Оператор "случайно" в S4.

Во всякой модальной системе выражение $\mathbf{Q}p$ (“случайно, что p”) может быть введено как сокращение для $\mathbf{P}p\&\mathbf{P}{\sim}p$, или для $\mathbf{P}p\&{\sim}\mathbf{N}p$, или для ${\sim}\mathbf{N}p\&{\sim}\mathbf{N}{\sim}p$, или для ${\sim}(\mathbf{P}p\supset\mathbf{N}p)$, где $\mathbf{P}p$ и $\mathbf{N}p$ читаются как “возможно, что p” и “необходимо, что p” соответственно. Обратно, если оператор $\mathbf{Q}$ принимается за исходный, то выражения $\mathbf{N}p$ и $\mathbf{P}p$ как сокращения для $p\&{\sim}\mathbf{Q}p$ и $p\vee\mathbf{Q}p$ соответственно. Пользуясь этими определениями, можно установить некоторые естественные свойства оператора «случайно». К примеру, ясно, что $\mathbf{Q}p\equiv\mathbf{Q}{\sim}p$.

Экспликация же "чисто математических" (т. е. редко используемых в естественном словоупотреблении) свойств этого оператора зависит от выбора той или иной конкретной системы. Выбор нами именно S4 обусловлен ее, по нашему мнению, чрезвычайной (по сравнению с другими модальными системами) приближенностью к контекстам естественного словоупотребления в том, что касается «возможности» и «необходимости».

В первую очередь встает вопрос о дистрибутивности оператора $\mathbf{Q}$ относительно связок $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\equiv$. Из восьми импликаций, призванных выражать эти дистрибутивности, выводима лишь *одна* (напомним, что в случае с оператором $\mathbf{N}$ выводимы *пять* из этих восьми импликаций):

S4 $\vdash \mathbf{Q}(p\vee q)\supset(\mathbf{Q}p\vee\mathbf{Q}q)$.

Не проходят никакие «деонтические» модификации свойства дистрибутивности «случайности» относительно конъюнкции и дизъюнкции, разве что

S4 $\vdash {\sim}\mathbf{Q}(p\equiv q)\supset(\mathbf{Q}p\equiv\mathbf{Q}q)$.

Вопрос о выводимости выражающих дистрибутивность импликаций в случае, когда p и q имеют некоторый специальный вид, связан с вопросом об итерированных модальностях, который мы и рассмотрим.

Ситуация с итерированием оператора $\mathbf{Q}$ в S4 такая же, как и с итерированием оператора $\mathbf{N}$ в S3. Именно,

S4 $\vdash \mathbf{QQQ}p\equiv\mathbf{QQ}p$, но лишь S4 $\vdash \mathbf{QQ}p\supset\mathbf{Q}p$. Напомним, что S4 $\vdash \mathbf{NN}p\equiv\mathbf{N}p$.

Что касается "комбинированных" модальностей, то их число также конечно. Любопытны следующие теоремы редукции:

S4 $\vdash \mathbf{PQ}p\equiv\mathbf{Q}p$;

S4 $\vdash \mathbf{NQQ}p\equiv\mathrm{F}$ (т. е. S4 $\vdash {\sim}\mathbf{NQQ}p$. Однако, в отличие от S5, формула ${\sim}\mathbf{QQ}p$ в S4 невыводима).

Интересны и просто импликации:

S4 $\vdash \mathbf{QN}p\supset{\sim}\mathbf{N}p$; S4 $\vdash \mathbf{QP}p\supset \mathbf{Q}p$; S4 $\vdash \mathbf{PQ}p\supset\mathbf{P}p$.

Центральным результатом является следующее утверждение. В S4 не существует такой формулы p, что S4 $\vdash \mathbf{Q}p$. Доказательство проводится индукцией по длине p.