ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А.И. Литвин, **В.Б. Кусков, А.И. Май**

Институт оптического мониторинга СО РАН,

Томск, Россия

Рассматриваются варианты двумерных уравнений Гельмгольца; хотя возможны и обобщения рассматриваемых уравнений на трехмерный случай.

1. Использование ОДП для решения задачи Дирихле уравнений Гельмгольца.

Пусть для уравнения Гельмгольца с постоянными коэффициентами $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \mu u(x,y) = -f\left(x,y\right)$ поставлена первая краевая задача в прямоугольной области.

Введем равномерную сетку $x_n = \{nh_1, y_m = mh_2, 0 \le n \le N, 0 \le m \le M\}$, где N и M – числа, равные степеням двойки. Для уравнения Гельмгольца разностные решения будем искать в виде разложения в ряд Фурье [1, 2]: $u_{n,m} = \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{M-1} a_{p,q} W_1^{np} W_2^{mq}$; $W_1 = \exp(2\pi i / N), W_2 = \exp(2\pi i / M)$. Коэффициенты Фурье будут иметь вид [2]:

$$a_{p,q} = b_{p,q} / \left(\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi p}{N} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi q}{M} + \mu \right),$$

$$b_{p,q} = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\varphi_{n,m} W_1^{-np} W_2^{-mq}, \text{ или } b_{p,q} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\beta_{n,q} W_1^{-np}, \quad \beta_{n,q} = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\varphi_{n,m} W_2^{-mq}.$$

Представим решение уравнения в виде: $u_{n,m} = \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{M-1} a_{p,q}\, wal_p(n,p)\, wal_p(m,q),$

$$a_{p,q} = b_{p,q} / (\alpha_p + \alpha_q + c);\ b_{p,q} = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m}\, wal_p(n,p)\, wal_p(m,q), \text{ или}$$

$b_{p,q} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\beta_{n,q}\, wal_p(n,p), \beta_{n,q} = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m}\, wal_p(m,q),$ где $wal_p(n,p)$ - функции Уолша-Пэли. Величины α_p и α_q имеют вид [2]:

$$\alpha_p = \begin{cases} 0, \textit{если } 0 \le p \le N/2-1; \\ 4/h_1^2, \textit{если } N/2 \le p \le N-1; \end{cases} \qquad \alpha_q = \begin{cases} 0, \textit{если } 0 \le q \le M/2-1; \\ 4/h_2^2, \textit{если } M/2 \le q \le M-1. \end{cases}$$

Из решения следует, что двумерная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца с постоянными коэффициентами сводится к одномерной задаче ввиду того, что ОДП Фурье и Уолша являются разделимыми преобразованиями [2].

2. Использование преобразований Фурье и Уолша к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение $-\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y);$ $u(x,y)_{\partial P} = 0,$ $(x,y) \in \mathrm{P} = (0,l_1)\times(0,l_2);$ $u(x,y)_{\partial P} = 0,$ где $\partial \mathrm{P}$ – граница прямоугольника, $c(x,y) \ge 0.$ Пусть G – пятидиагональная матрица, соответствующая оператору

Лапласа, а матрица С – диагональная. Уравнение можно записать в матричной форме: $(\mathrm{G}+\mathrm{C})\bar{u} = \bar{f}$, где $\bar{u}$ - неизвестный вектор, $\bar{f}$ - вектор, соответствующий правой части уравнения. Предположим, что все коэффициенты c_{ij} постоянны. Тогда решения уравнения известны и имеют вид формул из пункта 1 [2]. Пусть теперь коэффициенты c_{ij} являются переменными. Уравнение представим в виде Au=f, где A – линейный оператор. Систему $(\mathrm{G}+c)\bar{u} = \bar{f}$, можно решить итерационным методом Чебышева [2]: $Bu^{(k+1)} = Bu^{(k)} + \tau_{k+1}(f - Au_k)$; $k = 0,1,\ldots$ где τ_{k+1} – оптимальный параметр метода Чебышева.

Обозначим: $v^k = Bu^k + \tau_{k+1}\left(f - Au^{(k)}\right)$; $k = 0,1,\ldots$ и решим СЛАУ: $Bu^{(k+1)} = v^k$; $k = 0,1,\ldots$ Оператор B можно найти следующим образом: $c_{\min} = \min c_{ij}$, $1 \le i \le N$, $1 \le j \le M$, $c_{ij} = c(ih, jh)$ – коэффициенты уравнения Гельмгольца.

Пусть теперь $\overline{\mathrm{C}}$ – диагональная матрица размерности $N \times M$ с коэффициентами $c_{\min}$. Положим $\mathrm{B} = \mathrm{G} + \overline{\mathrm{C}}$. Тогда выражение $\mathrm{B}u^{(k+1)} = v^k$; $k = 0,1,\ldots$ примет вид: $\left(\mathrm{G}+\overline{\mathrm{C}}\right)u^{(k+1)} = v^k$; $k = 0,1,\ldots$ Таким образом, решение системы сводится к решению уравнения Гельмгольца с постоянными коэффициентами [2]. Число итераций в двухслойном методе Чебышева определяется по формуле: $n(\varepsilon) = \ln\frac{2}{\varepsilon} / \ln\frac{1}{\rho_1}$, где $\rho_1 = \left(1-\sqrt{\xi}\right)/\left(1+\sqrt{\xi}\right)$. Так как ε>0 известно, то остается определить величину $\xi = \gamma_1/\gamma_2$; $\gamma_1(\mathrm{B}x, x) \le (\mathrm{A}\,x, x) \le$ $\le \gamma_2(\mathrm{B}x, x)$, где в данном случае (x, y) определяет внутреннее произведение. Величины τ_k определяются: $\tau_k = \tau_0/(1+\rho_0\mu_k)$, где $\rho_0 = (1-\xi)/(1+\xi)$; $\tau_0 = 2/(\gamma_1+\gamma_2)$; $\mu_k = \mathrm{D}_n$ – множества корней полиномов Чебышева первого рода $\mathrm{T}_n(x)$: $\mathrm{D_n} = \{-\cos[(2i-1)\pi/2n];\ i = \overline{1,n}\}$.

Пусть $c_{\max} = \max c_{ij}, 1 \le i \le N, 1 \le j \le M; \alpha_1(x,x) \le (\mathrm{Gx},\mathrm{x}) \le \alpha_2(x,x)$.

<u>Теорема</u>. Можно показать [2], что $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1 + \dfrac{c_{\max} - c_{\min}}{\alpha_1 + c_{\min}}$.

Из теоремы следует: $\xi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = \dfrac{\alpha_1 + c_{\max}}{\alpha_1 + c_{\min}}$.

<u>Пример</u>. Пусть требуется решить следующее уравнение Гельмгольца:

$\nabla^2 u(x,y) - c(x,y) = -f(x,y), (x,y) \in \mathrm{P} = (0,1)\times(0,1), u(x,y)|_{\partial P} = 0,$

где $c(x,y) = x + y$. Тогда h=1/(N+1), $c_{\min} = 2h, c_{\max} = 2 - 2h.$ Величины равны $\alpha_1 = 16, \gamma_1 = 1, \gamma_2 \approx 9/8, \xi \approx 8/9.$

Для решения уравнения Гельмгольца с точностью для явного чебышевского метода нужно выполнить 64 итерации, а для неявного - 6.

Литература

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1976, 512 с.
2. Коваленко И.Л., Ленивцева Л.Ю., Литвин А.И., Симонженков С.Д. Применение к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца неявного вариационно-градиентного метода //Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1995, т. 35, № 4, с. 611-615.