АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE

Ю.В. Лялин
Институт оптического мониторинга СО РАН
Томск, Россия

Ищем решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(z,y)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u(z,y)}{\partial y^2}=-2A, \tag{1}$$

в виде:

$$u(z,y)=u_0(z)+u_0(z)u_1(y)=u_0(z)\left(1+u_1(y)\right) \tag{2}$$

Сначала находим $u_0(z)$ как решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_0(z)}{\partial z^2}=-2A \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$u_0(0)=u_{пов.},\quad u_0(h)=u_{дон.} \tag{4}$$

Подставляем (2) в (1) и разрешаем полученное уравнение относительно $u_1(y)$ с граничными условиями:

$$u_1(0)=0,\quad u_1(b)=\frac{u_{бер.}-u_0(0)}{u_0(0)}. \tag{5}$$

Используя систему компьютерной алгебры MAPLE получим:

```
> eq:=diff(diff(u0(z),z),z)=-2*A;
```

$$eq:=\frac{d^2}{dz^2}u0(z)=-2A$$

```
> s:=dsolve({eq,u0(0)=umax, u0(h)=u0min},u0(z));
```

$$s:=u0(z)=-A^2z+umax+\frac{(A^2h-umax+u0min)z}{h}$$

```
> u0(z):=rhs(s);
```

$$u0(z):=-A^2z+umax+\frac{(A^2h-umax+u0min)z}{h}$$

```
> u(z,y):=u0(z)+u0(z)*u1(y);
```

$$u(z,y):=-A^2z+umax+\frac{(A^2h-umax+u0min)z}{h}+$$
$$+\left(-A^2z+umax+\frac{(A^2h-umax+u0min)z}{h}\right)\cdot u1(y)$$

```
> Uz(z,y):=diff(diff(u(z,y),z),z);
```

$$Uz(z,y):=-2A-2A\,u1(y)$$

```
> eq1:=Uz(z,y)+diff(diff(u(z,y),y),y)=-2*A;
```

$$eq1 := -2A - 2Au1(y) + \left(-A^2 z + umax + \frac{(A^2 h - umax + u0min)z}{h}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}u1(y)\right) = -2A$$

```
> simplify(rhs(dsolve({eq1,u1(0)=0, u1(b)=(u1min-umax)/umax},u1(y))));
```

$$-\frac{(-u1min + umax)\left(e^{\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\%1\,A\,h}\,y}{\%1}\right)} - e^{\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\%1\,A\,h}\,y}{\%1}\right)}\right)}{umax\left(e^{\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\%1\,A\,h}\,b}{\%1}\right)} - e^{\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\%1\,A\,h}\,b}{\%1}\right)}\right)}$$

$$\%1 := -umax\,h + z\,umax - z\,u0min$$