называют также *объединённым множеством решений*, поскольку для интервальных уравнений существуют другие множества решений [4, 15], более адекватные тем или иным практическим ситуациям. Мы не рассматриваем их в нашей работе, и потому называем (3) сокращённым термином «множество решений».

Известно, что множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является многогранным (полиэдральным) множеством, в общем случае невыпуклым, но его пересечение с каждым из ортантов пространства $\mathbb{R}^n$ выпукло. Точное и полное описание множества решений практически невозможно в силу его огромной трудоёмкости, а с другой стороны и не нужно в большинстве

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы России» (грант №НШ-931.2008.9)

реальных постановок задач. Чаще достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами, имеющими меньшую конструктивную сложность.

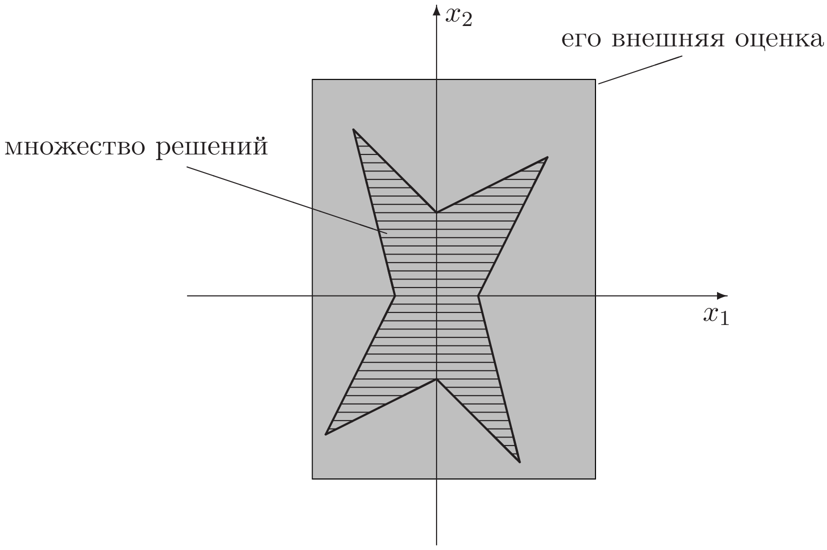

Рис. 1: Внешнее оценивание множества решений интервальным вектором-брусом.

Всюду далее интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ предполагается неособенной, т. е. содержащей только неособенные (невырожденные) точечные матрицы. Тогда множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ системы (1)–(2) ограничено, и в этой работе мы будем решать задачу его внешнего интервального оценивания:

> Найти (по-возможности, меньший) брус $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Наша система обозначений следует неформальному международному стандарту [10]. В частности, интервалы и интервальные объекты выделяются жирным шрифтом, а подчёркивание и надчёркивание означают взятие нижнего и верхнего концов интервалов.

2. Основные результаты

В математическом анализе хорошо известна

Теорема Больцано-Коши. *Если функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на интервале $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри интервала существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.*

Её многомерным аналогом является результат, опубликованный более чем столетием позже в заметке [11] —

Теорема Миранды. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \bigl(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\bigr)^\top$ — функция, непрерывная на брусе $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место*

$$F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \underline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \cdot F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \overline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \leqslant 0,$$

т. е. области значений компонент функции $F(x)$ на соответствующих противоположных гранях бруса $\boldsymbol{X}$ имеют разные знаки. Тогда на брусе $\boldsymbol{X}$ существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.

Если $F(x) = Ax - b$ для $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ и n-вектора $b = (b_i)$, то в качестве немедленного следствия теоремы Миранды получаем следующее условие существования решения системы линейных уравнений в интервальном брусе $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$: если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leqslant 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geqslant 0 \tag{4}$$

или

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geqslant 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leqslant 0, \tag{5}$$

то брус $\boldsymbol{X}$ содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$.

В случае неособенной матрицы A без какого-либо ограничения общности можно полагать, что $a_{ii} > 0$, так как путём подходящей перестановки уравнений системы (и соответствующей перестановки строк матрицы) мы всегда можем добиться того, чтобы диагональные элементы сделались ненулевыми, а затем домножить на -1 обе части уравнений, имеющих отрицательный диагональный элемент. Аналогичная процедура применима также к интервальным линейным системам уравнений с неособенными матрицами, и её результатом является положительность диагональных элементов. По этой причине мы будем считать впредь, что матрицах рассматриваемых систем линейных уравнений диагональные элементы положительны. Это соображение значительно упрощает наши рассмотрения, так как делает нереализуемой вторую пару неравенств из (4)–(5) и тем самым облегчает проверку условий теоремы Миранды.

Коль скоро интервальная система уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ является семейством точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, то, основываясь на сделанном наблюдении и условии (4), нетрудно выписать достаточный признак того, что брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$:

Предложение 1. *Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная матрица с положительными диагональными элементами, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ и $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальные векторы. Если для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справедливы неравенства*

$$\overline{\left(\boldsymbol{a}_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - \underline{\boldsymbol{b}}_i \leqslant 0 \qquad \text{и} \qquad \underline{\left(\boldsymbol{a}_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - \overline{\boldsymbol{b}}_i \geqslant 0,$$

то брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Для дальнейших преобразований имеет смысл выйти из классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ в полную интервальную арифметику Каухера $\mathbb{KR}$, обладающую более удобными алгебраическим свойствами (см. оригинальную статью [9] или изложение основ этой арифметики в [4, 5, 15]). Напомним, что её элементами являются пары действительных чисел $[\alpha, \beta]$, не обязательно связанные соотношением $\alpha \leqslant \beta$, так что $\mathbb{IR} \subset \mathbb{KR}$.

Обычные интервалы из $\mathbb{IR}$ называются при этом *правильными*, а интервалы $[\alpha, \beta]$, для которых $\alpha > \beta$, — *неправильными.*

Учитывая определение интервального умножения в $\mathbb{KR}$ и условие $\boldsymbol{a}_{ii} > 0$, можем записать

$$\overline{\boldsymbol{a}_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i} \;=\; \overline{\boldsymbol{a}_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i} \qquad \text{и} \qquad \underline{\boldsymbol{a}_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i} \;=\; \underline{\boldsymbol{a}_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i},$$

где dual — операция дуализации интервала в $\mathbb{KR}$, определяемая как $\operatorname{dual}[\underline{a}, \overline{a}] = [\overline{a}, \underline{a}]$. Наконец, переформулируем результат Предложения 1 в виде включения в полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$: брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, если для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеет место

$$\boldsymbol{a}_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_i \;\subseteq\; 0.$$

Напомним теперь следующее

Определение. *Формальное решение интервальной системы уравнений*

$$\begin{cases} F_1(\,\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{b}_1, \\ F_2(\,\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{b}_2, \\ \;\vdots \quad \vdots \qquad \ddots \; \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ F_m(\,\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{b}_m, \end{cases}$$

с интервальными параметрами $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m$ *— это интервальный вектор* $\boldsymbol{x} = (\,\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\,)^\top$, *обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики и прочих операций, входящих в выражения* F_i.

Таким образом, формальное решение интервальных систем — это объект, соответствующий обычному математическому понятию решения уравнения, но рассматриваемому в экзотической алгебраической системе — интервальной арифметике, в качестве которой могут выступать в зависимости от рассматриваемой задачи либо классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$, либо полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, либо какая-то другая интервальная алгебраическая система. Привлекая понятие формального решения, мы можем придать результату Предложения 1 следующий менее общий, но более удобный в вычислительном отношении вид:

Предложение 2. *Пусть диагональные элементы в интервальной матрице* $\boldsymbol{A}$ *положительны, и отображение* $\mathcal{S} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$, *зависящее от параметров* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ *и* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$, *задаётся покомпонентно как*

$$\mathcal{S}_i(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_{ii}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Правильное формальное решение интервальной системы уравнений

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0 \tag{7}$$

содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Например, для интервальной линейной системы Хансена [8]

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}, \tag{8}$$

множество решений которой изображено на рисунке, формальное решение соответствующего уравнения (6)–(7) есть интервальный вектор $([-120,90],[-60,240])^{\top}$, являющийся оптимальной (наилучшей) внешней оценкой множества решений.

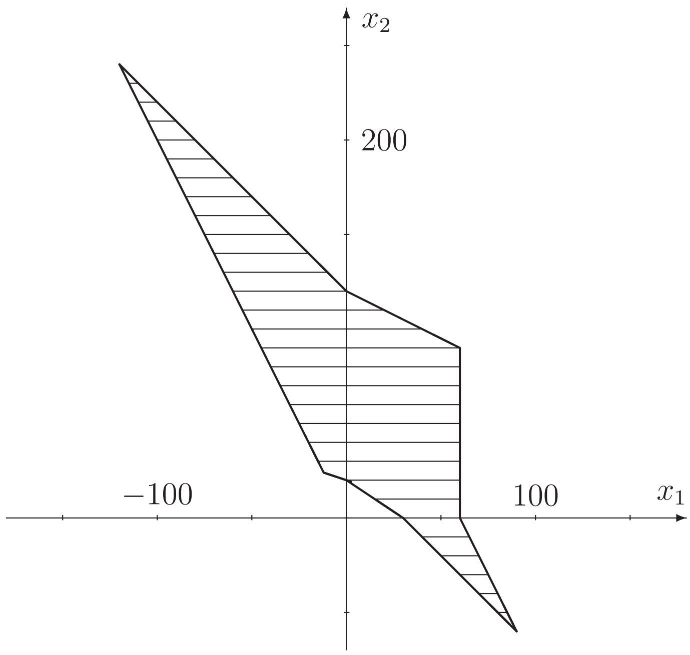

Рис. 2: Множество решений интервальной системы Хансена (8).

Итак, нахождение внешней оценки множества решений исходной ИСЛАУ свелось к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений. Заметим, что задача нахождения формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача решения некоторого уравнения, хотя и рассматриваемая в непривычной алгебраической системе $\mathbb{KR}$. Соответствующий общий подход к задачам оценивания множеств решений, сводящий исходную постановку к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений, называется, как известно, *формальным подходом* [15]. Это весьма общая методика, которая может реализовываться различными конкретными способами в зависимости от выбора вспомогательной системы уравнений и численного метода поиска её формального решения. Отличительной особенностью формального подхода является его универсальность: как общая теоретическая схема подхода, так и соответствующие численные методы с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания даже более общих, чем объединённое, множеств решений (см. [4, 15]).

Результат Предложения 2 не является абсолютно новым, ранее он уже был получен в работе [14], но с помощью длинных и малоочевидных рассуждений, использующих технику так называемого «модального интервального анализа». Выше мы привели другой, прозрачный вывод этого факта.

3. Вычисление формальных решений

Для нахождения формального решения интервальной системы уравнений (6)–(7) воспользуемся техникой погружения в евклидово пространство двойной размерности [5]. Его идея состоит в том, чтобы перейти из «нелинейного» интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство, только в котором и применимы многие математические концепции, составляющие основу современных вычислительных методов (в частности, дифференцирование и выпуклость). Этот переход может быть осуществлён с помощью любого взаимнооднозначного отображения $\mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ (так называемого *погружения*), и его конкретный выбор обычно диктуется соображениями удобства и наиболее аккуратного сохранения свойств рассматриваемых объектов.

Напомним, что отображение $\mathrm{sti} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, задаваемое правилом

$$\mathrm{sti}\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = (-\underline{\boldsymbol{x}}_1, -\underline{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, -\underline{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n),$$

называется *стандартным погружением* интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Стандартное погружение индуцирует на $\mathbb{R}^{2n}$ отображение $\mathfrak{S}$, такое что

$$\mathfrak{S} \;=\; \mathrm{sti}\,\circ \mathcal{S} \circ \mathrm{sti}^{\,-1}, \tag{9}$$

и нахождение формального решения уравнений в $\mathbb{KR}^n$ может быть заменено на решение в $\mathbb{R}^{2n}$ уравнения $\mathfrak{S}(x) = 0$ с индуцированным отображением $\mathfrak{S}$.

Индуцированное отображение $\mathfrak{S}$, очевидно, непрерывно по x и по параметрам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ в силу непрерывности операции дуализации и интервальных арифметических операций сложения, вычитания и умножения в $\mathbb{KR}^n$. Наиболее важное свойство отображения $\mathfrak{S}$ даёт

Предложение 3. *Если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, то индуцированное отображение $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, определённое посредством* (9)*, является порядково выпуклым в $\mathbb{R}^{2n}$ относительно покомпонентного упорядочения векторов «$\leqslant$».*

Порядковая выпуклость отображения $\mathfrak{S}$ влечёт существование его субдифференциала $\partial\mathfrak{S}$ всюду в $\mathbb{R}^{2n}$. Можно показать и большее: $\mathfrak{S}$ является полиэдральным отображением. Следовательно, имеет смысл применить для нахождения решений индуцированного уравнения $\mathfrak{S}(x) = 0$ в $\mathbb{R}^{2n}$ субдифференциальный метод Ньютона, развитый автором для задач подобного сорта и успешно зарекомендовавший себя (см., в частности, [5]).

Реализация и численные эксперименты показывают, что и в рассматриваемом случае субдифференциальный метод Ньютона работает хорошо и позволяет находить формальные решения уравнения (6)–(7) за небольшое конечное число итераций. В частности, он качественно превосходит по своей эффективности стационарные итерационные методы типа Якоби, предложенные для решения аналогичной задачи в [13]. К примеру, для системы Хансена (8) точное формальное решение уравнения (6)–(7) вычисляется субдифференциальным методом Ньютона всего за 3 (три) итерации.

К сожалению, даже когда множество решений ИСЛАУ непусто, формальное решение уравнения (6)–(7) часто не существует или не является правильным. В последнем случае оно не может быть проинтерпретировано согласно Предложению 3. Например, для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [2,3] & [0,1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix},$$

матрица которой получена перестановкой местами строк в матрице системы Хансена (8), а правая часть такая же, как и в (8), формальным решением системы (6)–(7) является неправильный интервальный вектор $([240, 0], [60, -240])^\top$ (субдифференциальный метод Ньютона успешно находит его за 3 итерации).

Исследуем это затруднение более тщательно.

4. Условия существования правильного формального решения

Представим матрицу интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ в виде суммы диагональной и внедиагональной частей, т. е. как

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D},$$

где $\boldsymbol{C}$ — матрица, в которой диагональ нулевая, а внедиагональные элементы совпадают с соответствующими элементами $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{D}$ — диагональная интервальная матрица, элементы которой равны соответствующим диагональным элементам $\boldsymbol{A}$.

Тогда интервальный оператор $\mathcal{S}$ может быть записан как

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b},$$

а уравнение (6)–(7) примет вид

$$\boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x - \boldsymbol{b} = 0.$$

Добавим к обеим его частям по величине $\operatorname{opp}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x)$, алгебраически противоположной к $\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x$, что равносильно переносу этого члена «с противоположным знаком» в другую часть уравнения. Получаем

$$\operatorname{opp}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x) = \boldsymbol{C}x - \boldsymbol{b},$$

или, умножая обе части на -1 и учитывая, что $-\operatorname{opp}(\cdot) = \operatorname{dual}(\cdot)$,

$$(\operatorname{dual}\boldsymbol{D})\,x = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}x.$$

Из сделанного нами предположения о положительности диагональных элементов в $\boldsymbol{A}$ следует также существование алгебраически обратной матрицы для $(\operatorname{dual}\boldsymbol{D})$. Коль скоро $\operatorname{inv}\operatorname{dual}(\cdot) = (\cdot)^{-1}$, то эта алгебраически обратная $\operatorname{inv}(\operatorname{dual}\boldsymbol{D})$ совпадает с обычной обратной интервальной матрицей $\boldsymbol{D}^{-1}$, и потому приходим к следующей равносильной форме записи уравнения (6)–(7):

$$x = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}x). \tag{10}$$

Системы уравнений подобного вида, в которых неизвестная переменная выделена в одной из частей «в чистом виде», называются системами уравнений в *рекуррентном виде* (некоторым аналогом им являются операторные уравнения второго рода).

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — правильное формальное решение интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (10). Беря радиус от обеих частей равенства

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{D}^{-1}\big(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\big),$$

получим

$$\operatorname{rad}\boldsymbol{x}^* = \operatorname{rad}\Big(\boldsymbol{D}^{-1}\big(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\big)\Big).$$

Но $\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{GH}) \geqslant |\boldsymbol{G}| \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{H}$ для любых интервальных матриц $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$ согласованных размеров (см. [1, 12]), и поэтому

$$\mathrm{rad}\,\Big(\boldsymbol{D}^{-1}\big(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\big)\Big) \geqslant |\boldsymbol{D}^{-1}| \cdot \mathrm{rad}\,\big(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\big) = |\boldsymbol{D}^{-1}| \cdot \big(\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} + \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*)\big).$$

Если все компоненты вектора свободных членов $\boldsymbol{b}$ имеют ненулевую ширину — $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} > 0$, — то справедливо неравенство

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^* \;>\; |\boldsymbol{D}^{-1}| \cdot \mathrm{rad}\,\big(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\big) \;\geqslant\; |\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}| \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^*.$$

Оно означает, в частности, что $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^* > 0$, т. е. что правильное формальное решение в этом случае является телесным брусом. Кроме того, мы можем отметить, что для положительного вектора $y = \mathrm{rad}\,\boldsymbol{x}^*$ и для неотрицательной матрицы $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$ имеет место $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|\,y < y$. Отсюда в силу свойств неотрицательных матриц следует [7, 12], что спектральный радиус матрицы $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$ должен быть строго меньше 1. В свою очередь, это равносильно тому, что матрица $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}$ является так называемой H-матрицей. Это необходимое условие существования правильного формального решения системы (10) при $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} > 0$.

Отметим, что H-матрицы — это специальный класс матриц, у которых диагональ преобладает над остальной, внедиагональной, частью матрицы в спектральном смысле [7, 12]. Класс H-матриц включает в себя в качестве собственного подмножества все матрицы с диагональным преобладанием, но не исчерпывается ими. Другой пример H-матриц — это неособенные треугольные матрицы, верхние или нижние [12].

Полученное нами представление уравнения (6)–(7) в рекуррентном виде (10) позволяет ответить на вопросы о соотношении результата Предложения 3 с другими версиями формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений, а также о качестве этого оценивания. Традиционной основой формального подхода к задаче внешнего оценивания множества решений (3) служит следующий результат, который мы приводим в современной и несколько расширенной формулировке.

Теорема Апостолатоса-Кулиша [6]. *Если матрица $\boldsymbol{G} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что спектральный радиус матрицы, составленной из модулей её элементов, меньше единицы, т. е. $\rho(|\boldsymbol{G}|) < 1$, то интервальная линейная система уравнений $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$ имеет единственное формальное решение в $\mathbb{IR}^n$. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса $\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{h}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, при любом начальном векторе $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и является внешней интервальной оценкой множества решений $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists G \in \boldsymbol{G})(\exists h \in \boldsymbol{h})(\, x = Gx + h\,)\,\}$ рассматриваемой интервальной системы.*

Приведение исходной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ к рекуррентному виду $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$ выполняется обычно различными преобразованиями, которые часто расширяют множество решений. Сравнивая этот результат с уравнением (10), можем видеть, что новая версия формального подхода, представленная в Предложении 2, является, по существу, очень удачно скомпонованной вариацией известного подхода, в которую неявно встроена процедура приведения системы к рекуррентному виду. В частности, из свойства субдистрибутивности классической интервальной арифметики следует включение $\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}x$, означающее, что решение уравнения (6)–(7) всегда содержится в решении уравнения, получаемого из теоремы Апостолатоса-Кулиша.

Из сказанного также следует, что оценки точности новой версии формального подхода не хуже, чем у традиционных, т.е. имеют первый порядок точности в зависимости от размеров множества решений [12].

Список литературы

[1] Г. Алефельд, Ю. Херцбергер *Введение в интервальные вычисления.* Москва: Мир, 1987.

[2] *Интервальный анализ и его приложения.* – Веб-сайт `http://www.nsc.ru/interval`

[3] С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев *Методы интервального анализа.* Новосибирск: Наука, 1986.

[4] С.П. Шарый *Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью.* – Известия Академии Наук. Теория и системы управления, 1997, №3, с. 51–61.

[5] С.П. Шарый *Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем.* – Вычислительные Технологии, 1998, т. 3, №2, с. 67–114.

[6] N. Apostolatos, U. Kulisch *Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen.* – Electron. Rechenanl., 1968, Bd. 10, S. 73–83.

[7] A. Berman, R.J. Plemmons *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* New York: Academic Press, 1979.

[8] E. Hansen *On linear algebraic equations with interval coefficients.* – В кн.: Topics in Interval Analysis / E. Hansen, ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969, p. 35–46.

[9] E. Kaucher *Interval analysis in the extended interval space* $\mathbb{IR}$. – В кн.: Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis) / G. Alefeld, R.D. Grigorieff, eds. Computing Supplement 2. Wien: Springer, 1980, p. 33–49.

[10] R. B. Kearfott, M. Nakao, A. Neumaier, S. Rump, S. P. Shary, P. van Hentenryck *Standardized notation in interval analysis.* – В кн.: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск-Северобайкальск, 2–8 июля 2005 г. Том 4 «Интервальный анализ». Иркутск: ИСЭМ, 2005, с. 107–113.

[11] C. Miranda *Un' osservatione su un teorema di Brouwer.* – Boll. Un. Mat. Ital. Serie II, 1940, т. 3, с. 5–7.

[12] A. Neumaier *Interval methods for systems of equations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[13] M.A. Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba *Formal solution to systems of interval linear or non-linear equations.* – Reliable Computing, 2002, vol. 8, p. 189–211.

[14] M.A. Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba *Interval estimations of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations.* – Reliable Computing, 2002, vol. 8, p. 283–305.

[15] S.P. Shary *A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity.* – Reliable Computing, 2002, vol. 8, №5, p. 321–418. (Электронная версия статьи доступна на `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf`)

YET ANOTHER VERSION OF FORMAL APPROACH TO OUTER ESTIMATION OF THE SOLUTION SETS TO INTERVAL LINEAR SYSTEMS

Sergey P. Shary

Institute of computational technologies SB RAS, Novosibirsk
e-mail: shary@ict.nsc.ru

Abstract. The work presents a new version of the so-called formal (algebraic) approach to outer interval estimation of the solution sets to interval linear systems based on Miranda theorem. The applicability scope of the new approach, quality of estimation as well as numerical methods for its implementation are discussed.

Key words: interval linear equations, solution set, Miranda theorem, outer interval estimate (enclosure), formal (algebraic) approach.