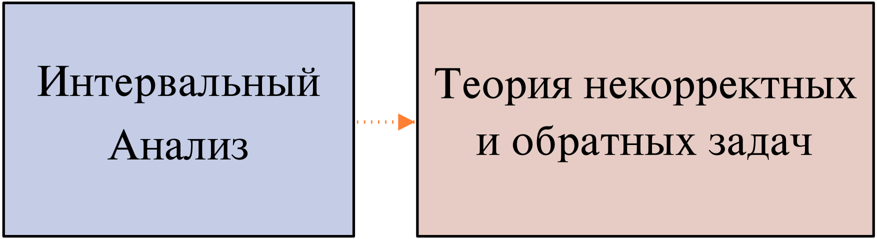
Интервальные методы для регуляризации плохообусловленных и некорректных задач

С.П. Шарый

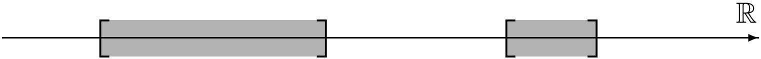
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирский государственный университет

XVIII Всероссийская конференция молодых учёных
по математическому моделированию и информационным технологиям

Место моего доклада



Интервалы



$$[1, 2], \quad [1000, 1003], \quad \ldots$$

Интервальный анализ

— это математическая дисциплина,

- предметом которой является решение задач с интервалами, возникающими в постановке задачи либо при её решении,
- метод которой характеризуется рассмотрением интервалов как самостоятельных целостных объектов, установлением между ними операций, отношений и т.п.

Интервальный анализ

— это математическая дисциплина,

- предметом которой является решение задач с интервалами, возникающими в постановке задачи либо при её решении,
- метод которой характеризуется рассмотрением интервалов как самостоятельных целостных объектов, установлением между ними операций, отношений и т.п.

Определение с интернет-портала

«Интервальный анализ и его приложения»

http://www.nsc.ru/interval

Теория некорректных и обратных задач

Корректно поставленная задача в математике — это задача, математическое решение которой существует, единственно и устойчиво.

Происходит от определения, данного Ж. Адамаром (1865-1963), согласно которому математические модели физических явлений должны иметь следующие свойства:

- решение существует,
- решение единственно,
- решение непрерывно зависит от данных
  в некоторой разумной топологии.

Корректно поставленная задача в математике — это задача, математическое решение которой существует, единственно и устойчиво.

Происходит от определения, данного Ж. Адамаром (1865-1963), согласно которому математические модели физических явлений должны иметь следующие свойства:

- решение существует,
- решение единственно,
- решение непрерывно зависит от данных в некоторой разумной топологии.

Некорректно поставленная задача — это задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи.

Задача дифференцирования некорректна

— решение задачи дифференцирования
не зависит непрерывно от входных данных.

Задача дифференцирования некорректна

— решение задачи дифференцирования
не зависит непрерывно от входных данных.

Если $f(x)$ — исходная функция, производную которой нам требуется найти, то возмущённая функция

$$f(x) + \tfrac{1}{n}\sin(nx)$$

при $n \to \infty$ будет равномерно сходиться к исходной, но её производная

$$f'(x) + \cos(nx)$$

не сходится к производной $f'(x)$.

Задача дифференцирования некорректна

— решение задачи дифференцирования
не зависит непрерывно от входных данных.

Если $f(x)$ — исходная функция, производную которой нам требуется найти, то возмущённая функция

$$f(x) + \frac{1}{n}\sin(nx)$$

при $n \to \infty$ будет равномерно сходиться к исходной, но её производная

$$f'(x) + \cos(nx)$$

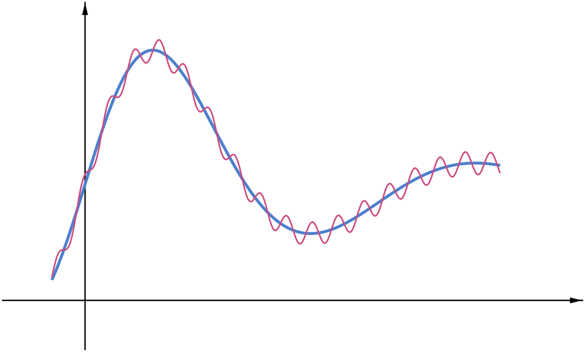
не сходится к производной $f'(x)$.

При возмущении исходной функции слагаемым $\frac{1}{n}\sin(n^2 x)$ производная вообще может сколь угодно сильно отличаться от производной исходной функции.

Задача дифференцирования некорректна

— решение задачи дифференцирования

не зависит непрерывно от входных данных.



Возмущение функции добавкой $\frac{1}{n}\sin(nx)$.

Некорректные задачи

- Дифференцирование.

Некорректные задачи

- Дифференцирование.
- Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма 1-го рода.

Некорректные задачи

- Дифференцирование.
- Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма 1-го рода.
- Задача Коши для эллиптических уравнений в частных производных.

Некорректные задачи

- Дифференцирование.
- Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма 1-го рода.
- Задача Коши для эллиптических уравнений в частных производных.
- Решение систем линейных алгебраических уравнений в случае, когда матрица системы плохообусловлена, особенна или прямоугольна.

Некорректные задачи

- Дифференцирование.
- Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма 1-го рода.
- Задача Коши для эллиптических уравнений в частных производных.
- Решение систем линейных алгебраических уравнений в случае, когда матрица системы плохообусловлена, особенна или прямоугольна.
- … … …

Зачем вообще необходимо решать некорректные задачи? …

Математические модели адекватно описывают воспроизводимые явления окружающего мира лишь в том случае, если они «устойчивы», т. е. их решения непрерывно зависят от входных данных.

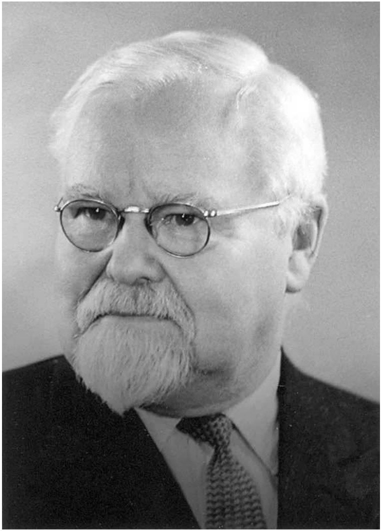
Зачем вообще необходимо решать некорректные задачи? ...

Математические модели адекватно описывают воспроизводимые явления окружающего мира лишь в том случае, если они «устойчивы», т. е. их решения непрерывно зависят от входных данных.

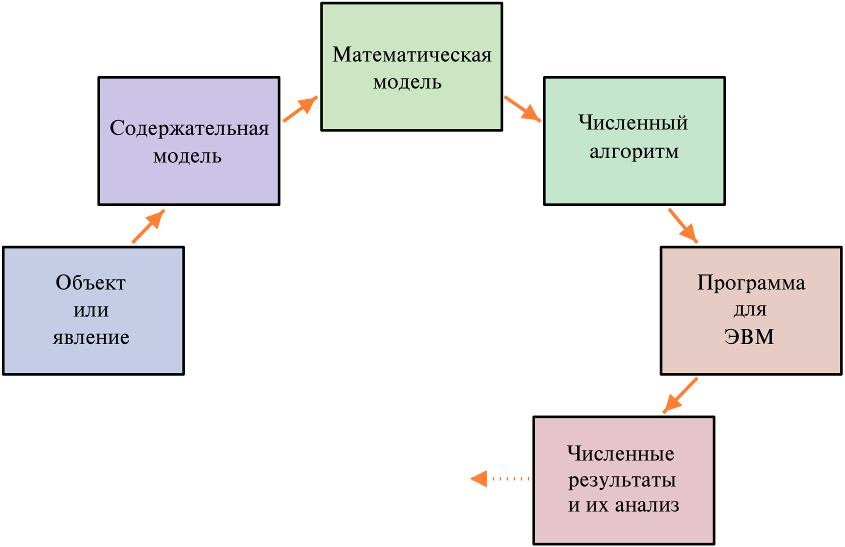
Но нет!

Тихонов А.Н.
Об устойчивости обратных задач //
Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

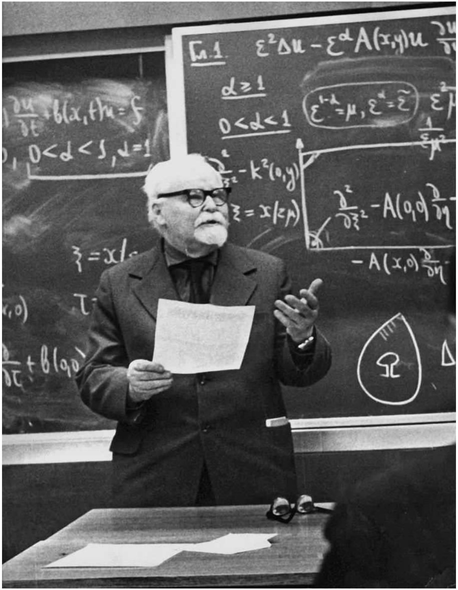
Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993)



Технологическая цепочка математического моделирования



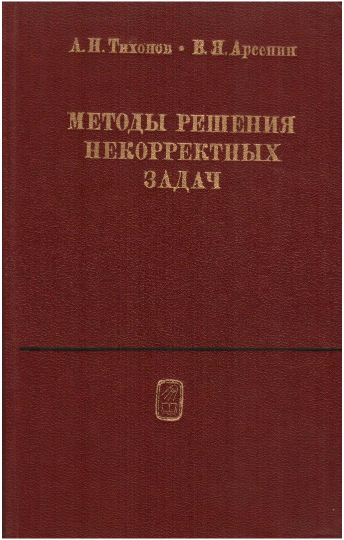
Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993)



Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993)

Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993)

Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993)

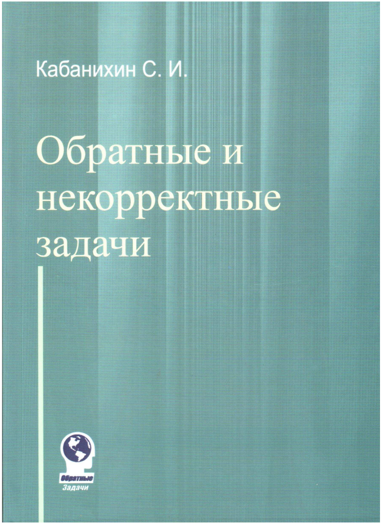


Тихонов А.Н. Арсенин В.Я.

Методы решения некорректных задач.

Москва: «Наука», 1979 год
2-е издание

Современная и довольно полная книга



Кабанихин С.И.

Обратные и некорректные задачи.

Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009 год

Краткое резюме доклада

В работе рассматривается решение, с помощью методов интервального анализа, систем линейных алгебраических уравнений, которые могут быть

- плохообусловленными,
- заданными неточно.

Предлагается процедура регуляризации,

которая использует интервальные методы

и названа *интервальной регуляризацией*.

Интервальный анализ

— это математическая дисциплина,

- предметом которой является решение задач с интервалами, возникающими в постановке задачи либо при её решении,
- метод которой характеризуется рассмотрением интервалов как самостоятельных целостных объектов, установлением между ними операций, отношений и т.п.

Определение с интернет-портала

«Интервальный анализ и его приложения»

http://www.nsc.ru/interval

Постановка задачи

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

с коэффициентами a_{ij} и свободными членами b_i, или, кратко,

$$Ax = b$$

с $n \times n$-матрицей $A = (\, a_{ij})$ и n-вектором правой части $b = (\, b_i)$.

Матрица A может быть плохообусловленной или особенной, необходимо устойчивым способом найти решение системы.

Постановка задачи

Возможную неточность в задании системы уравнений будем описывать также с помощью языка интервального анализа.

При неточности и неопределённости в данных будем рассматривать интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

Бóльшая часть наших конструкций нечувствительна к такой замене объекта рассмотрения.

Идея решения

Факт

Пусть A — $n \times n$-матрица и для какой-то подчинённой матричной нормы имеет место $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| > 1$.

В любой окрестности матрицы A найдутся такие матрицы, которые имеют лучшую чем у A обусловленность.

Идея решения

Факт

Пусть A — $n \times n$-матрица и для какой-то подчинённой матричной нормы имеет место $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| > 1$.

В любой окрестности матрицы A найдутся такие матрицы, которые имеют лучшую чем у A обусловленность.

Идея

Заменим решение системы уравнений $Ax = b$ на решение системы $\tilde{A}x = b$ с близкой и лучше обусловленной матрицей $\tilde{A}$.

При благоприятных обстоятельствах решение этой новой системы $\tilde{A}x = b$ будет также близким к искомому решению исходной.

Метод регуляризации М.М. Лаврентьева

— метод регуляризации операторных уравнений 1-го рода:

Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 31–33.

Небольшое возмущение оператора отодвигает спектр от нуля,
но не сильно влияет на решение …

Метод регуляризации М.М. Лаврентьева

— метод регуляризации операторных уравнений 1-го рода:

Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 31–33.

Небольшое возмущение оператора отодвигает спектр от нуля,
но не сильно влияет на решение …

В случае систем линейных уравнений вместо

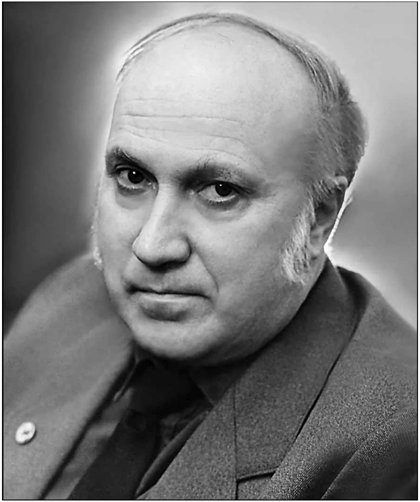
$$Ax = b$$

мы решаем систему с лучшей обусловленностью

$$(A + \alpha I)x = b,$$

где I — единичная матрица, α — величина сдвига.

Михаил Михайлович Лаврентьев (1932–2010)



А.Н. Тихонов и М.М. Лаврентьев

Метод регуляризации М.М. Лаврентьева

Если A — симметричная положительно полуопределённая матрица, то её собственные значения $\lambda(A) \geq 0$.

Тогда собственные значения матрицы $A + \alpha I$ равны $\lambda(A) + \alpha$, а число обусловленности относительно спектральной нормы

$$\operatorname{cond}(A + \alpha I) \;=\; \frac{\lambda_{\max}(A) + \alpha}{\lambda_{\min}(A) + \alpha}.$$

Оно уменьшается при $\alpha > 0$ в сравнении с

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$

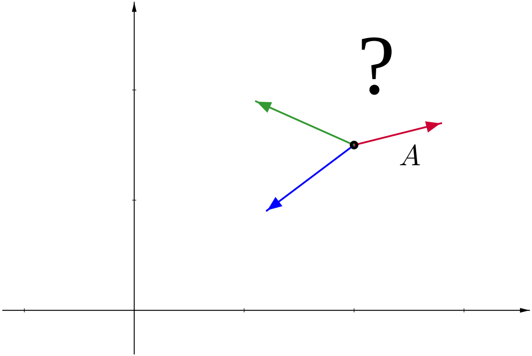
так как $f(x) = (b + x)/(a + x)$ — убывающая функция

при $x > 0$ и $b > a \geq 0$.

Проблемы

Но куда и как сдвигать матрицу A,

если нам ничего не известно о её свойствах?…



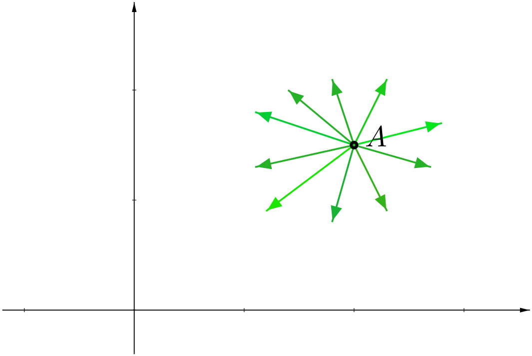
В наших исходных терминах,

как выбрать лучше обусловленную матрицу $\tilde{A}$ рядом с A?

Идея

Идея

В случае, когда ничего не известно об A,
нужно выполнить сдвиг A сразу «по всем направлениям»!



Тогда среди них обязательно найдётся нужное направление,
которое обеспечит желаемую регуляризацию
и улучшение свойств оператора.

Реализация идеи

В рамках традиционных типов данных, которыми оперируют анализ и вычислительная математика, реализовать такой неожиданный и экзотический рецепт едва ли возможно.

Реализация идеи

В рамках традиционных типов данных, которыми оперируют анализ и вычислительная математика, реализовать такой неожиданный и экзотический рецепт едва ли возможно.

Но подходящие инструменты

созданы в интервальном анализе!

См., к примеру,

http://www.nsc.ru/interval

Реализация идеи

В рамках традиционных типов данных, которыми оперируют анализ и вычислительная математика, реализовать такой неожиданный и экзотический рецепт едва ли возможно.

Но подходящие инструменты
созданы в интервальном анализе!

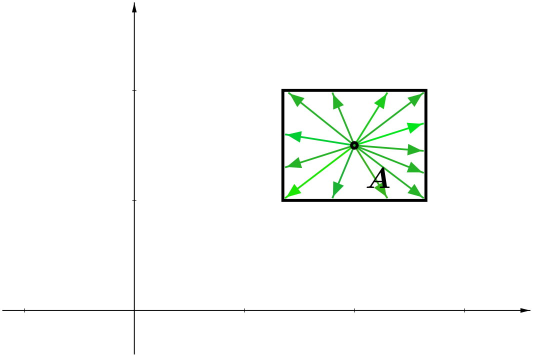
См., к примеру,

http://www.nsc.ru/interval

С помощью интервальных методов
наша идея получает элегантное воплощение.

Реализации идеи

Итак, сдвигаем матрицу A во все стороны
и на все возможные расстояния не больше некоторого порога!



…или, иными словами, накрываем всю окрестность матрицы A.

Реализации идеи

Итак, мы «раздуваем» матрицу A во все стороны,
превращая её в интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$.

Чтобы накрыть все возможные направления сдвига, положим

$$\boldsymbol{A} = A + \alpha \boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E} = ([-1, 1])$, α — параметр величины «раздутия».

Реализации идеи

Итак, мы «раздуваем» матрицу A во все стороны,
превращая её в интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$.

Чтобы накрыть все возможные направления сдвига, положим

$$\boldsymbol{A} = A + \alpha \boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E} = ([-1, 1])$, α — параметр величины «раздутия».

Вместо системы уравнений

$$Ax = b$$

будем «решать» интервальную систему линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}x = b,$$

причём процесс решения должен быть устойчивым.

Пример

Эволюция обусловленности при интервализации матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}.$$

Относительно спектральной нормы $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$ имеем

$$\mathrm{cond}(A) = 3.92 \cdot 10^4.$$

Нетрудно показать, что оно максимально для всех неособенных 2×2-матриц с положительными целыми элементами ≤ 100.

Пример

Эволюция обусловленности при интервализации матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}.$$

Относительно спектральной нормы $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$ имеем

$$\operatorname{cond}(A) = 3.92 \cdot 10^4.$$

Нетрудно показать, что оно максимально для всех неособенных 2×2-матриц с положительными целыми элементами ≤ 100.

Интервализуем матрицу A, добавив $[-1, 1]$ к каждому элементу:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [98, 100] & [99, 101] \\ [97, 99] & [98, 100] \end{pmatrix}.$$

Полученная интервальная матрица содержит особенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 98 & 99 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

и ещё много таких же особенных.

Полученная интервальная матрица содержит особенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 98 & 99 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

и ещё много таких же особенных.

Обусловленности «угловых матриц» интервализованной матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\begin{array}{cccc} 3.84 \cdot 10^4, & 197.02, & 201.12, & 1.31 \cdot 10^4, \\ 197.02, & 98.76, & 1.31 \cdot 10^4, & 195.12, \\ 197.0, & 3.92 \cdot 10^4, & 99.26, & 199.02 \\ 3.92 \cdot 10^4, & 199.00, & 199.02, & 4.0 \cdot 10^4. \end{array}$$

10 «угловых» (вершинных) матриц из 16
имеют обусловленности ≤ 200.

Более тщательные расчёты показывают, что обусловленность 98.76 является вообще минимальной среди всех матриц из $\boldsymbol{A}$.

Интервальная регуляризация

Для системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

нужно организовать интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с $\boldsymbol{A} \ni A$ и $\boldsymbol{b} \ni b$ и далее решить её «устойчиво», опираясь, по-возможности, на хорошо обусловленные матрицы из $\boldsymbol{A}$.

Что такое «решение интервальных уравнений»?

В современном интервальном анализе в понятие «решения» интервального уравнения или системы уравнений может вкладываться различный смысл.

Как правило, решения интервальных задач — это оценки (чаще всего, тоже интервальные) тех или иных «множеств решений», возникающих в связи с интервальной постановкой.

«Множество решений» может определяться различными способами в зависимости от типов неопределённости, который несут интервалы входных данных задачи.

Наиболее простое — *объединённое множество решений.*

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

оно определяется как

$$\varXi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;:=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \,\bigr\}$$

Наиболее простое — *объединённое множество решений.*

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

оно определяется как

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;:=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \,\}$$

Объединённое множество решений объединяет вклады всех точечных систем уравнений, образующих интервальную систему.

Что такое «решение интервальных уравнений»?

Интервальная неопределённость носит двойственный характер:

- неопределённость A-типа (A-неопределённость), которая соответствует применению логического квантора «$\forall$» по интервальной переменной, т е. «$\forall x \in \boldsymbol{x}$;
- неопределённость E-типа (E-неопределённость), которая соответствует применению логического квантора «$\exists$» по интервальной переменной, т е. «$\exists x \in \boldsymbol{x}$.

Как следствие, различные множества решений для интервальных систем уравнений определяются различными комбинациями этих кванторов, которые применяются к интервальным параметрам.

Наиболее простое — *объединённое множество решений.*

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

оно определяется как

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;:=\; \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \,\right\}$$

Наиболее простое — *объединённое множество решений.*

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

оно определяется как

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;:=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \,\}$$

Объединённое множество решений объединяет вклады всех точечных систем уравнений, образующих интервальную систему.

Теоретико-множественное представление

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigcup_{A \in \boldsymbol{A}} \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \boldsymbol{b} \,\}$$

Диагноз

Если интервальная система уравнений включает особенные или плохообусловленые точечные системы, для которых решение изменяется очень сильно при вариациях данных, то объединённое множество решений включит в себя все эти изменения.

Объединённое множество решений

не играет никакой стабилизирующей роли.

Диагноз

Если интервальная система уравнений включает особенные или плохообусловленые точечные системы, для которых решение изменяется очень сильно при вариациях данных, то объединённое множество решений включит в себя все эти изменения.

Объединённое множество решений
не играет никакой стабилизирующей роли.

$$\Downarrow$$

Объединённое множество решений не годится для устойчивого решения системы $Ax = b$, так как его устойчивость определяется решениями самых неустойчивых систем.

Wanted!

Множество решений интервальной системы уравнений, которое строится по наиболее устойчивым решениям точечных систем, которые образуют интервальную систему уравнений.

Wanted!

Множество решений интервальной системы уравнений, которое строится по наиболее устойчивым решениям точечных систем, которые образуют интервальную систему уравнений.

?! . . .

Отгадка

Среди множеств решений для интервальных систем уравнений наиболее устойчивым и, как следствие, наиболее подходящим для наших целей является *допусковое множество решений*.

Отгадка

Среди множеств решений для интервальных систем уравнений наиболее устойчивым и, как следствие, наиболее подходящим для наших целей является *допусковое множество решений.*

Для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ оно определяется как

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ := \ \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\ \}$$

Это множество всех таких векторов x, что произведение Ax попадает в интервал правой части $\boldsymbol{b}$ при любой матрице $A \in \boldsymbol{A}$.

Эквивалентно,

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b})\ \}.$$

Наличие условия с квантором всеобщности "$\forall A \in \boldsymbol{A}$" в определении допускового множества решений имеет следствием

Теоретико-множественное представление

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \boldsymbol{b} \,\}$$

Наличие условия с квантором всеобщности "$\forall A \in \boldsymbol{A}$" в определении допускового множества решений имеет следствием

Теоретико-множественное представление

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigcap_{A \in \boldsymbol{A}} \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \boldsymbol{b} \,\right\}$$

То есть, допусковое множество решений является наименее чувствительным к изменениям в матрице среди множеств решений интервальных систем.

Оно не больше «самого устойчивого» множества решений $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \in \boldsymbol{b}\}$, которое определяется матрицей $\tilde{A}$ с наилучшей обусловленностью из $\boldsymbol{A}$.

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Хотя некоторые точечные матрицы из $\boldsymbol{A}$ могут быть плохообусловленными или даже особенными, но их влияние компенсируется присутствием в этой же интервальной матрице «хороших» точечных матриц.

Хорошие точечные матрицы из $\boldsymbol{A}$ делают допусковое множество решений в целом ограниченным и устойчивым.

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Хотя некоторые точечные матрицы из $\boldsymbol{A}$ могут быть плохообусловленными или даже особенными, но их влияние компенсируется присутствием в этой же интервальной матрице «хороших» точечных матриц.

Хорошие точечные матрицы из $\boldsymbol{A}$ делают допусковое множество решений в целом ограниченным и устойчивым.

Отличие допускового множества решений от объединённого выражается в том, что при расширении интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ объединённое множество решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ расширяется, тогда как допусковое множество решений уменьшается.

Наша постановка задачи

Итак, для интервальной системы линейных алгебраических уравнений, которая получается после «обинтерваливания» исходной плохообусловленной системы, мы будем рассматривать допусковое множество решений $\varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Нас интересуют точки из него или его оценки.

Задачу исследования и оценивания допускового множества решений для интервальных систем уравнений называют математической «задачей о допусках».

Нам, таким образом, требуется её решение, возможно, частичное, которое и будет взято в качестве псевдорешения исходной задачи.

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Допусковое множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений — выпуклое полиэдральное (многогранное) множество в $\mathbb{R}^n$.

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

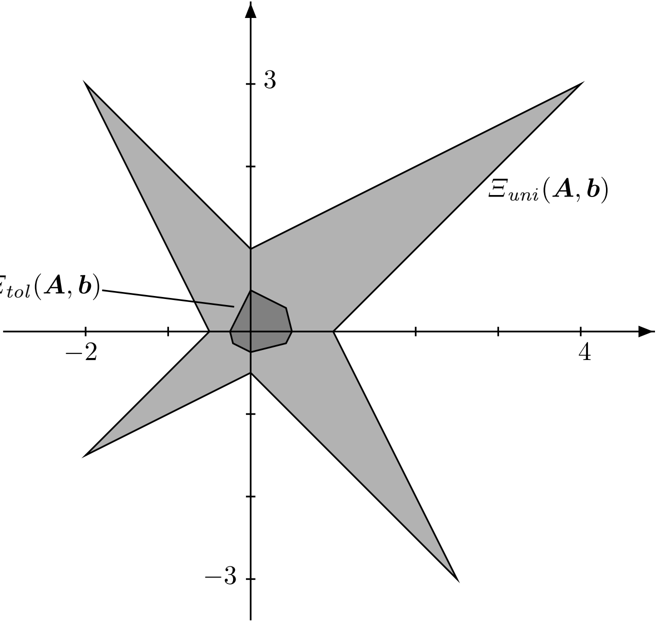
Допусковое множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений — выпуклое полиэдральное (многогранное) множество в $\mathbb{R}^n$.

Пример.

Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,2] \\ [-1,2] \end{pmatrix}$$

объединённое и допусковое множества решений выглядят следующим образом …



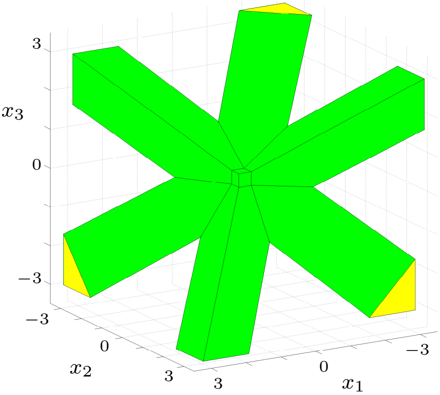
3
$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
-2
4
-3

Пример.

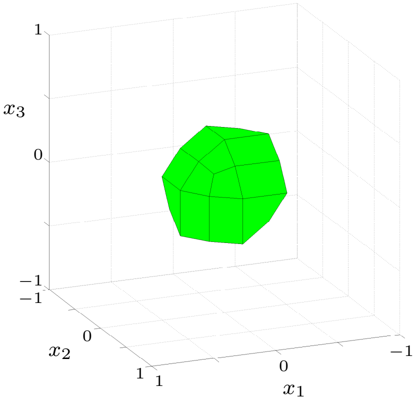
Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 2.8 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 2.8 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 2.8 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix},$$

наши множества решений выглядят следующим образом ...



Объединёное
множество решений



Допусковое
множество решений

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Теорема И. Рона

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$ для некоторых векторов x', $x'' \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\left\{\begin{array}{rcr} \overline{\boldsymbol{A}}x' - \underline{\boldsymbol{A}}x'' & \leq & \overline{\boldsymbol{b}}, \\ -\underline{\boldsymbol{A}}x' + \overline{\boldsymbol{A}}x'' & \leq & -\underline{\boldsymbol{b}}, \\ x',\, x'' & \geq & 0. \end{array}\right.$$

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Задача линейного программирования и задача решения систем линейных неравенств разрешимы за полиномиальное от размеров задачи время (метод эллипсоидов Л. Хачияна, 1979 год).

Как следствие, из теоремы И. Рона вытекает, что распознавание пустоты/непустоты допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений и нахождение точки из него — также полиномиально разрешимые задачи.

Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Теорема И. А. Шарой

Пусть $\boldsymbol{A}_{i:}$ — *i-ая строка интервальной матрицы* $\boldsymbol{A}$, *и* $\operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:}$ — *множество вершин этого интервального вектора.*

Для интервальной $m \times n$-системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *допусковое множество решений* $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *представимо в виде*

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigcap_{i=1}^{m} \; \bigcap_{a \in \operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:}} \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid ax \in \boldsymbol{b}_i \,\},$$

т. е. как пересечение гиперполос, число которых не превосходит $\sum_{i=1}^{m} |\operatorname{vert} \boldsymbol{A}_{i:}|$ *и, тем более, не превосходит* $m \cdot 2^n$.

Каждое из включений

$$ax \in \boldsymbol{b}_i \qquad \text{для} \quad a \in \boldsymbol{A}_{i:},$$

равносильно двустороннему линейному неравенству

$$\underline{\boldsymbol{b}}_i \le a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le \overline{\boldsymbol{b}}_i$$

задаёт гиперполосу в $\mathbb{R}^n$.

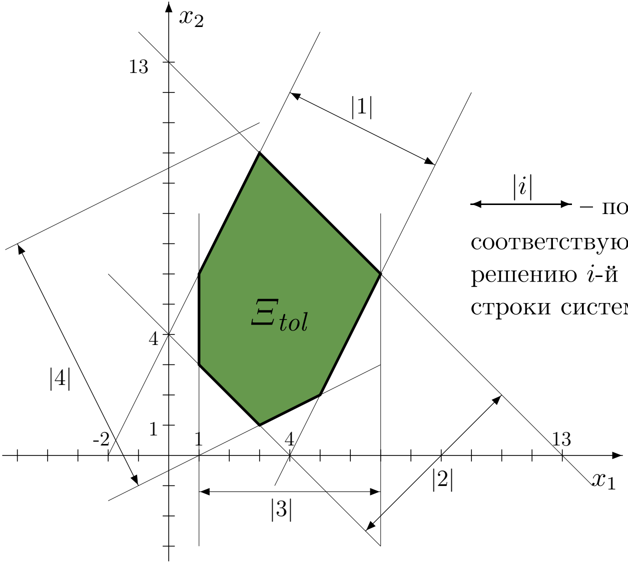
Теорема И.А. Шарой даёт представление допускового множества решений через систему двусторонних линейных неравенств, количество которых существенно меньше общего числа крайних («угловых») неравенств интервальной системы линейных уравнений, равное $2^{m(n+1)}$.

Пример.

Для интервальной линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-8, \ 4] \\ [\ \ 4, 13] \\ [\ \ 1, \ 7] \\ [-1, 19] \end{pmatrix}$$

допусковое множество решений может быть построено следующим образом ...



$\xleftrightarrow{\;|i|\;}$ – полоса, соответствующая решению i-й строки системы

Специфика допускового множества решений

Допусковое множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений может оказаться пустым даже для совершенно обычных данных.

Это происходит, когда интервалы правой части $\boldsymbol{b}$ «относительно узки» в сравнении с интервалами в матрице $\boldsymbol{A}$. Тогда размах произведений Ax при $A \in \boldsymbol{A}$ превышает ширину «коридора» $\boldsymbol{b}$, в которую должно вписаться это произведение.

Например, допусковое множество решений пусто для интервального уравнения $[2, 3]\, x = [3, 4]$.

Специфика допускового множества решений

Допусковое множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений может оказаться пустым даже для совершенно обычных данных.

Это происходит, когда интервалы правой части $\boldsymbol{b}$ «относительно узки» в сравнении с интервалами в матрице $\boldsymbol{A}$. Тогда размах произведений Ax при $A \in \boldsymbol{A}$ превышает ширину «коридора» $\boldsymbol{b}$, в которую должно вписаться это произведение.

Например, допусковое множество решений пусто

для интервального уравнения $[2,3]\,x = [3,4]$.

Чтобы сделать допусковое множество решений непустым, можно искусственно расширить правую часть интервальной линейной системы уравнений.

Инструменты для исследования и оценивания допускового множества решений

- Применение систем линейных неравенств
  из теорем И. Рона и И.А. Шарой.

- Формальный алгебраический подход.
  Оценивание множества решений сводится к решению, в алгебраическом смысле, интервальной линейной системы того же вида.

- Метод распознающего функционала.
  Допусковое множество решений представляется как множество уровня некоторого специального распознающего функционала. С помощью его максимизации находится точка с «наибольшей совместностью».

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

— алгебраическая система, образованная вещественными интервалами $\boldsymbol{x} = [\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,]$ так, что для любой арифметической операции «$\star$» из $\{\,+\,,-\,,\,\cdot\,,/\,\}$ результат определяется «по представителям», как

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} = \{\, x \star y \mid x \in \boldsymbol{x},\, y \in \boldsymbol{y} \,\}.$$

Конструктивные формулы

для интервальных арифметических операций:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \left[\,\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}\,\right], \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \left[\,\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\,\right],$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left[\,\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\,\right],$$

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \left[\,1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}}\,\right] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0.$$

Характеризация точек допускового множества решений

Для интервальной системы линейных уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b},$$

где «$\cdot$» интервальное матричное умножение.

Метод распознающего функционала

Характеризация точек допускового множества решений

Для интервальной системы линейных уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b},$$

где « $\cdot$ » интервальное матричное умножение.

Произведение матриц $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ik}) \in \mathbb{IR}^{m \times l}$ и $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{kj}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$ есть такая матрица $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, что

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{a}_{ik} \boldsymbol{b}_{kj}.$$

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

— алгебраическая система, образованная вещественными интервалами $\boldsymbol{x} = [\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,]$ так, что для любой арифметической операции «$\star$» из $\{\,+\,,-\,,\,\cdot\,,/\,\}$ результат определяется «по представителям», как

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} \;=\; \{\; x \star y \;\mid\; x \in \boldsymbol{x},\, y \in \boldsymbol{y} \;\}.$$

Конструктивные формулы

для интервальных арифметических операций:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \bigl[\,\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\; \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}\,\bigr], \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \bigl[\,\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\; \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\,\bigr],$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \Bigl[\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\; \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\Bigr],$$

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \bigl[\,1/\overline{\boldsymbol{y}},\; 1/\underline{\boldsymbol{y}}\,\bigr] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0.$$

Если $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$, то по определению интервального матричного умножения вместо $\boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b}$ можно написать

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \subseteq \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Представим правые части этих включений в виде суммы средней точки $\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i$ и уравновешенного интервала $\bigl[-\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i\bigr]$:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \;\subseteq\; \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i + \bigl[-\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i\bigr], \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Добавляя теперь к обеим частям включений по $(-\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i)$, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \;-\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i \;\subseteq\; \bigl[-\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i\bigr], \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Включение интервала в $\left[-\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i, \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i\right]$ эквивалентно неравенствам

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \ - \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i \right| \ \leq \ \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

что равносильно

$$\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \ - \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i \right| \ \geq \ 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Наконец, можно свернуть по i конъюнкцию неравенств:

$$\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} \ \geq \ 0.$$

Метод распознающего функционала

Теорема.
Пусть $\boldsymbol{A}$ *— интервальная* $m \times n$*-матрица,* $\boldsymbol{b}$ *— интервальный* m*-вектор. Тогда выражением*

$$\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

задаётся отображение $\operatorname{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \to \mathbb{R}$*, такое что принадлежность точки* $x \in \mathbb{R}^n$ *допусковому множеству решений* $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *равносильна неотрицательности в* x *отображения* Tol*, т. е.*

$$x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ge 0.$$

Метод распознающего функционала

Допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ является множеством уровня

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0 \,\}$$

отображения Tol по первому аргументу x

при фиксированных $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$.

Мы будем называть отображение Tol
«распознающим функционалом» допускового множества решений:

область значений Tol — вещественная ось $\mathbb{R}$,

посредством знака своих значений Tol «распознаёт» принадлежность точки множеству $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

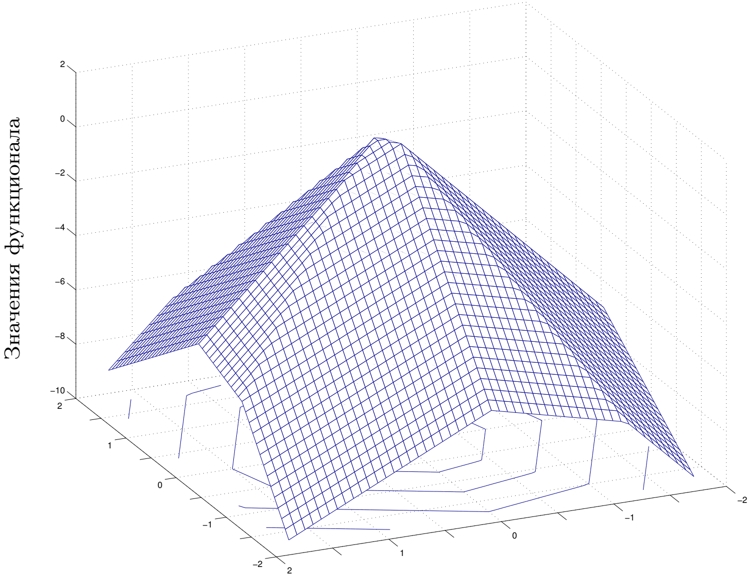
Свойства распознающего функционала

Функционал Tol является непрерывной функцией своих аргументов. Более того, он непрерывен по Липшицу.

Функционал Tol — вогнутый по переменной x всюду в $\mathbb{R}^n$.

Функционал $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ — полиэдральный, т. е. его подграфик — полиэдральное множество.

Функционал $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ достигает конечного максимума на всём пространстве $\mathbb{R}^n$.



Типичный график распознающего функционала

Свойства распознающего функционала

Если $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то x — точка топологической внутренности $\mathrm{int}\ \mathit{\Xi}_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ допускового множества решений.

Свойства распознающего функционала

Если $\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то x — точка топологической внутренности $\operatorname{int} \varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ допускового множества решений.

Верно и обратное утверждение.

Пусть интервальная линейная система уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ такова, что для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, m$ в i-ой строке матрицы $\boldsymbol{A}$ существует хотя бы один ненулевой элемент или же не равен нулю ни один из концов соответствующей компоненты правой части $\boldsymbol{b}_i$. Тогда из принадлежности $x \in \operatorname{int} \varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, следует строгое неравенство $\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.

Метод распознающего функционала

Технология исследования непустоты/непустоты допускового множества решений интервальной системы линейных уравнений:

Метод распознающего функционала

Технология исследования непустоты/непустоты допускового множества решений интервальной системы линейных уравнений:

Для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Пусть $U = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $U \geq 0$, то $\tau \in \varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, т. е. допусковое множество решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ непусто и τ лежит в нём;
- если $U > 0$, то $\tau \in \mathrm{int}\,\varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, и принадлежность точки τ множеству решений устойчива к малым возмущениям $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$;
- если $U < 0$, то $\varXi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$, т. е. допусковое множество решений интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ пусто.

Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений

Верно даже большее:

значения распознающего функционала в точке дают количественную меру совместности этой точки по отношению к допусковому множеству решений интервальной системы.

Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений

Верно даже большее:

значения распознающего функционала в точке дают количественную меру совместности этой точки по отношению к допусковому множеству решений интервальной системы.

Следовательно, аргумент максимума распознающего функционала, вне зависимости от того, принадлежит он непустому допусковому множеству решений или нет, является точкой максимума совместности для заданной интервальной линейной системы.

Его можно считать «псевдорешением» исходной регуляризуемой системы линейных алгебраических уравнений.

Максимизация распознающего функционала на практике может быть выполнена с помощью методов негладкой выпуклой оптимизации, получивших большое развитие в последнее время.

Максимизация распознающего функционала на практике может быть выполнена с помощью методов негладкой выпуклой оптимизации, получивших большое развитие в последнее время.

Автор использовал для этой цели r-алгоритмы Н.З. Шора, разработанные в Институте кибернетики НАН Украины:

Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градинетов // Кибернетика. 1971. №3. С. 51–59.

Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r-алгоритмы. Кишинэу: «Эврика», 2014.

Стецюк П.И. Субградиентные методы `ralgb5` и `ralgb4` для минимизации овражных выпуклых функций // Вычислительные Технологии. 2017. №2. С. 127–149.

Другая возможность для реализации нашего подхода появилась с развитием методов отделяющих плоскостей:

Nurminski E.A. Separating plane algorithms for convex optimization // Mathematical Programming. 1997. Vol. 76. P. 373–391.

Vorontsova E. Extended separating plane algorithm and NSO-solutions of PageRank problem // Discrete Optimization and Operations Research. Proceedings of 9th International Conference DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19-23, 2016 / Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869. Cham, Switzerland: Springer International, 2016. P. 547–560.

Воронцова Е.А. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса // Вычислительные Технологии. 2017. №2. С. 67–84.

Интервальная регуляризация при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

Интервальная регуляризация при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

Матрица A системы «раздувается» на некоторую величину до интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \ni A$, либо интервализуется согласно информации о погрешностях в данных задачи.

Интервальная регуляризация при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

Матрица A системы «раздувается» на некоторую величину до интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \ni A$, либо интервализуется согласно информации о погрешностях в данных задачи.

Затем мы численно находим безусловный максимум по x распознающего функционала $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ допускового множества решений полученной интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Интервальная регуляризация при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

Матрица A системы «раздувается» на некоторую величину до интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \ni A$, либо интервализуется согласно информации о погрешностях в данных задачи.

Затем мы численно находим безусловный максимум по x распознающего функционала $\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ допускового множества решений полученной интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Аргумент этого максимума является искомым псевдорешением системы $Ax = b$.

Открытые вопросы

Интересный открытый вопрос — выбор величины интервального раздувания матрицы системы A, т. е. ширины элементов $\boldsymbol{A}$.

Иногда он решается естественно на основе информации о погрешностях в данных, так как исходная матрица получается уже интервальной.

Технологические вопросы реализации численных методов.

$\dots \qquad \dots$

Заключение

Предлагается новый подход к регуляризации плохообусловленных и неточно заданных систем линейных алгебраических уравнений, основанный на методах интервального анализа.

Достоинства интервальной регуляризации:

- Существенно более слабая, чем в других подходах, зависимость от свойств матрицы системы A.

  Они учитываются как бы автоматически самим методом.

Заключение

Предлагается новый подход к регуляризации плохообусловленных и неточно заданных систем линейных алгебраических уравнений, основанный на методах интервального анализа.

Достоинства интервальной регуляризации:

- Существенно более слабая, чем в других подходах, зависимость от свойств матрицы системы A.

  Они учитываются как бы автоматически самим методом.

- Просто и естественно учитывается информация о погрешностях данных задачи, как в матрице A, так и в правой части b.

  Нам нужно лишь дополнительно «раздуть» интервальную матрицу и правую часть с учётом этой погрешности данных.

Благодарю за внимание!