ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

в задачах обработки данных и восстановления зависимостей

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН

Новосибирский государственный университет

Интервалы

$$[1, 2], \qquad [1000, 1003], \qquad \ldots$$

Интервальный анализ

— *это математическая дисциплина,*

- *предметом которой является решение задач с интервалами, возникающими в постановке задачи либо при её решении,*
- *метод которой характеризуется рассмотрением интервалов как самостоятельных целостных объектов, установлением между ними операций, отношений и т.п.*

Определение с интернет-портала

«Интервальный анализ и его приложения»

http://www.nsc.ru/interval

«Обработка данных» и «анализ данных»

теория идентификации

теория оценивания параметров

регрессионный анализ

кластерный анализ

корелляционный анализ

дисперсионный анализ

обработка изображений

анализ временных рядов

...

I. Постановка задачи

Восстановление зависимостей

по неточным данным

Задача восстановления зависимостей

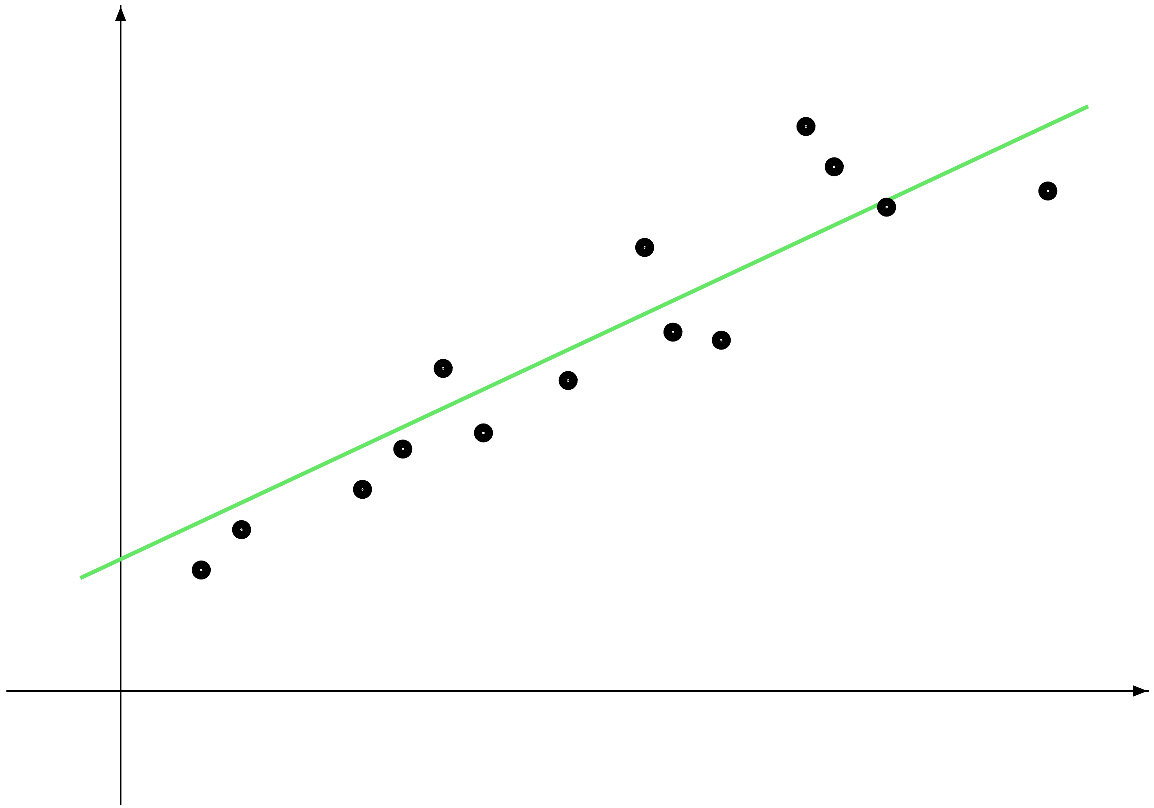
— по эмпирическим данным требуется построить зависимость заданного вида между «входными» и «выходными» величинами

$$b = x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

с неизвестными коэффициентами x_i, которые «наилучшим образом» соответствуют заданному набору значений

$$\begin{array}{ccccc} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)}, & b^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_n^{(2)}, & b^{(2)}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(m)}, & a_2^{(m)}, & \ldots, & a_n^{(m)}, & b^{(m)}. \end{array}$$

Задача восстановления зависимостей



Задача восстановления зависимостей

= задача идентификации параметров объекта

— структурная схема «объекта идентификации»

задаём значения на входе — измеряем отклики на выходе

Задача восстановления зависимостей

Переобозначая $a_{ij} := a_j^{(i)}$ и $b_i := b^{(i)}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ x_0 + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с $m\times(n+1)$-матрицей $A = (\,a_{ij})$ и m-вектором $b = (\,b_i)$.

Её решение — обычное или в обобщённом смысле —
принимается за оценку параметров $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Задача восстановления зависимостей

Данные почти всегда неточны . . .

Какую модель неопределённости данных мы принимаем?

Традиционный выбор — теоретико-вероятностная модель ошибок (К.Ф. Гаусс, П.С. Лаплас и т. д.):

$$\boxed{\text{ошибки измерений и наблюдений — это случайные величины теории вероятностей с (более-менее) известными характеристиками}}$$

Теоретико-вероятностная модель ошибок

Есть ли статистическая устойчивость (однородность)?

Каков вид распределения? Каковы его характеристики?

Достаточен ли объём выборки? «Проблема малых выборок»

Имеют ли данные корелляция? Или же они независимы?

Какова «робастность» модели обработки данных?

Удобство вычислительных методов?

...

— *дискуссия Ю.И. Алимова и В.Н. Тутубалина в 70–90-е годы XX века*

Восстановление зависимостей по неточным данным

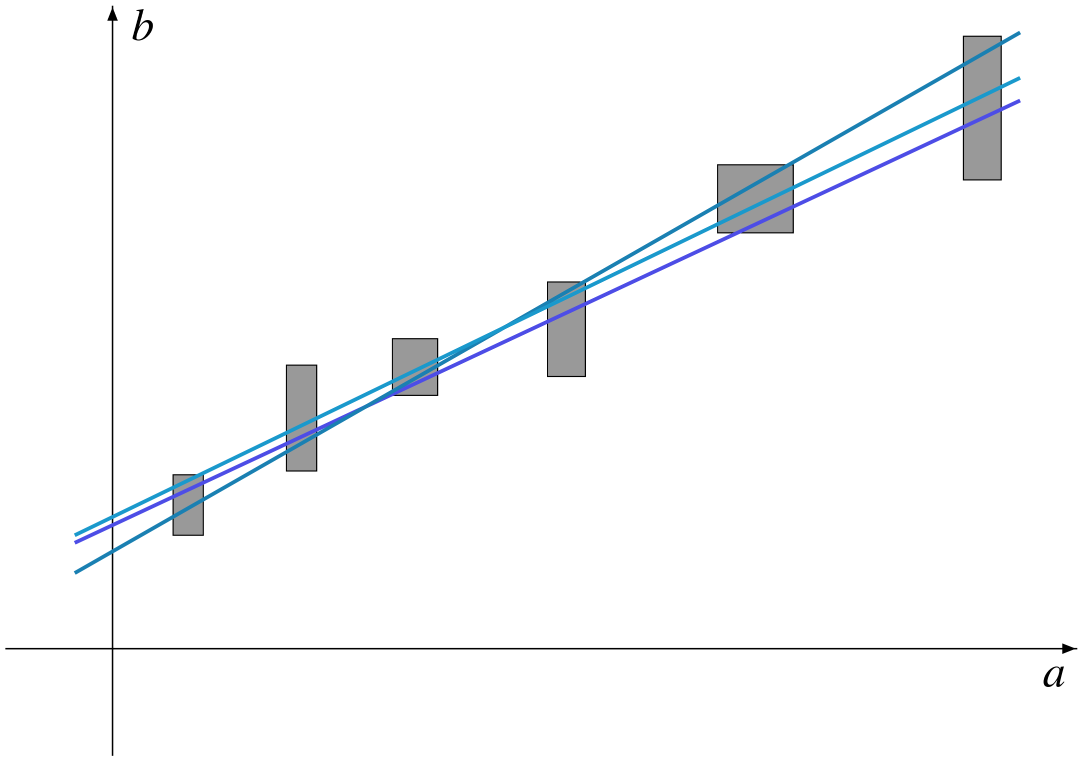
Неопределённости и неточности в данных

часто удобнее описывать интервально

Даны интервальные оценки величин, т. е. принадлежности a_{ij} и b_i некоторым интервалам:

$$a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} = [\,\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}] \qquad \text{и} \qquad b_i \in \boldsymbol{b}_i = [\,\underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i]$$

Восстановление зависимостей по неточным данным



Восстановление зависимостей по неточным данным

Л.В. Канторович — 1962 год

М.Л. Лидов, С.И. Спивак, А.П. Вощинин, А.Ф. Бочков, А.И. Орлов,

Н.М. Оскорбин, С.И. Жилин, С.И. Носков, О.Е. Родионова, . . .

J.P.Norton, M. Milanese, G. Belforte, L. Pronzato, E. Walter . . .

Канторович Л.В. О некоторых новых подходах
к вычислительным методам и обработке наблюдений
// Сибирский Математический Журнал. – 1962.
– Том 3, №5. – С. 701–709.

Леонид Витальевич Канторович (1912–1986)

действительный член АН СССР,

основатель кафедры
вычислительной математики НГУ,

лауреат Сталинской
и Ленинской премий,

лауреат Нобелевской премии

Л.В. Канторович в годы
Великой Отечественной войны

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том III, № 5 Сентябрь — Октябрь 1962 г.

Л. В. КАНТОРОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ПОДХОДАХ К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ И ОБРАБОТКЕ НАБЛЮДЕНИЙ*.

Введение

Имевшие место сдвиги в развитии математики и вычислительных средств должны иметь следствием коренные изменения в технике, а возможно и теории численных методов и обработки наблюдений. В той или иной форме отдельные высказываемые ниже соображения встречались в литературе, но не разрабатывались систематически. В частности, мы считаем, что существенное значение имеют следующие моменты:

1. Бóльшая ответственность за результаты расчетов, на которых сейчас нередко базируются решения, касающиеся сложных дорогостоящих объектов современной физики и техники, наличие больших не наблюдаемых этапов при машинных вычислениях повышают требования к надежности окончательных и промежуточных данных, получаемых в процессе применения численных методов и при обработке данных наблюдений. Это обуславливает систематический переход от построения приближенных значений и результатов, к получению точных двухсторонних границ для искомых величин или, если говорить о нечисловых величинах, областей расположения искомых и наблюдаемых величин; иначе говоря возникает задача возможно более точного описания расположения этих величин в соответствующих пространствах их значений. Идеи теорий полуупорядоченных пространств и операций в них, а также некоторых других абстрактных систем объектов дают определенную теоретическую базу для реализации этой точки зрения.

Восстановление зависимостей по неточным данным

Постановка Л.В. Канторовича и его последователей:

неопределённости во входных данных отсутствуют, т. е. $\boldsymbol{a}_{ij} = a_{ij}$.

Тогда

$$\underline{\boldsymbol{b}}_i \;\leq\; x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \;\leq\; \overline{\boldsymbol{b}}_i,$$

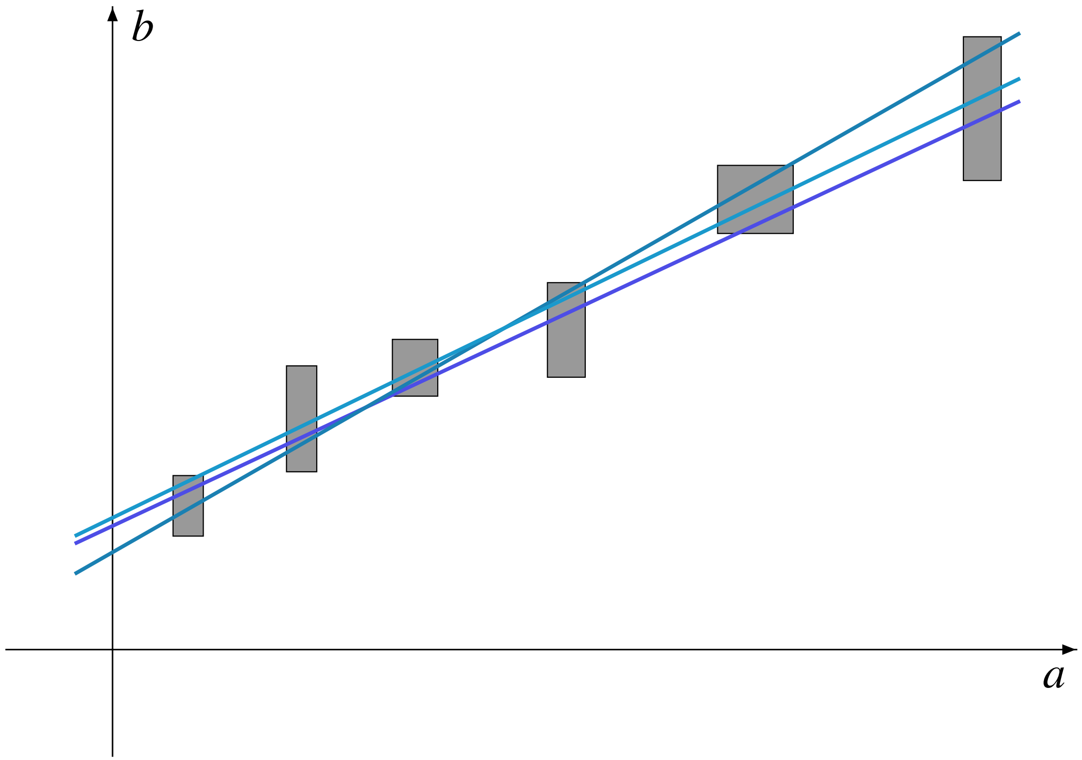
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

т. е. получаем систему линейных неравенств, которую можно решать, к примеру, методами линейного программирования.

Восстановление зависимостей по неточным данным

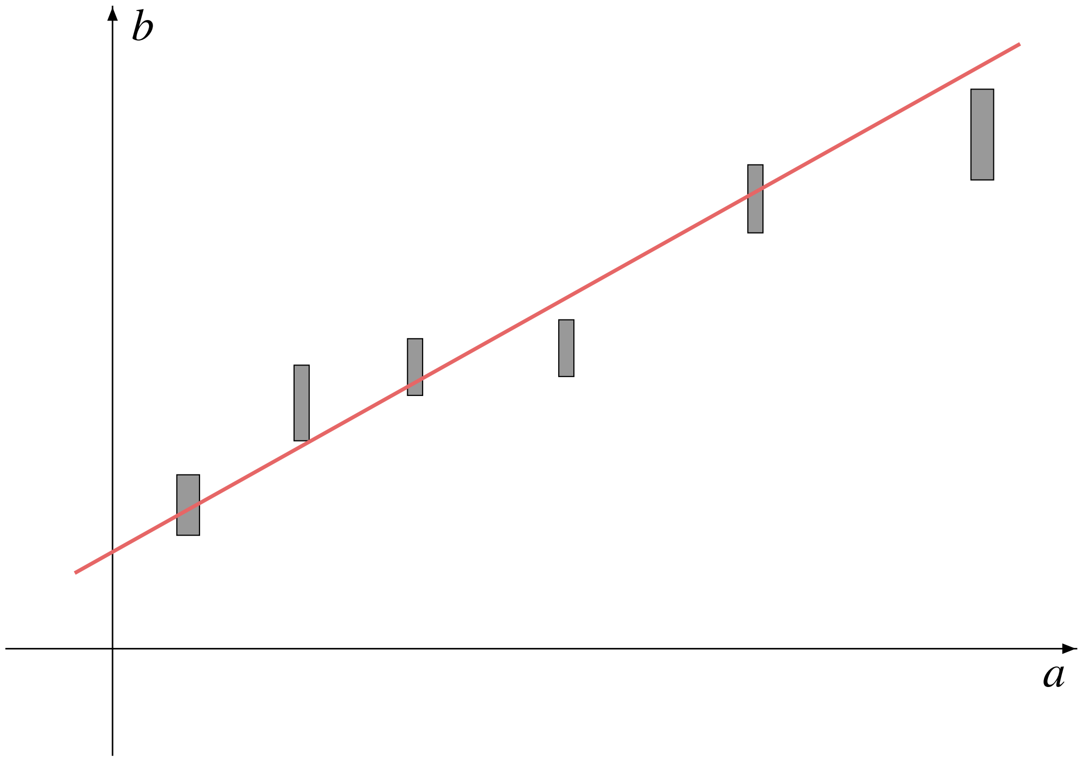
Набор параметров x_0, x_1, . . . , x_n объекта *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in}, \boldsymbol{b}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если для каждого наблюдения i в пределах измеренных интервалов найдутся такие представители $a_{i1} \in \boldsymbol{a}_{i1}$, $a_{i2} \in \boldsymbol{a}_{i2}$, . . . , $a_{in} \in \boldsymbol{a}_{in}$ и $b_i \in \boldsymbol{b}_i$, что

$$x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$



Восстановление зависимостей по неточным данным

Иногда не существует набора параметров, согласующихся с данными



Но при существенной интервальной неопределённости множество параметров, согласующихся с данными, как правило, имеет ненулевую меру и устойчиво к малым возмущениям в данных.

Восстановление зависимостей по неточным данным

Множество параметров, согласующихся с данными —

$$\Bigl\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\Big|\; \bigl(\, \exists (a_{ij}) \in (\boldsymbol{a}_{ij}) \,\bigr)\bigl(\, \exists (b_i) \in (\boldsymbol{b}_i) \,\bigr)\bigl(\, Ax = b \,\bigr) \,\Bigr\},$$

где A — это $m \times (n+1)$-матрица с элементами 1 в первом столбце и a_{ij} на остальных местах, $b = (b_i)$.

В теории восстановления зависимостей оно называется

множеством неопределённости параметров,

множеством возможных значений параметров,

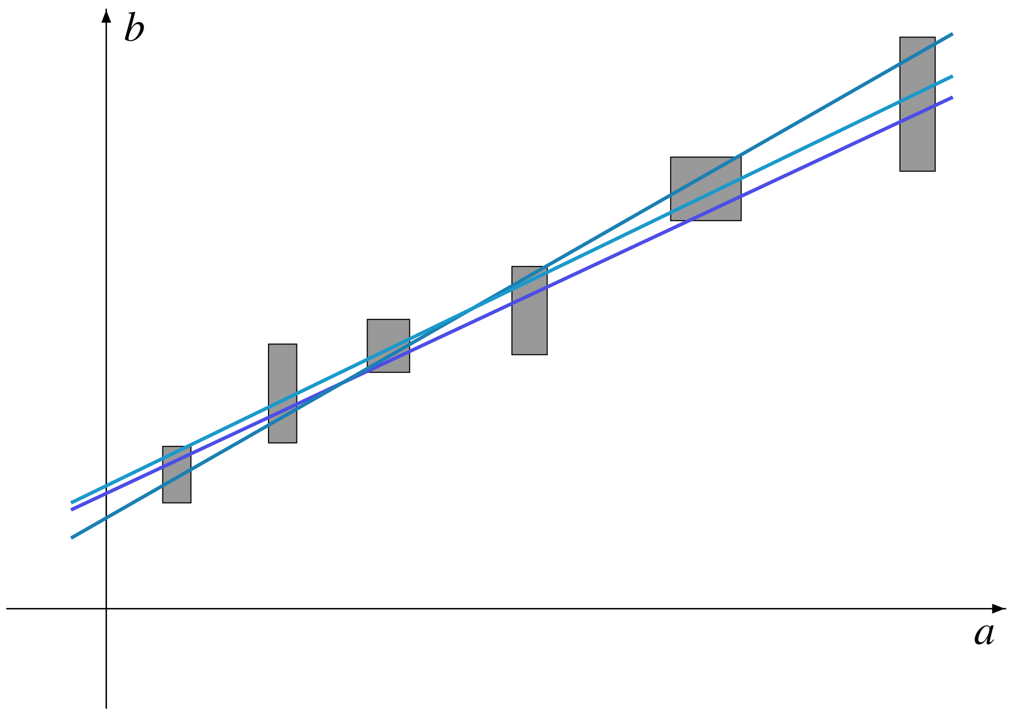
информационным множеством, и т. д.

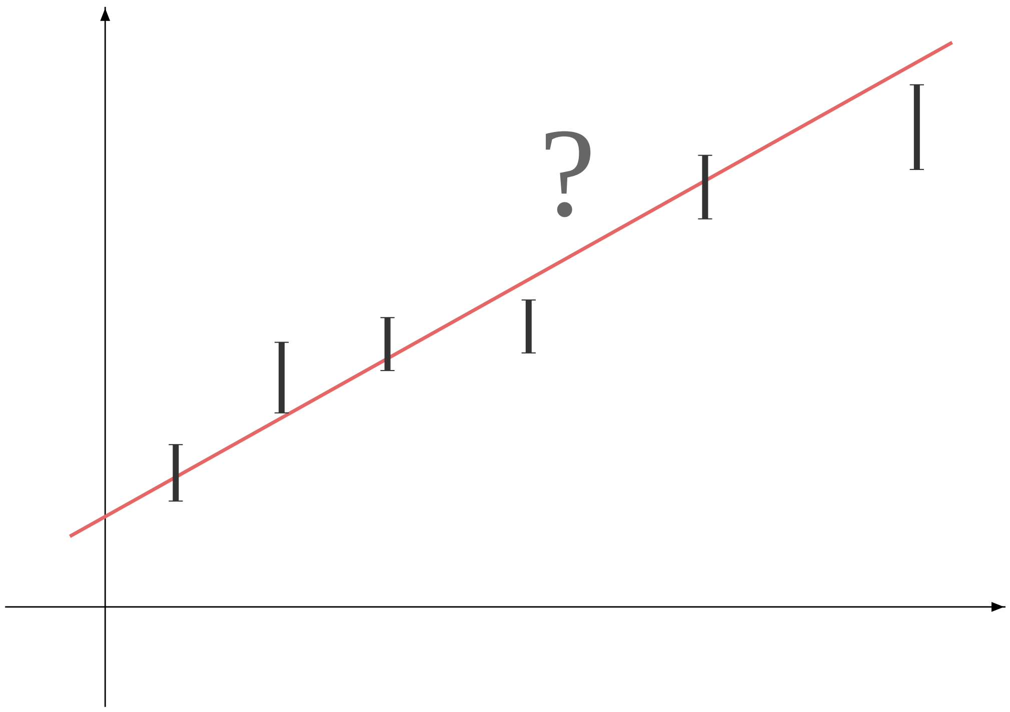
В интервальном анализе — это *множество решений*

интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Парадокс интервального оценивания

«Чем лучше, тем хуже . . . »





— парадокс Е.З. Демиденко (1989)

Парадокс интервального оценивания

Чем меньше интервалы неопределённости,
тем хуже проводить через них регрессионную линию!

Парадокс интервального оценивания

Чем меньше интервалы неопределённости,
тем хуже проводить через них регрессионную линию!

?! . . .

Пути преодоления «парадокса интервального оценивания»

- Если интервалы данных адекватно отражают неопределённости, то неадекватна модель и её нужно сменить.

- Если

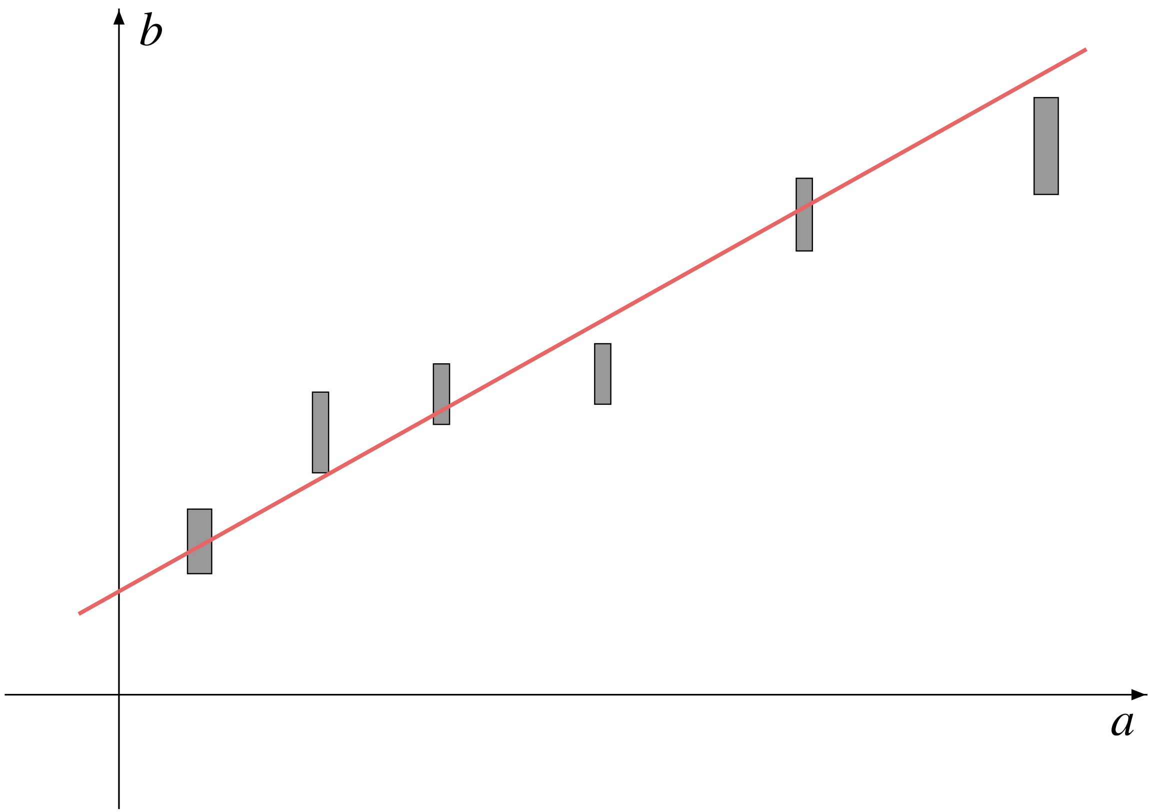
  – необходимо сохранить модель (вид зависимости) или

  – данные не являются абсолютно гарантированными,

  то *нужно допустить несогласованность параметров и данных*.

Пути преодоления «парадокса интервального оценивания»

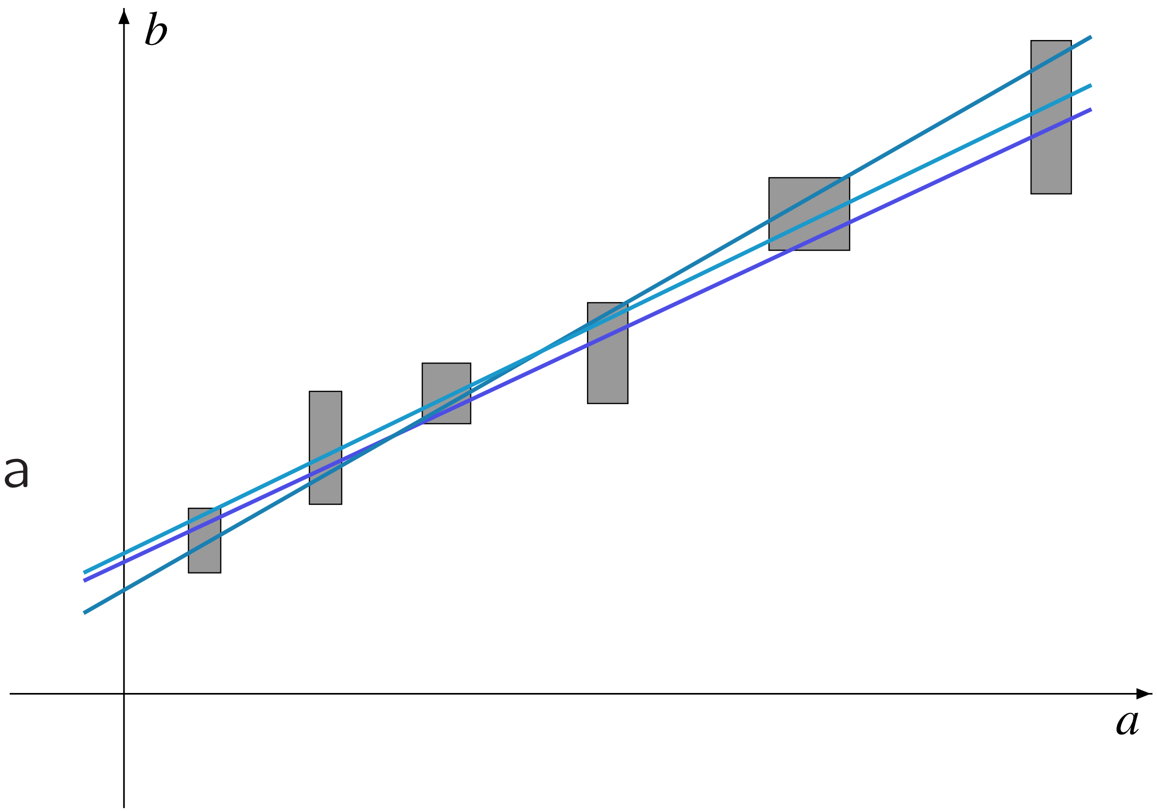
. . . нужно допустить несогласованность параметров и данных



Восстановление зависимостей по неточным данным

1) нужно ввести «меру согласования» параметров и данных

2) оценкой параметров берём точку её максимума



Восстановление зависимостей по неточным данным

Какой взять «меру согласования / несогласования»?

При непустом информационном множестве она должна быть положительной для точек из этого множества, на которых «согласование» в самом деле достигается

Для точек вне информационного множества, на которых «согласования» нет, она может быть отрицательной.

II. Теория

Интервальные линейные системы уравнений

Интервальные линейные системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальными $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij}\,)$ и m-вектором $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i\,)$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Множество решений интервальной линейной системы уравнений —

$$\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \Bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b \,) \,\Bigr\}$$

множество решений всевозможных точечных СЛАУ $Ax = b$,
коэффициенты и правые части которых принадлежат $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$.

Разрешимость интервальных уравнений

— непустота множества решений, т. е. $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$

В общем случае распознавание разрешимости

— NP-трудная задача (труднорешаемая):

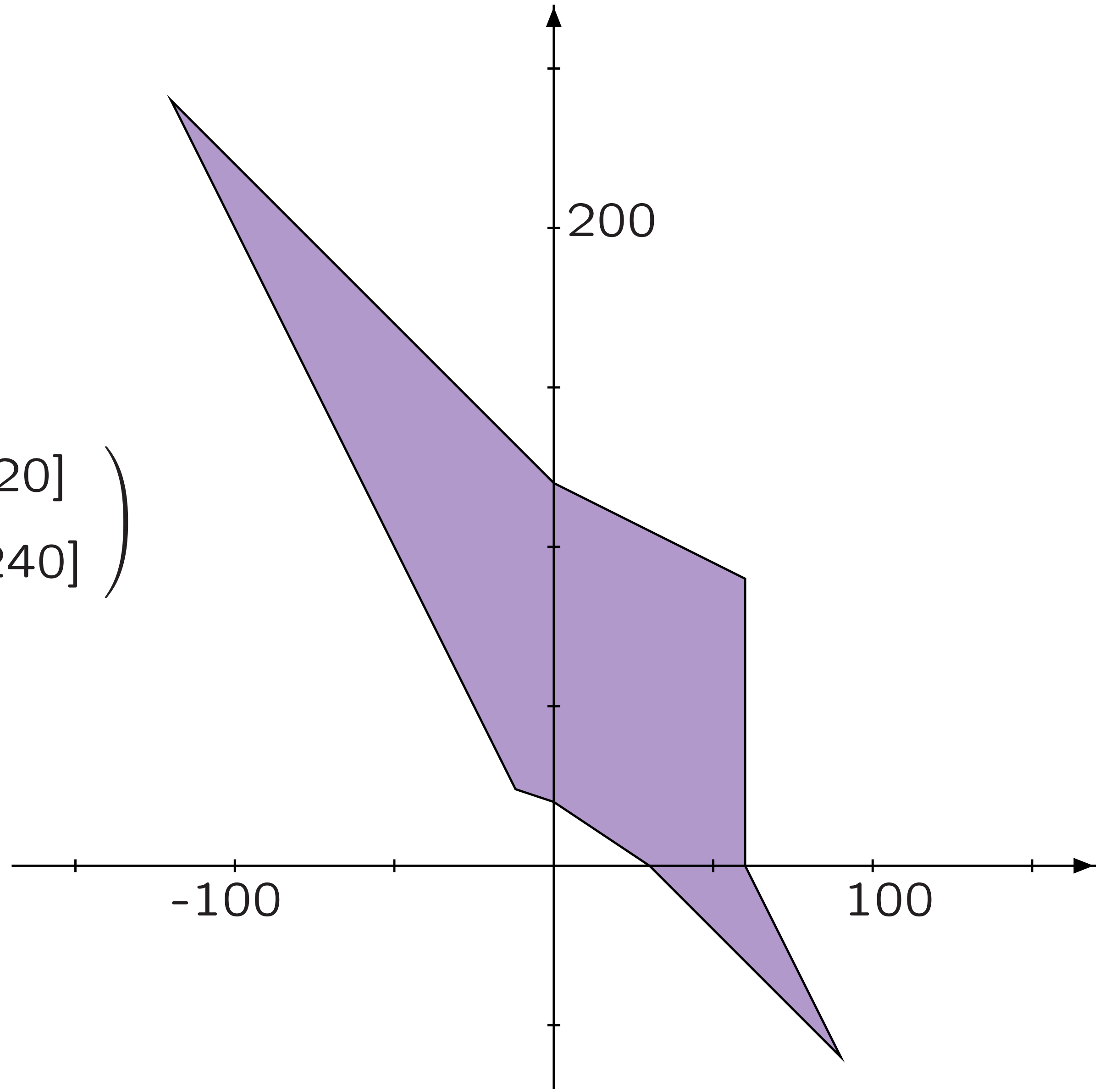
А.В. Лакеев и С.И. Носков — 1993

V. Kreinovich,

J. Rohn

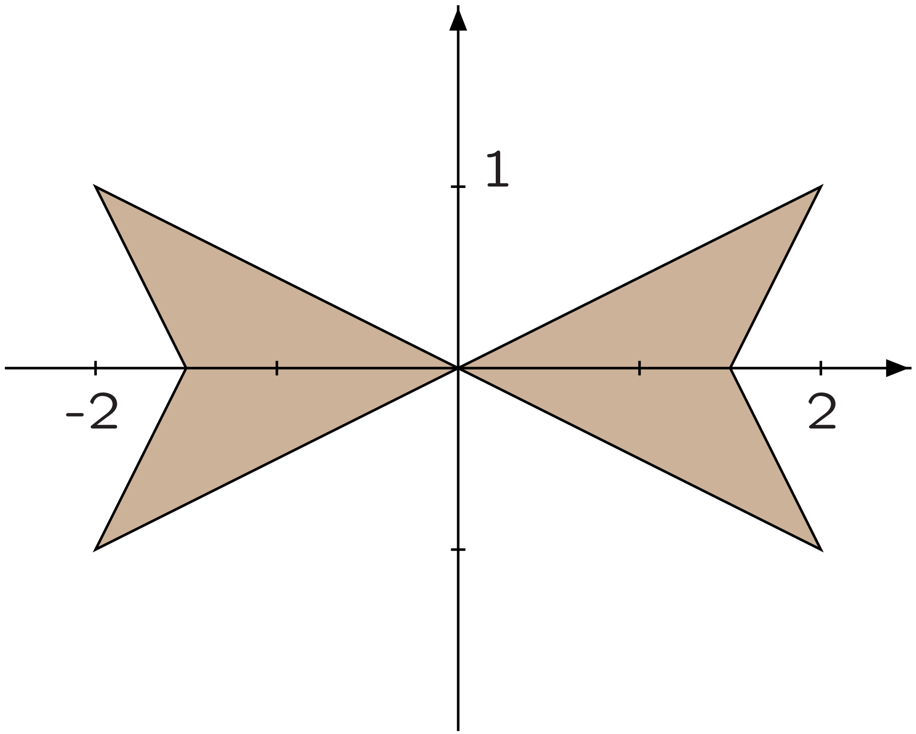
Пример — система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

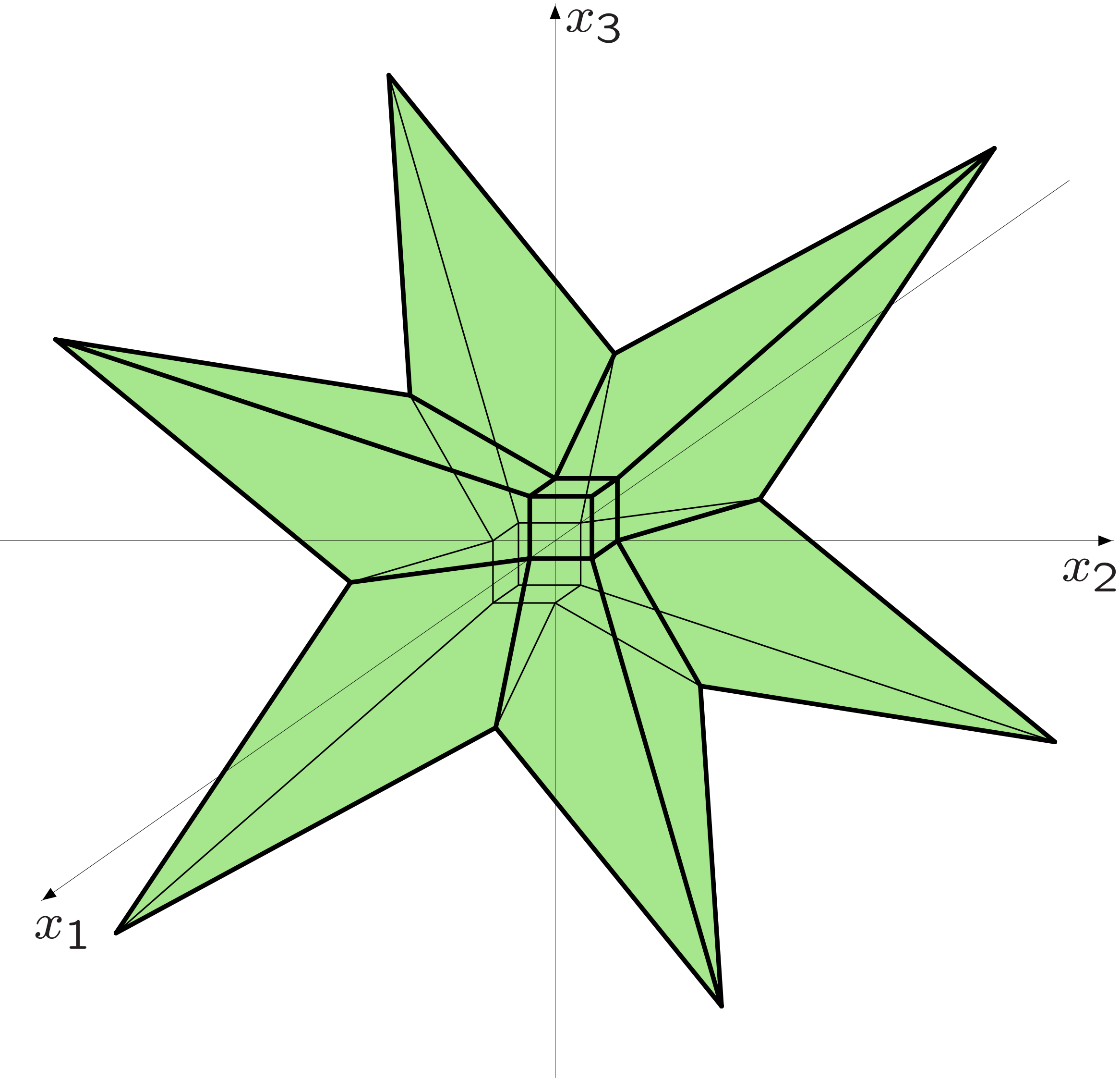


Пример — почти несвязное множество решений

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix}$$

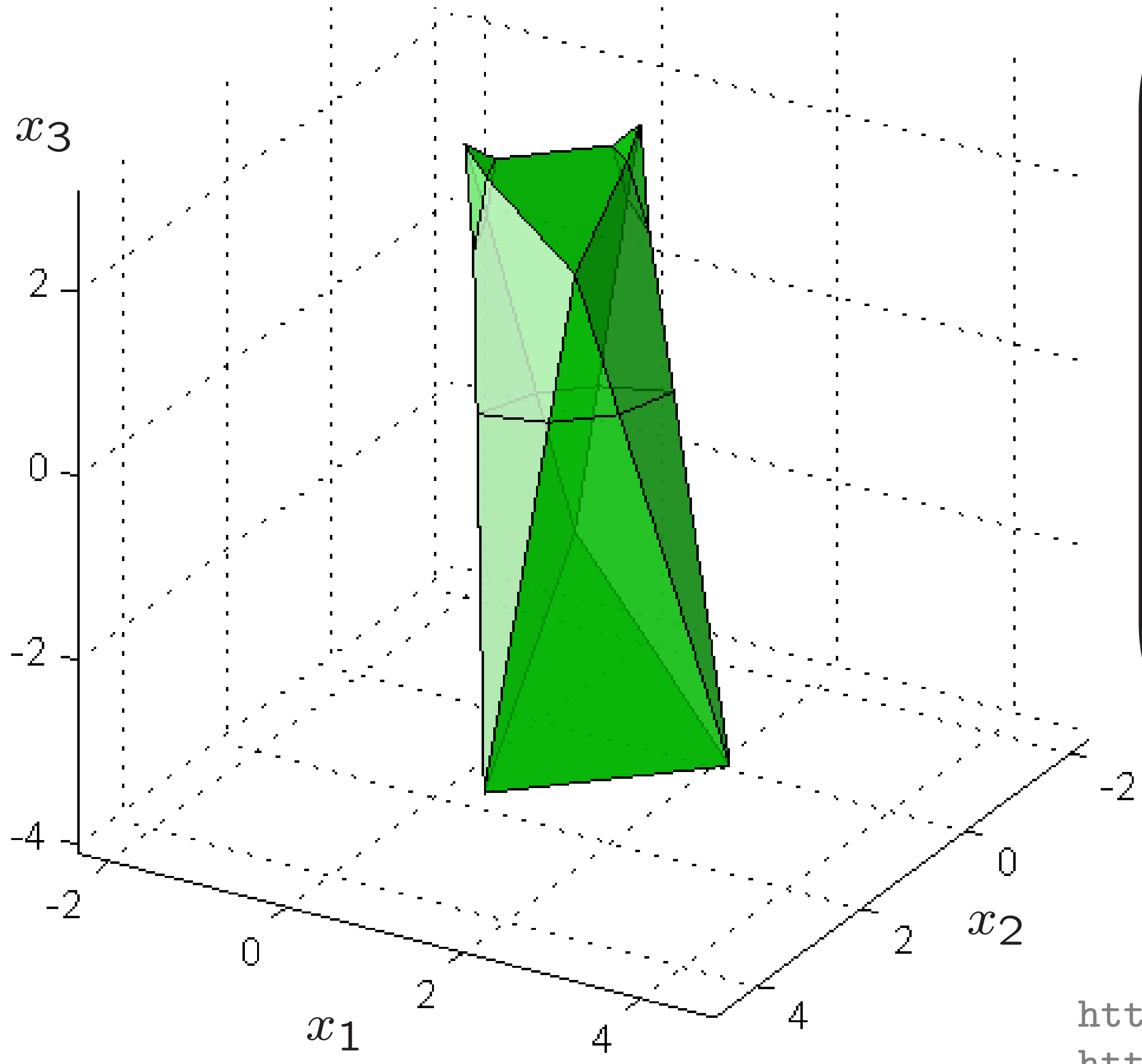


Пример — система Ноймайера



$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Пример: «безхвостый котик»



$$\begin{pmatrix} [0.8, 1.2] & [0.8, 1.2] & 1 \\ [0.8, 1.2] & [1.8, 2.2] & 1 \\ [0.8, 1.2] & [2.8, 3.2] & 1 \\ [1.8, 2.2] & [0.8, 1.2] & 1 \\ [1.8, 2.2] & [1.8, 2.2] & 1 \\ [1.8, 2.2] & [2.8, 3.2] & 1 \\ [2.8, 3.2] & [0.8, 1.2] & 1 \\ [2.8, 3.2] & [1.8, 2.2] & 1 \\ [2.8, 3.2] & [2.8, 3.2] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [2, 4] \\ [3, 5] \\ [2, 4] \\ [3, 5] \\ [4, 6] \\ [3, 5] \\ [4, 6] \\ [5, 7] \end{pmatrix}$$

Пакет IntLinIncR3, автор Ирина Шарая

http://www.nsc.ru/interval/Programing

http://www.nsc.ru/interval/sharaya/irash.html

III. Теория

Метод распознающего функционала

Характеризация точек множества решений

$$\boxed{\quad x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}x \cap \boldsymbol{b} \neq \varnothing \quad}$$

— *характеризация Бека*

для множеств решений интервальных линейных систем.

Beeck H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. –1972. – Vol. 10. – P. 231–244.

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

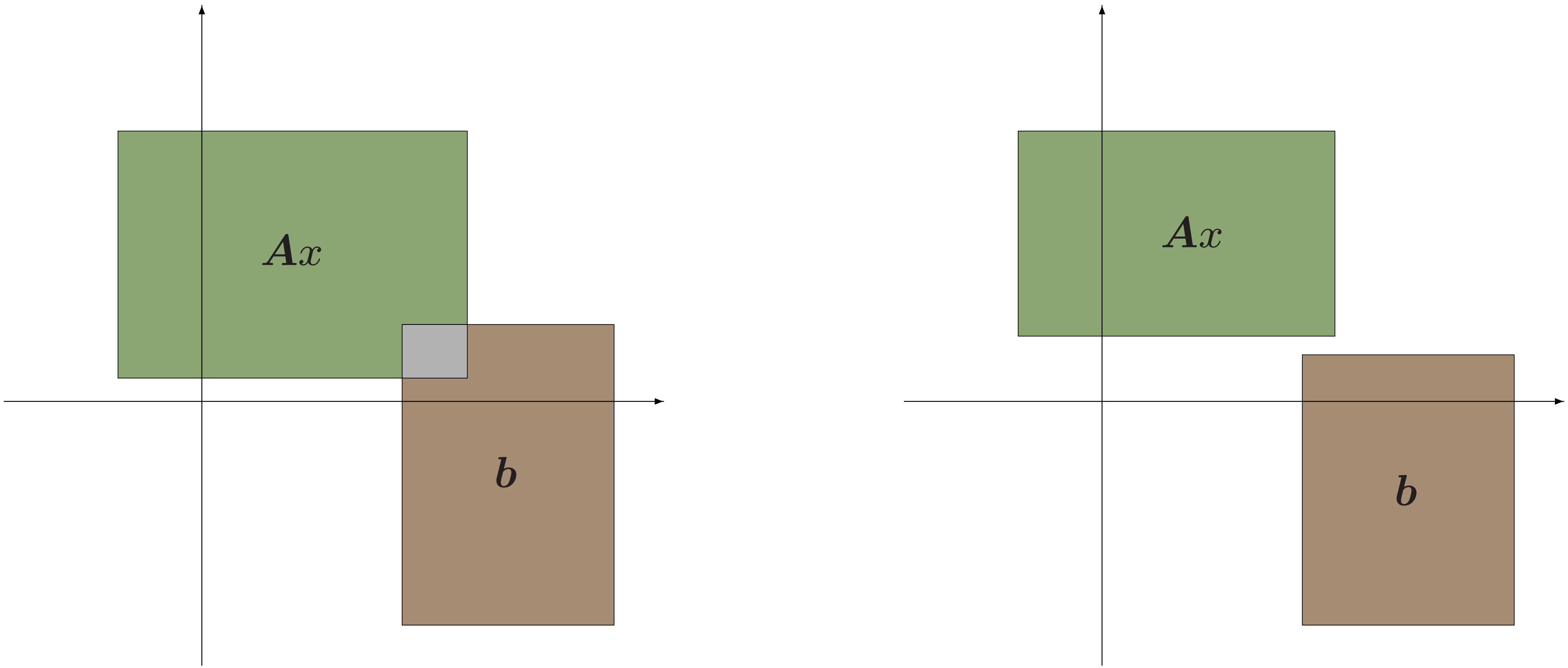
— алгебраическая система, образованная интервалами $\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \subset \mathbb{R}$ так, что

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} = \left\{ x \star y \mid x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y} \right\} \qquad \text{для} \quad \star \in \{ +, -, \cdot, / \}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \left[\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}} \right] \\
\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &= \left[\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}} \right] \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= \left[\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\} \right] \\
\boldsymbol{x} / \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x} \cdot \left[1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}} \right] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0
\end{aligned}$$

Характеризация точек множества решений

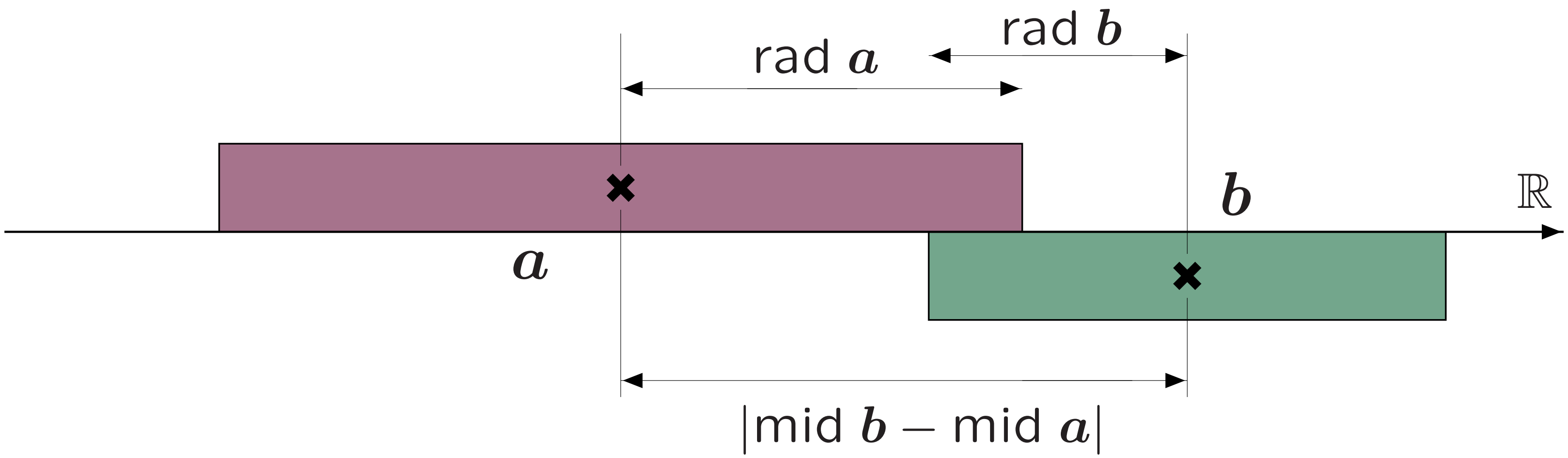
«Мерой согласования» параметров x и данных $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ может служить функционал, характеризующий взаимное расположение $\boldsymbol{A}x$ и $\boldsymbol{b}$, меру их пересечения или непересечения друг с другом:



— *аналог невязки*

Мера согласования параметров и данных

$$\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} \neq \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad |\text{mid}\,\boldsymbol{a} - \text{mid}\,\boldsymbol{b}| \leq \text{rad}\,\boldsymbol{a} + \text{rad}\,\boldsymbol{b}$$



Поэтому

$$\boldsymbol{A}x \cap \boldsymbol{b} \neq \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{rad}\,(\boldsymbol{A}x)_i + \text{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \Big|\,\text{mid}\,(\boldsymbol{A}x)_i - \text{mid}\,\boldsymbol{b}_i\Big| \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Мера согласования параметров и данных

В качестве «меры согласования» можно взять

$$\min_{1\leq i\leq m} \left\{ \operatorname{rad}(\boldsymbol{A}x)_i + \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \Bigl| \operatorname{mid}(\boldsymbol{A}x)_i - \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i \Bigr| \right\}$$

Для упрощения выражения заметим, что

$$\operatorname{mid}(\boldsymbol{A}x) = (\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,x \qquad \text{и} \qquad \operatorname{rad}(\boldsymbol{A}x) = (\operatorname{rad}\boldsymbol{A})\,|x|,$$

Распознающий функционал множества решений

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ *— интервальная* $m \times n$*-матрица,* $\boldsymbol{b}$ *— интервальный* m*-вектор. Тогда выражением*

$$\mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{rad}\, \boldsymbol{a}_{ij})\, |x_j| - \left| \,\mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{mid}\, \boldsymbol{a}_{ij})\, x_j \right| \right\}$$

задается функционал $\mathrm{Uss} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, такой что принадлежность точки* $x \in \mathbb{R}^n$ *множеству решений* $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *равносильна неотрицательности в* x *функционала* Uss*,*

$$x \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ge 0.$$

Распознающий функционал множества решений

— множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы является множеством уровня

$$\left\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0 \,\right\}$$

функционала Uss .

. . . посредством знака своих значений функционал Uss «распознаёт» принадлежность точки множеству $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Свойства распознающего функционала

Предложение 1

Функционал Uss *непрерывен по Липшицу.*

Предложение 2

Функционал Uss *— вогнутый по x в каждом ортанте $\mathbb{R}^n$.*

Если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ некоторые столбцы являются целиком точечными, то $\mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *вогнут и на объединениях нескольких ортантов.*

Предложение 3

Функционал $\mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *— полиэдральный, т. е. его подграфик — полиэдральное множество.*

Пример

Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix}$$

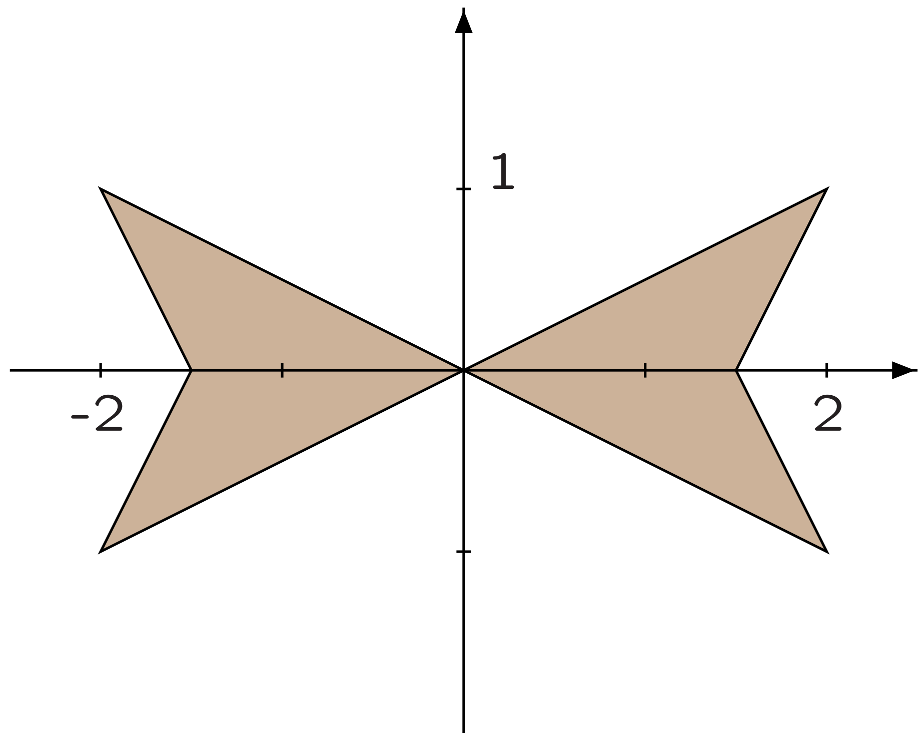
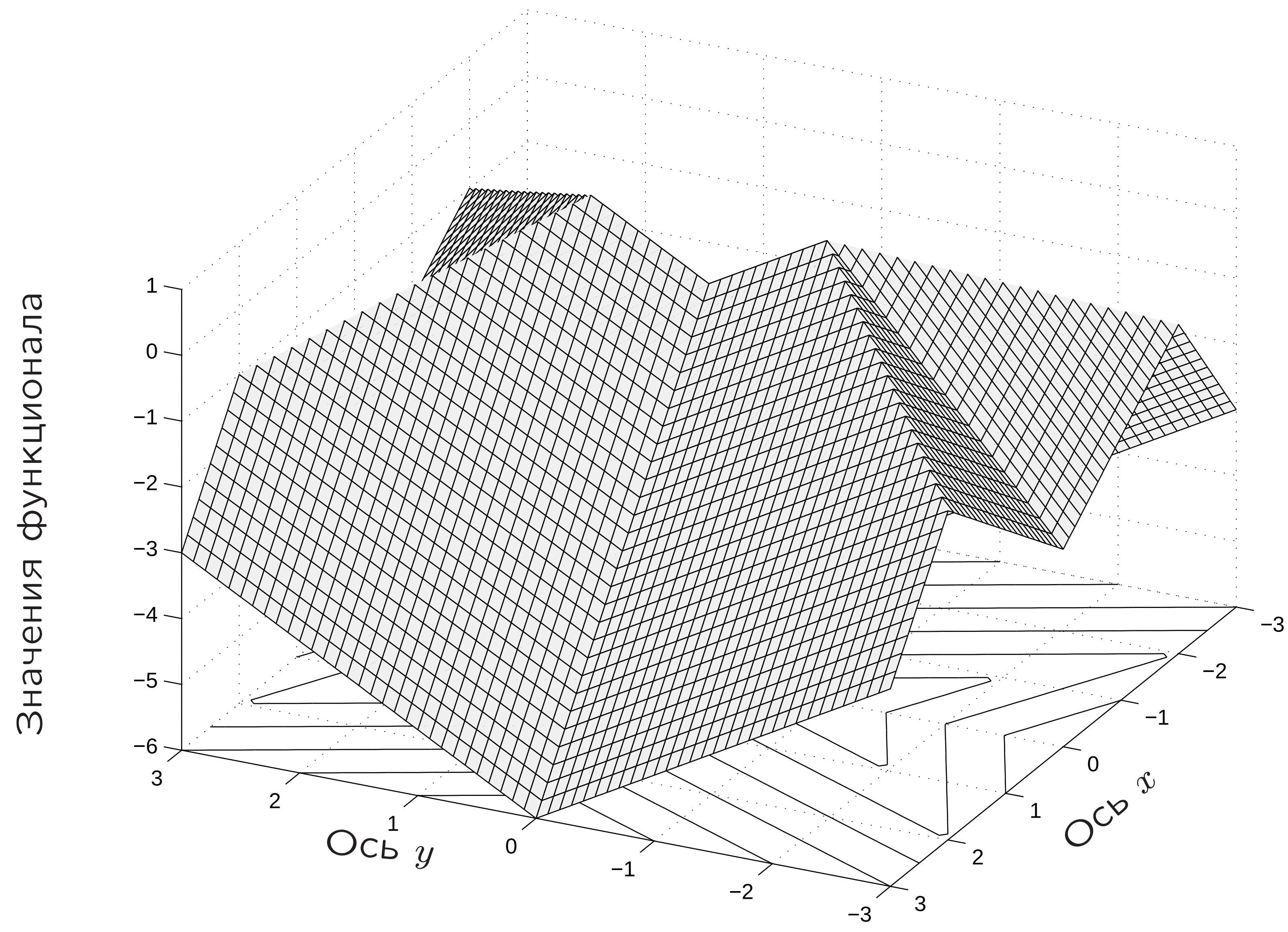


график распознающего функционала множества решений выглядит ...


Значения функционала
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
3
2
1
0
−1
−2
−3
Ось y
−3
−2
−1
0
1
2
3
Ось x

Свойства распознающего функционала

Предложение 4

Если множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *ограничено, то функционал* $\operatorname{Uss}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *достигает конечного максимума на всём пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Предложение 5

Если $\operatorname{Uss}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, *то* x *— точка топологической внутренности* $\operatorname{int} \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *множества решений.*

Предложение 6

Пусть интервальная линейная система уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *такова, что её расширенная матрица* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *не содержит строк, все элементы которых имеют нулевые концы. Тогда из принадлежности* $x \in \operatorname{int}\Big(\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}\Big)$, *где* $\mathcal{O}$ *— ортант пространства* $\mathbb{R}^n$, *следует строгое неравенство* $\operatorname{Uss}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.

Исследование разрешимости интервальной линейной системы уравнений

Для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала $\mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Пусть $U = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $U \geq 0$, то $\tau \in \mathit{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, т. е. интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ разрешима и τ лежит во множестве решений;

- если $U > 0$, то $\tau \in \mathrm{int}\,\mathit{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, и принадлежность точки τ множеству решений устойчива к малым возмущениям $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$;

- если $U < 0$, то $\mathit{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$, т. е. интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ неразрешима.

IV. Метод максимума согласования

Восстановление зависимостей по неточным данным

Какой взять «меру согласования / несогласования»?

При непустом информационном множестве она должна быть положительной для точек из этого множества, на которых «согласование» в самом деле достигается

Для точек вне информационного множества, на которых «согласования» нет, она может быть отрицательной.

Очень подходит распознающий функционал Uss

Метод максимума согласования

Оценкой параметров берём точку, в которой достигается наибольшее значение распознающего функционала Uss

- Если max Uss ≥ 0, то эта точка лежит во множестве параметров, согласующихся с данными.
- Если max Uss < 0, то множество параметров, согласующихся с данными, пусто, но эта точка *минимизирует несогласованность*.

Метод максимума согласования

Ещё одна содержательная интерпретация:

$\arg\max \mathrm{Uss}$ — первая точка, которая появится во множестве решений при равномерном уширении вектора правой части относительно его середины

$$\max_x \mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) \;=\; \max_x \mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C,$$

где $\boldsymbol{e} = \Big([-1, 1], \ldots, [-1, 1]\Big)^\top$

Коррекция интервальной системы уравнений

$$\mathrm{Uss}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m}\left\{\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i+\sum_{j=1}^{n}\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}_{ij})\,|x_j| - \left|\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i-\sum_{j=1}^{n}\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{a}_{ij})\,x_j\,\right|\,\right\}$$

— величины $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i$ входят аддитивно во все образующие

Поэтому если

$$\boldsymbol{e}=\Big([-1,1],\ldots,[-1,1]\Big)^{\top},$$

то для системы $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}+C\boldsymbol{e}$ с уширенной правой частью

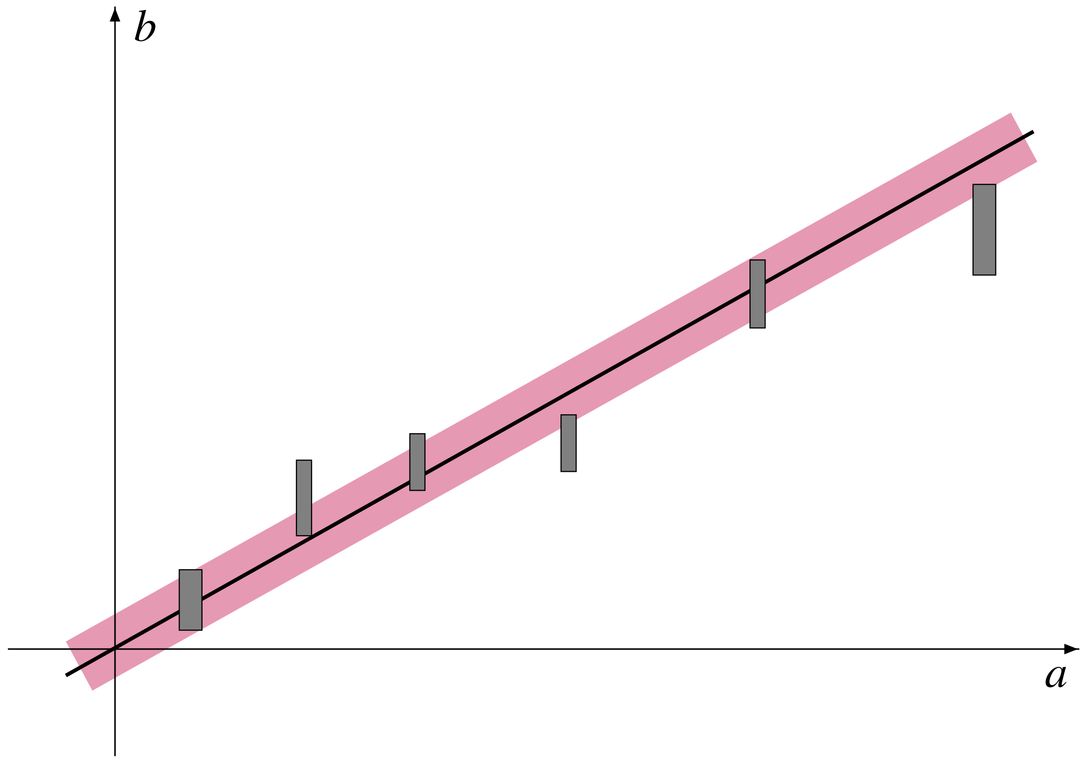
$$\mathrm{Uss}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}+C\boldsymbol{e}) \;=\; \mathrm{Uss}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})+C,$$

$$\max_x\;\mathrm{Uss}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}+C\boldsymbol{e}) \;=\; \max_x\;\mathrm{Uss}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})+C,$$

Метод максимума согласования

Ещё одна практическая интерпретация:

$\arg\max \mathrm{Uss}$ даёт параметры такой регрессионной линии, которую следует наименьшим образом расширить до «регрессионной полосы», уже пересекающей все брусы данных



V. Реализация

Максимизация распознающего функционала

Практическая реализация

— решающим образом зависит от эффективности нахождения max Uss

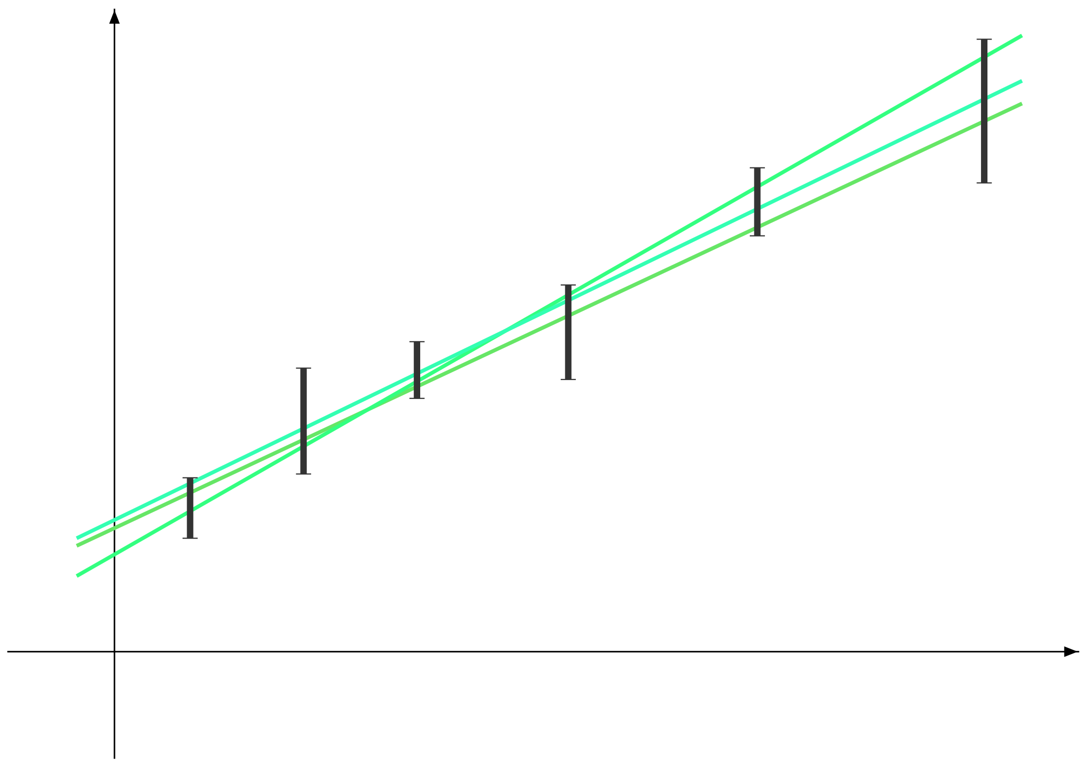
В общем случае — задача глобальной оптимизации
с негладкой целевой функцией

- методы глобальной оптимизации липшицевых функций
  с учётом специфики функционала Uss

- перебор всех ортантов $\mathbb{R}$, т. е. областей вогнутости

Важнейший частный случай

— значения входных величин a_1, a_2, . . . , a_n точны,
интервальная неопределённость присутствует лишь на выходе b



Важнейший частный случай

— значения входных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ точны,
интервальная неопределённость присутствует лишь на выходе b

Интервальная линейная система

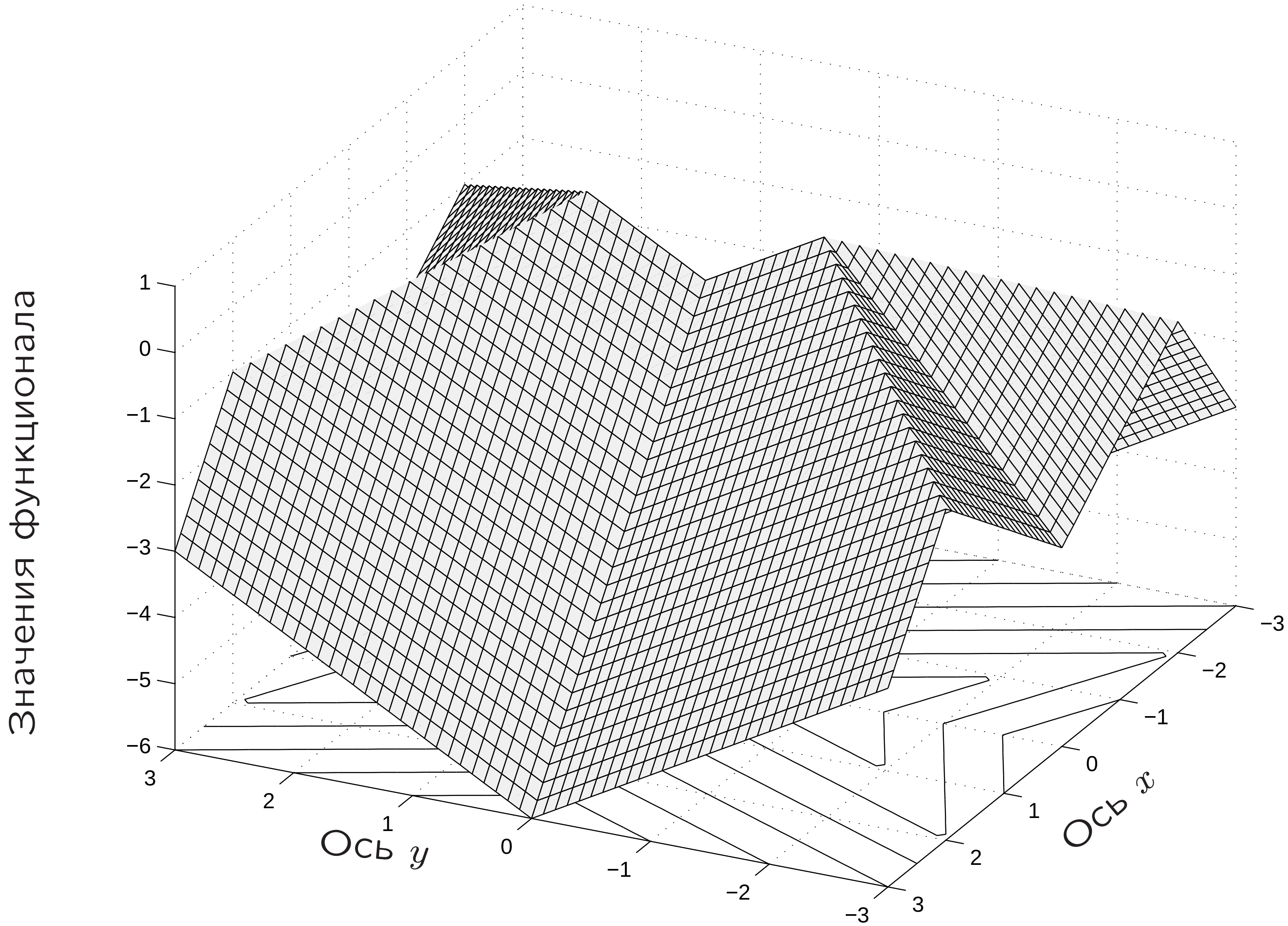
$$Ax = \boldsymbol{b}$$

с точечной матрицей $A = (a_{ij})$, и потому

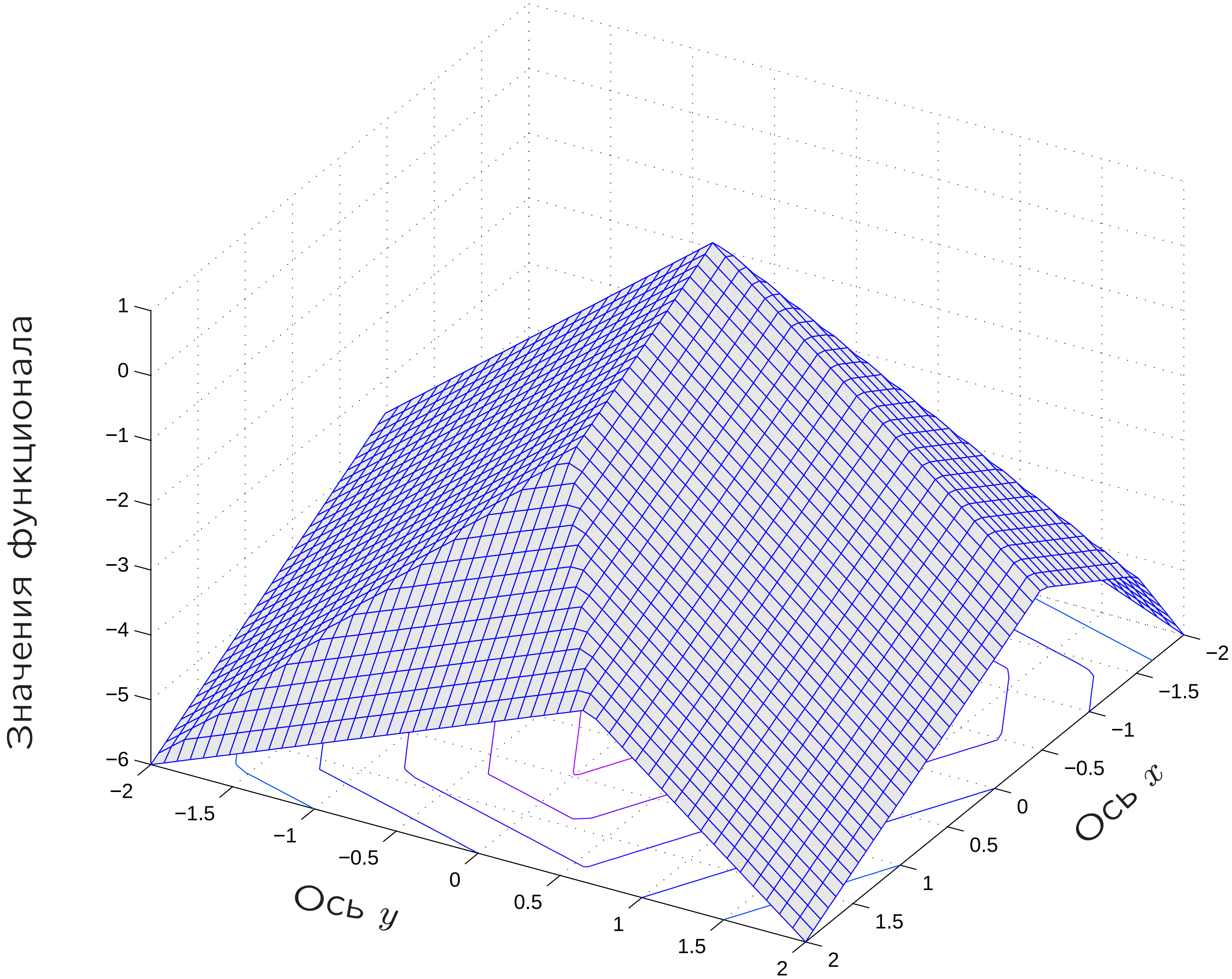
$$\mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left|\, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \,\right| \,\right\}$$

$\Longrightarrow$ распознающий функционал Uss — глобально вогнутый

Вместо



будем
иметь



Значения функционала
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
Ось y
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
Ось x

— график распознающего функционала

множества решений интервальной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [0, 1] \\ [-1, 0] \end{pmatrix}$$

Практическая реализация

— максимизация Uss в случае точечной матрицы $\boldsymbol{A}$
может опираться на развитые методы негладкой выпуклой оптимизации
(школа Н.З. Шора в Киеве, Е.А.Нурминский, ...)

Свободно распространяемая программа `lintreg`, реализующая метод максимума согласования, использует в качестве основы код `ralgb5` П.И. Стецюка (Институт кибернетики НАН Украины)

... лежит, в частности, на сайте
«Интервальный анализ и его приложения» —
http://www.nsc.ru/interval

Итоги и выводы

- Введением распознающего функционала множества решений задача исследования разрешимости ИСЛАУ сводится к удобной аналитической форме.

- *Метод максимума согласования* — перспективный метод обработки данных с интервальными неопределённостями основанный на максимизации распознающего функционала.

  Он может служить хорошей альтернативой традиционному методу наименьших квадратов.

Что можно почитать

Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? // Успехи Физических Наук. – 1992. – Т. 162, №7. – С. 149–182.

Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская Лаборатория. – – 1990. – Т. 56, №7. – С. 76–81, а также Комментарии к статье.

Шарый С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями // Автоматика и Телемеханика. – 2012. – №2. – С. 111–125.

Шарый С.П., Шарая И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные Технологии. – 2013. – Т. 18, №3. – С. 80–109.

Спасибо за внимание