ЕРШОВ Ю.Л.

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАТНО НОРМИРОВАННЫХ ПОЛЕЙ

I. Нормированные поля ([1, 2]).

Пусть F — поле характеристики 0; $R \leq F$ — кольцо нормирования поля F, то есть такое подкольцо F, что для любого $a \in F^\times = F \setminus \{0\}$ либо $a \in R$, либо $a^{-1} \in R$. Пара $\langle F, R \rangle$ называется *нормированным полем* ([1]).

Для кольца нормирования R : - $\mathfrak{m}(R)$ — максимальный идеал R, $F_R \rightleftharpoons R/\mathfrak{m}(R)$ — *поле вычетов*; $U(R) \rightleftharpoons R \setminus \mathfrak{m}(R)$ — группа единиц кольца R, $\Gamma_R \rightleftharpoons F^\times/U(R)$ — линейно упорядоченная группа (порядок задается конусом $R^\times/U(R) \leq \Gamma_R$) - *группа нормирования* (записывается аддитивно); естественный гомоморфизм $v_R : F^\times \to \Gamma_R$ — *нормирование*, определенное кольцом R.

Кольцо нормирования R (нормированное поле $\langle F, R \rangle$) называется *гензелевым*, если для любого унитарного многочлена $f \in R[x]$, если его образ $\bar{f} \in F_R[x]$ имеет простой корень α, то существует корень $a \in R$ многочлена f такой, что $\alpha = a + \mathfrak{m}/R$.

Для любого нормированного поля $\mathbb{F} = \langle F, R \rangle$ существует наименьшее расширение $\mathbb{H}_R(F) = \langle H_R(F), H(R) \rangle \geq \mathbb{F}$, являющееся гензелевым нормированным полем, — *гензелизация* $\mathbb{F}$.

Абсолютным индексом ветвления $a_*(R)$ кольца R является 1, если F_R имеет характеристику 0; натуральное число $n \in \omega$, если F_R имеет характеристику $p > 0$, множество $[0, v_R(p)) \rightleftharpoons \{\gamma | \gamma \in \Gamma_R,\ 0 \leq \gamma < v_R(p)\}$ имеет n элементов ($n = |[0, v_R(p))|$); $a_*(R) = \omega$, если F_R имеет характеристику $p > 0$ и множество $[0, v_R(p)]$ бесконечно.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\langle F, R \rangle \leq \langle F', R' \rangle$ — расширение гензелевых нормированных полей. Если $a_*(R) < \omega$, то это расширение является элементарным тогда и только тогда, когда расширения $F_R \leq F_{R'}$ и $\Gamma_R \leq \Gamma_{R'}$ полей вычетов и групп нормирования, соответственно, являются элементарными.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\langle F_0, R_0 \rangle, \langle F_1, R_1 \rangle$ — гензелевы нормированные поля, $a_*(R_0) < \omega$; $F \leq F_0, F_1$ — общее подполе, $R \leq F, R_0, R_1$ — общее подкольцо такое, что*

$$F = q(R),\ R_0 \cap F = R_{\mathfrak{m}(R_0) \cap R},\ R_1 \cap F = R_{\mathfrak{m}(R_1) \cap R};$$

F_{R_0} сепарабельно над $F_{R_0 \cap F}$; $\Gamma_{R_0 \cap F}$ сервантна в Γ_{R_0}. Тогда $\langle F_0, R_0 \rangle$ элементарно эквивалентно $\langle F_1, R_1 \rangle$ над R $\langle F_0, R_0 \rangle \equiv_R \langle F_1, R_1 \rangle$ тогда и только тогда, когда $F_{R_0} \equiv_R F_{R_1}$ и $\Gamma_{R_0} \equiv_{R^\times} \Gamma_{R_1}$.

II. Кратно нормированные поля (булевы семейства)([1, 2]).

Кратно нормированным полем называют пару $\langle F, H \rangle$, где H-прюферово подкольцо поля F (характеристики 0) такое, что $F = q(H)$. *Прюферовость* H означает, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца H

($\mathfrak{m} \in mSpec\ H$) кольцо частных $H_{\mathfrak{m}}$ является кольцом нормирования. Через $W(H)$ обозначим семейство $\{H_{\mathfrak{m}} | \mathfrak{m} \in mSpec\ R\}$ колец нормирования поля F. *Топология Зарисского* (Z-топология) на $W(H)$ задается базисом $U_a \rightleftharpoons \{H_{\mathfrak{m}} | a \notin \mathfrak{m}\},\ a \in H^{\times} = H \setminus \{0\}$. Семейство $W(H)$ называется *булевым* (*почти булевым)*, если все множества $U_a,\ a \in H^{\times}$ являются замкнутыми (компактными) (в топологии Зарисского). *C-топология* на $W(H)$ задается предбазисом $W_n \rightleftharpoons W(H) \setminus U_a,\ a \in H^{\times}$. Если $W(H)$ булево, то Z-топология и C-топология совпадают.

Семейство $W(H)$ имеет *C-непрерывные локальные элементарные свойства*, если для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры нормированных полей, для любого набора элементов $\bar{a}$ множество $\{R | R \in W(H),\quad \mathbb{H}_R(F) \models \varphi(\bar{a})\}$ является C-открытым.

Кольцо H (семейство $W(H)$, кратно нормированное поле $\langle F, H\rangle$) удовлетворяет *локально-глобальному арифметическому* принципу LG_A, если выполнено следующее:

Любое аффинное (абсолютно неприводимое) многообразие V, определенное над F, имеет простую H-рациональную точку, если V имеет простую $H(R)$-рациональную точку для любого $\quad R \in W(H)$.

Кольцо H (семейство $W(H)$, кратно нормированное поле $\langle F, H\rangle$) удовлетворяет принципу *максимальности* M, если выполнено следующее:

Если $f \in F[x]$ — неприводимый многочлен над F и f имеет корень в $H_R(F)$ для любого $R \in W(H)$, то f линеен.

Кратно нормированное поле $\langle F, H\rangle$ с булевыми семействами $W(H)$ естественно рассматривать в сигнатуре, расширенной предикатом J, выделяющим радикал Джекобсона кольца H.

Пусть $\langle F, H, J(H)\rangle \leq \langle F', H', J(H')\rangle$ — расширение кратно нормированных полей; $W(H),\ W(H')$ — булевы семейства $\quad a_*(R) < \omega (a_*(R') < \omega)$ для любого $R \in W(H)$ $(R' \in W(H'))$; $H(H')$ удовлетворяют принципам LG_A и M, локальные элементарные свойства семейства $W(H)$ $(W(H'))$ C-непрерывны; тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Вложение $\langle F, H, J(H)\rangle\rangle \leq \langle F', H', J(H')\rangle$ является элементарным тогда и только тогда, когда вложение колец $H/J(H) \leq H'/J(H')$ и групп $F^*/U(H) \leq {F'}^{\times}/U(H')$ являются элементарными.*

Заметим, что кольцо $H/(J(H)$ является подкольцом прямого произведения

$$\prod_{R \in W(H)} F_R$$

полей вычетов, а группа $F^{\times}/U(H)$ подгруппой прямого произведения

$$\prod_{R \in W(H)} \Gamma_R$$

групп нормирования; условие C-непрерывности локальных элементарных свойств влечет, что эти вложения являются *элементарными произведениями* (см. [1]).

Ш. Кратно нормированные поля

(почти булевы семейства)([1, 2]).

В настоящем разделе будем рассматривать кратно нормированные поля $\langle F, H\rangle$ такие, что $W(H)$ — почти булево семейство. Естественным расширением сигнатуры в этом случае будет добавление предпорядка $\sqsubseteq_H$, определенного на F так: для $a, b \in F$

$$a \sqsubseteq_H b \rightleftharpoons \forall \mathfrak{m} \in mSpec\ H(a \in \mathfrak{m} \Rightarrow b \in m).$$

В предположении, что H является кольцом Безу (т.е. любой конечно порожденный идеал H является главным), частичный порядок, индуцированный на $E_H(F) \rightleftharpoons F/\equiv_H$ предпорядком $\sqsubseteq_H$, задает на $E_H(F)$ структуру дистрибутивной решетки с наименьшим элементом $([1]_H)$ и относительными дополнениями.

Если на $W(H)$ локальные элементарные свойства C-непрерывны, то с любой формулой $\varphi(\bar{x})$ и набором элементов $\bar{a} \in F$ можно связать следующий идеал решетки $E_H(F)$:

$$T^F_{\varphi,\bar{a}} \rightleftharpoons \{[d]_H | d \in H^\times,\ \forall R \in W_d(\mathbf{H}_R(F) \models \varphi(\bar{a})\}.$$

Пусть $\langle F, H, \sqsubseteq_H\rangle \leq \langle F', H', \sqsubseteq_{H'}\rangle$; локальные элементарные свойства семейства $W(H)$ $(W(H'))$ C-непрерывны; $H(H')$ удовлетворяет принципам LG_A и M (справедливость LG_A влечет, что $H(H')$ — кольцо Безу); для любого простого p существует натуральное число n_p такое, что для любого $R \in W(H)(R' \in W(H'))$, если $F_R(F_{R'})$ имеет характеристику p, то $a_*(R)| \leq n_p$ $a_*(R') \leq n_p)$, то тогда справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Вложение $\langle F, H, \sqsubseteq_H\rangle \leq \langle F', H', \sqsubseteq'\rangle$ является элементарным тогда и только тогда, когда индуцированное вложение решеток $E_H(F) \leq E_{H'}(F')$ является элементарным при обогащении этих решеток идеалами $T^F_{\varphi,\bar{a}}$ $(T^{F'}_{\varphi,\bar{a}})$, $\bar{a} \in F$.*

Сформулируем и условие элементарной эквивалентности: пусть

$$\langle F, H, \sqsubseteq_H\rangle, \quad \langle F', H', \sqsubseteq_{H'}\rangle$$

удовлетворяет условиям, наложенным на $\langle F, H, \sqsubseteq_H\rangle$ перед теоремой 4).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $F \leq F_0, F_1$ — общее подполе, $H \leq F, H_0, H_1$ — общее подкольцо такое, что $F = q(H)$ и для любого $R_0 \in W(H_0)$ имеет место $R \hookrightarrow R_0 \cap F = H_{\mathfrak{m}(R_0)\cap H}$, F_{R_0} — сеперабельное расширение F_R, а Γ_R — сервантная подгруппа Γ_{R_0}. Если*

$$\langle E_{H_0}(F_0),\ T^{F_0}_{\varphi,\bar{a}} | \bar{a} \in H\rangle \equiv \langle E_{H_1}(F_1), T^{F_1}_{\varphi,\bar{a}} | \bar{a} \in H\rangle,$$

то $\langle F_0, H_0, \sqsubseteq_{H_0}\rangle \equiv \langle F_1, H_1, \sqsubseteq_{H_1}\rangle$.

IV. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Полученные теоремы позволяют найти новые классы кратно нормированных полей с разрешимой теорией [3, 4]; определить аналог гензелизации [6] для кратно-нормированных полей; в частности, для полей алгебраических чисел (удивительные расширения [5]) и использовать их для эффективизации глобальной теории полей классов [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю.Л. Кратно нормированные поля, Научная книга, Новосибирск, 2000.
2. Ершов Ю.Л. Кратно нормированные поля П, Алгебра и логика, 41, N6 (2002), 682-712.
3. Ершов Ю.Л. Хорошие локально-глобальные поля. П, Алгебра и логика, 35, N5 (1996), 503-528.
4. Ершов Ю.Л. Хорошие локально-глобальные поля. IV. Сиб. мат. журнал, 43, N3(2002), 526-538.
5. Ершов Ю.Л. Об удивительных расширениях поля рациональных чисел, Докл. РАН, 373, N1 (2000), 15-16.
6. Ершов Ю.Л. Предупорядоченные кратно нормированные поля, Докл. РАН, 382, N5 (2002), 583-588.
7. Ершов Ю.Л. Хорошие расширения и глобальная теория полей классов. Докл. РАН, 388, N 2 (2003), 155-158.