ОБ ОДНОЙ $\omega$-ПРОТИВОРЕЧИВОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Н. В. Белякин (Новосибирск).

Пусть $T$ - формальная система, содержащая $ZF$ , язык которой явно включает арифметическую сигнатуру, а числовые переменные пробегают $\omega$. Сверх того положим, что к числу $T$-формул относятся записи вида $[\psi(\overline{x}), \Delta(Q, \overline{x}, a), a]$, где $a$ — числовая переменная, $\psi$ — формула в $ZF$-сигнатуре (обогащенной числовыми переменными), $\Delta$ — формула той же сигнатуры с предикатной переменной $Q$. Прочие $T$-формулы строятся из $ZF$-формул и записей означенного вида с помощью пропозициональных связок и предметных кванторов. Формулы эти надлежит воспринимать как ничего не означающие знакосочетания.

Потребуем, чтобы в составе $T$-аксиоматики присутствовали схемы:

$$[\psi(\overline{x}), \Delta(Q, \overline{x}, a), a]|_0^a \leftrightarrow \psi(\overline{x});$$

$$[\psi(\overline{x}), \Delta(Q, \overline{x}, a), a]|_{b+1}^a \leftrightarrow (\Delta|^{Q,a}_{[\psi(\overline{x}), \Delta(Q,\overline{x},a),a]|_b^a, b}).$$

Остальные $T$-аксиомы суть аксиомы $ZF$ и аксиомные $ZF$-схемы, распространенные (наряду с логическими схемами) на любые $T$-формулы. Нетрудно проверить, что $T$ непротиворечива относительно $ZF+$(*существует сильно недостижимый кардинал*).

**Теорема 0.1** *Система $T$ $\omega$-противоречива.*

Данный факт устанавливается на метаматематическом уровне. Это значит, что для некоторой $T$-формулы $\varphi(a)$ можно предъявить два метаматематических объекта: формальное $T$-доказательство предложения $\exists a \varphi(a)$ и примитивно-рекурсивное описание функции $G(a)$, дающей по любому нумералу $n$ геделевский номер $T$-доказательства $\neg\varphi(n)$, и указанное свойство функции $G$ выводимо в рекурсивной арифметике. Отсюда, в частности, следует, что существование сильно недостижимого кардинала опровержимо в $ZF$.