КРИТЕРИЙ n–ХАРАКТЕРИЗУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЙ РЕШЕТОК

Ж.А.Омаров

Многообразие V решеток называется n–характеризуемым, если существуют n конечные решетки $L_1, L_2, \ldots, L_n$ такие, что V совпадает с классом всех решеток, в каждую из которых невложима ни одна из решеток $L_1, L_2, \ldots, L_n$. При $n = 2$ получим определение 2–характеризуемых многообразии решеток. Для удобства введем обозначения:

$$N(L_1, L_2, \ldots, L_n) = \{A | L_1 \nleqslant A,\ L_2 \nleqslant A, \ldots, L_n \nleqslant A\}$$

Е.Ёжик и В.Славик [1] установили критерии 1–характеризуемости многообразии решеток. Известно, что пересечение любого числа характеризуемых многообразии есть многообразие характеризуемое. Поэтому, пересекая любые два 1–характеризуемых многообразии всегда можно получить примеры 2–характеризуемых многообразии. Такие многообразии можно называть тривиальными. Первым нетривиальным примером 2–характеризуемых многообразии является известная теорема Биркгофа [2]:

$$V(\sigma_2) = N(M_3, N_5),$$

где σ_2 – двухэлементная, а M_3 и N_5 – пятиэлементные модулярная и немодулярная решетки, соответственно.

В связи с появлением критерия 1–характеризуемости многообразия и первого нетривиального примера 2–характеризуемого многообразия $N(M_3, N_5)$ В.А. Горбунов поставил вопрос в частной беседе с автором о критериях 2–характеризуемости многообразия решеток. На этот вопрос отвечает следующее

Предложение 1 *Если L_1 и L_2 конечные подпрямо неразложимые решетки, то класс $N(L_1, L_2)$ многообразие, тогда и только тогда, когда одна из решеток L_1 и L_2 изоморфно вложима во все гомоморфные прообразы решетки L_i, $i \in \{1, 2\}$.*

На основе этого предложения можно получить критерий n–характеризуемости ($n \geqslant 2$), а именно:

Предложение 2 *Если $L_1, L_2, \ldots, L_n$ конечные подпрямо неразложимые решетки, $n \geqslant 2$, то класс $N(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ многообразие, тогда и только тогда, когда одна из решеток $L_1, L_2, \ldots, L_n$ изоморфно вложима во все гомоморфные прообразы решетки L_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

References

[1] Jezek J., Slavik V. *Some examples of primitive lattices* // Acta Univ. Carolinac.–Vol. 14.–№2.–1973.–P.3-8.

[2] Birkhoff G. *On the structure of abstract algebras* // Proc. Cambridge Philos. Soc.–1935.–Vol.31–P. 433-454.