

Планиметр

Планиметр (от лат. *planus* - плоскость, поверхность и греч. *metrein* - измерять) прибор для измерения площадей по картам, планам и другим плоским чертежам или картам, а также для нахождения числового значения определенных интегралов функции одной переменной (прибор, служащий для определения площадей (интегрирования) замкнутых контуров, нарисованных на плоскости).

Планиметр – частный случай **интегратора** – аналогового вычислительного устройства.

Планиметр – один из старейших инструментов (механический или в настоящее время электронный), использующийся для определения площадей замкнутых контуров любой формы на картах, планах и любых других графических изображениях. Механические планиметры известны довольно давно, и представляют собой систему шарнирно соединенных рычагов. Известное положение ролика относительно звеньев механизма позволяет при обходе штифтом измеряемого контура соотносить контур с прямоугольником с известной длиной сторон и площадью, равной площади измеряемого контура.

Принцип действия планиметра сводится к следующему: при движении прямолинейного ориентированного отрезка $[AB]$ в плоскости площадь «обметенной» (заштрихованной) им фигуры равна произведению длины отрезка $[AB]$ на длину дуги, которую описывает средняя точка отрезка.

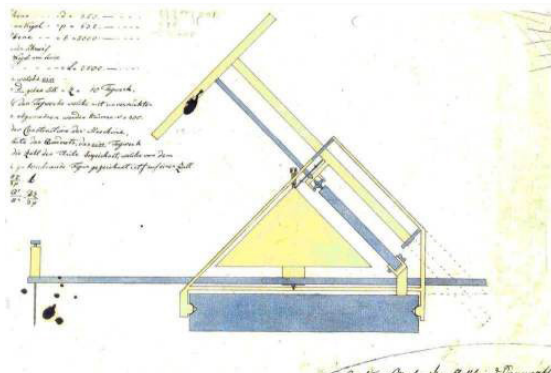
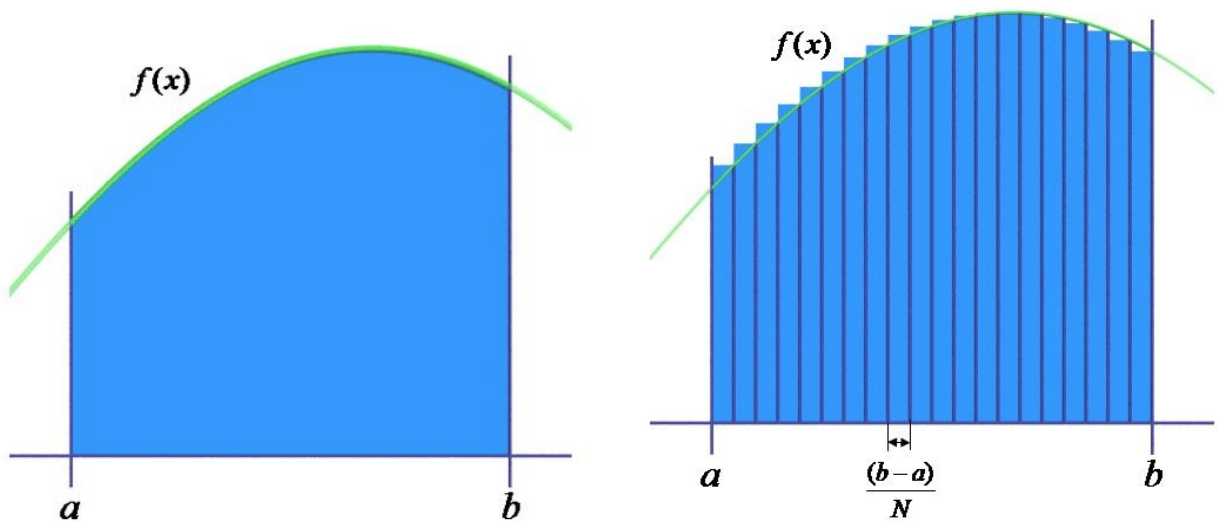


Рис.1. Рисунок Германа

По своей конструкции планиметры являются линейными и круговыми (полярными). Полярными называют те приборы, которые при использовании вращаются вокруг одной неподвижной точки - полюса. Линейные планиметры в рабочем состоянии перемещаются по плану параллельно своему первоначальному положению. Другими словами инструмент вычисляет площадь фигуры ограниченной функцией $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ (интеграл от этой функции) как сумму площадей N прямоугольников.

Линейные планиметры были изобретены независимо друг от друга и почти одновременно разными людьми в первой трети XIX века. Первым автором инструмента считают баварского инженера Иогана Германа (Johann Martin Herman), высказавшего идею его устройства в 1814 г. Независимо от этого инструмент был изобретен в 1824 г. флорентийским профессором Тито Гонелла (Tito Gonnella), а в 1827 г. - швейцарским инженером Иоханом Оппикофером (Johannes Oppikofer). Изобретение планиметров Германа, Гоннеллы и Оппикофера остались незамеченными, несмотря на публикации Гоннеллы в 1825 году и 1841 году.

Иоганн Герман

Прибор, созданный Германом не сохранился до нашего времени, но есть оригинальные рисунки Германа (рис. 1 и 2). Планиметр Германа состоял из конуса и колеса установленного на дорожке.

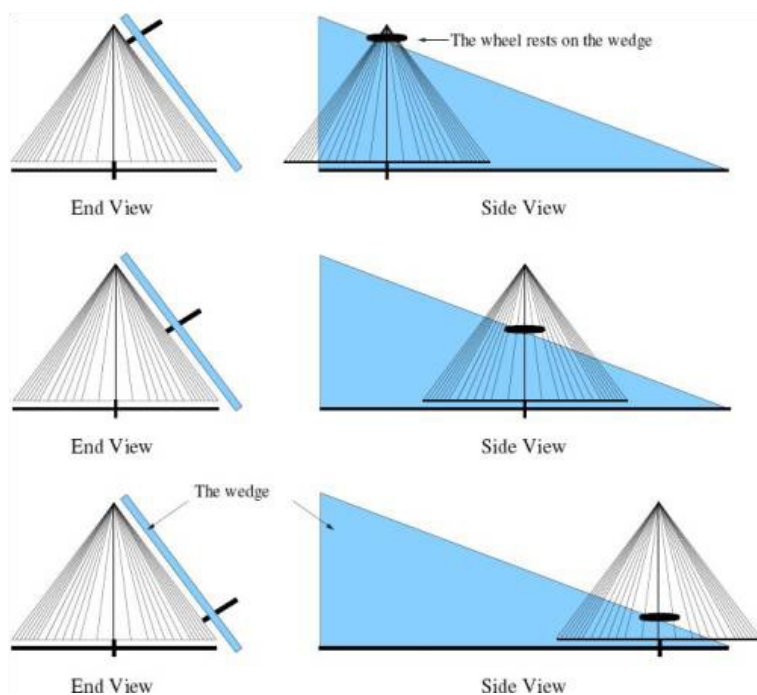
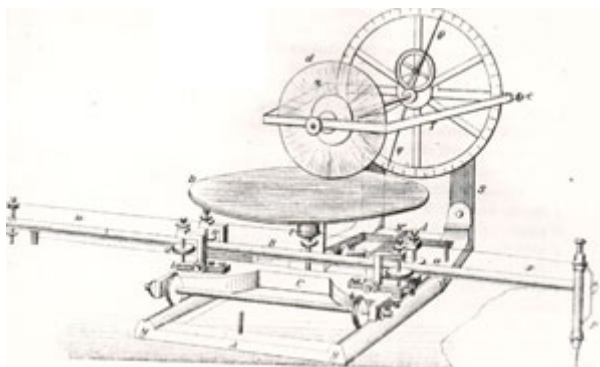


Рис. 2. Как "клин" (показан синим цветом) был использован для управления колесом вверх и вниз по краю конуса. Рисунок: Charles Cate, 2004 год.

На схеме Германа показан конус (желтый треугольник), который вращается пропорционально перемещению указателя вала. Перо движется и конус перемещается вдоль дорожки (синий прямоугольник). Это тянет за руль клина (показаны синим цветом на обоих рисунках), из-за чего колеса для перемещения вверх и вниз по конусу. Так как конус и колесо образуют переменную передачу, скорость вращения колеса зависит как от скорости изменения колес и смещения колес вдоль дорожки. Так вычисляется площадь области (интегратор).

На схеме Германа показан конус (желтый треугольник), который вращается пропорционально перемещению указателя вала. Перо движется и конус перемещается вдоль дорожки (синий прямоугольник). Это тянет за руль клина (показаны синим цветом на обоих рисунках), из-за чего колеса для перемещения вверх и вниз по конусу. Так как конус и колесо образуют переменную передачу, скорость вращения колеса зависит как от скорости изменения колес и смещения колес вдоль дорожки. Так вычисляется площадь области (интегратор).

Тито Гоннелла (1794-1867)

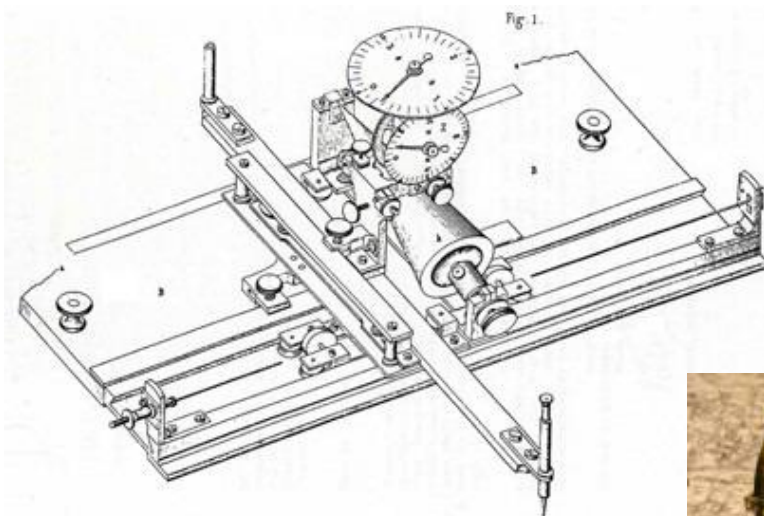


Итальянский ученый и изобретатель Гоннелла Тито (Tito Gonnella), профессор математики и механики в флорентийской *Accademia du Belle Arti*, в первую очередь известен как изобретатель (в 1824) одного из первых линейных планиметров в мире (см. рисунок) для измерения площади, фигуры ограниченной замкнутой кривой. Улучшенная версия планиметра Гоннеллы была представлена в Лондоне на

Международной выставке 1851 года, где получила высшую награду. Гоннелла известен также как изобретатель телескопа-рефлектора (1841 год) и механических калькуляторов (разработанные в 1850-х годах).

Иоханн Оппикофер

Изобретение Иоханна Оппикофера (1827 год) функционально повторяет прибор Гоннеллы, отличаясь только дизайном. Здесь в качестве переменной передачи используется конус (см. рис.).



Планиметр Оппикофера



Планиметр Ветли

Планиметры Гоннеллы и Ветли были представлены на Всемирной выставке в 1951 году.

Полярные (круговые) планиметры

Так же, почти одновременно и независимо друг от друга в разных странах, были изобретены и полярные планиметры. В одном и том же году, а именно в 1854 г., швейцарским ученым Якобом Амслером (Jacob Amsler, 1823 – 1912) был создан полярный планиметр, а нашим соотечественником Павлом Алексеевичем Зарубиным (1816 – 1886) - круговой планиметр.

Идея, заложенная в конструкцию этих приборов, состояла в замене ортогональной системы координат на полярную, что значительно упрощает конструкцию.



Каждый планиметр состоит из двух рычагов, один из которых является обводным (выполняя функции обводимого отрезка на плане), на конце такого обводного рычага закреплен штифт (грифель) для контура фигуры, а другой рычаг движется по так называемой направляющей. В линейном плани-

метре это прямая, в полярном – окружность. Принцип действия и использование кругового планиметра Зарубина тот же, что и для полярного планиметра Амслера, но употребление проще и удобнее.

В массовое производство (даже и настоящее время) пошла лишь одна из возможных технических реализаций данного прибора — планиметр Амслера. Малая распространенность кругового планиметра обуславливается хрупкостью и сложностью его счетного механизма.

Интеграф

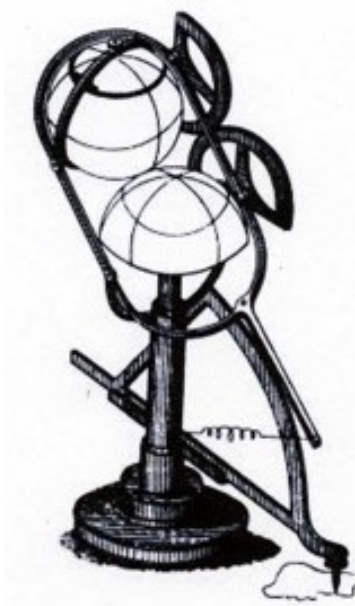


Другой подход к построению прибора, вычисляющего площадь фигуры ограниченной функцией $f(x)$ предложил польский (русский) ученый Бруно Абданк-Абаканович (1851-1900). Он изобрел в 1876 году механизм, названный им «Интеграфом» (intégraphe), основанный на использовании переменного шага винта. Прибор моделирует свойство интеграла от функции – в каждой точке интегральной кривой, наклон касательной равен

значение исходной функции.

Он сделал несколько прототипов, и начал их производство во Франции в 1880 году. Принцип интеграфа был положен А.Н. Крыловым при создании первой в мире аналоговой вычислительной машины для решения дифференциальных уравнений.

Джеймс Клерк Максвелл



Знаменитый английский физик Джеймс Клерк Максвелл (*James Clerk Maxwell*, 1831 – 1879) в 1851 году на Выставке в Лондоне увидел планиметр и сразу, как он пишет, задумался над его улучшением. Анализируя технические трудности передач двойного скольжения и вращения колеса и конуса, он обнаружил, сильные ограничения, налагаемые трением, которые сказываются на точности прибора. Он приступил к разработке планиметра, в котором использовал только качение, а не сочетание качения и скольжения. Он находит

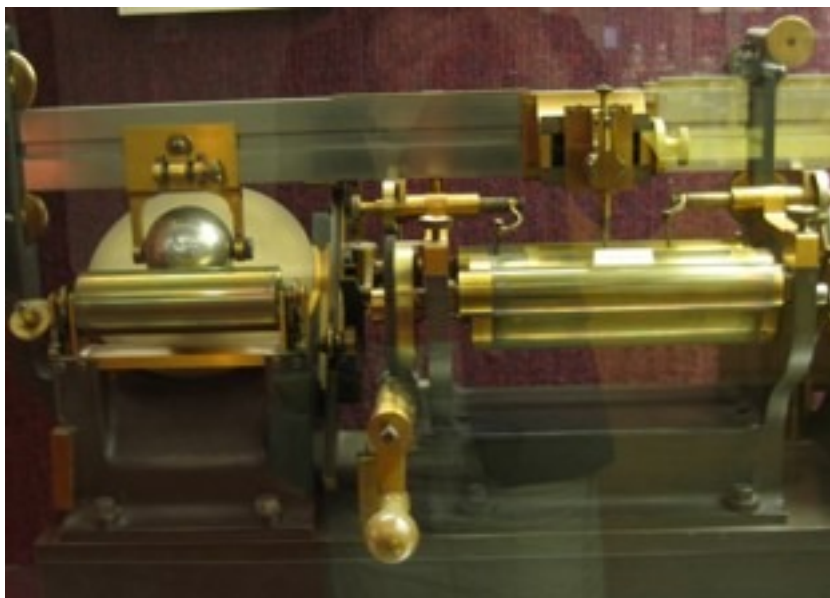
способ идеальный прокатки, основанного на взаимном качении двух сфер с диаметром в соотношении $1/2$, или, что из конуса и цилиндра перпендикулярных осей. Вместо

переменной передачи со скольжением конусов и колес, как делали другие изобретатели, прибор Максвелла использовал качение сферы.

Прибор действительно оказался идеальным с точки зрения точности, но неудобен в использовании. Однако создание этого прибора привело Дж. Томсона (и его брата Кельвина) к мысли о создании универсального интегратора.

Интегратор

Джеймс Томсон (1822-1892) и его брат Уильям Томсон (1824-1907), впоследствии лорд Кельвин создали в 1876 году универсальный интегратор на основе системы диск-сфера-цилиндр.



С 1867 по 1876 год, Уильям входил в комитет *Британской ассоциации содействия развитию науки*. Эта организация содействовала развитию гармонического анализа приливных движений по наблюдениям, которые регистрировались мареографами на южном побережье Англии, у берегов Франции, а также в Рамсгейте, Ливерпуле, Бомбее и в Форт-Пойнт, штат Калифорния. Джеймс и Уильям приняли решение создать анализатор гармоник.

В интеграторе Джеймса 1876 года, состоящим из механических дисков, сферы и цилиндра, диск, наклонен на 45° по отношению к горизонтальной плоскости и вращается вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости. По горизонтальной оси цилиндр может двигаться параллельно плоскости диска. Движение диска, таким образом, передается в цилиндр через сферу.

Вращение диска передается цилиндру посредством сферы, прижимаемой к диску и цилиндру одновременно. Скорость вращения цилиндра при постоянной скорости вращения диска будет пропорциональна расстоянию от центра сферы до оси диска. Если это расстояние пропорционально значению подынтегральной функции $y = f(x)$, а угол поворота диска рациональным значению независимой переменной dx , то угол поворота цилиндра будет пропорционален $\int f(x)dx$.

Томсон адаптирует свой интегратор для вычисления интеграла от произведения двух функций $\int f(x)g(x)dx$, что необходимо для гармонического анализа – расчет Фурье-компонент. Для вычисления этого интеграла с помощью интегратора угол поворота диска должен быть равен $\int g(x)dx$, а смещение сферы относительно центра диска равным $f(x)$.

Уильям Томсон соединяет интеграторы последовательно так, что каждый из них вычисляет конкретную гармонику по записанным данным о движении приливов и отливов.

Интегратор, таким образом, избегая «тяжелых арифметических вычислений», производит подсчет интегралов, необходимых для анализа функций на гармонические составляющие, реализуя «метод Фурье».



Первый гармонический анализатор, не смотря на то, что он не достаточно точно прогнозировал приливы и отливы, сразу же был введен в эксплуатацию в Метеорологическое бюро, где Джеймс предложил его использовать для указания суточных колебаний температуры и атмосферного давления и компоненты скорости ветра, магнитных сил и электрического потенциала воздуха.

Томсон показал принципиальную возможность автоматического решения дифференциальных уравнений путем соединения нескольких интеграторов, однако его идеи не нашли дальнейшего применения и долгое время (до 1904 года, А.Н. Крылов) не делалось попыток построения приборов для интегрирования дифференциальных уравнений.

