

ИССЛЕДОВАНИЕ 2D-МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ТИПА БУССИНЕСКА
НА РЕШЕНИИ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ С
ПРЕПЯТСТВИЯМИ¹

З.И. Федотова, Л.Б. Чубаров, Ю.И. Шокин

*Институт вычислительных технологий СО РАН
Сибирское отделение Российской академии наук, Новосибирск, Россия*

В докладе обсуждаются результаты численного моделирования трансформации длинных гравитационных поверхностных волн в рамках математических моделей теории мелкой воды, главным образом, нелинейно-дисперсионных (НЛД) моделей типа Буссинеска. На основе модификации НЛД-модели Перегринна построен экономичный численный алгоритм, примененный для решения задачи о взаимодействии длинной волны с конусообразным островом

Введение

Для описания распространения и трансформации поверхностных волн конечной длины и умеренной амплитуды часто применяются НЛД-модели типа Буссинеска. В последние годы для численной реализации таких моделей активно развиваются конечно-элементные методы, но, в то же время, использование традиционных конечно-разностных схем, позволяет получать достаточно адекватные результаты при значительно меньших затратах вычислительных ресурсов [1-4]. Разнообразие математических моделей указанного типа и алгоритмов их решения делает весьма актуальной задачу сравнительного анализа разрабатываемых вычислительных моделей и определение их областей применимости

Разработанные авторами конечно-разностные алгоритмы основаны на хорошо известной и достаточно простой НЛД- модели, впервые предложенной Д. Перегринном [5].:

$$\eta_t + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad (1a)$$

$$\mathbf{u}_t + \varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla\eta = \sigma\mathbf{T}_t, \quad (1b)$$

$$\mathbf{T} = H/2(\nabla(\nabla \cdot H\mathbf{u}) - H/3\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})). \quad (2)$$

Система уравнений записана в безразмерном виде, при этом использованы следующие обозначения: t – время, η – возвышение свободной поверхности, $H=H(x, y)$ – глубина невозмущенной жидкости, $h=H+\eta$ – полная глубина жидкости, ∇ – оператор вектор-градиента в плоскости переменных x, y ; $\varepsilon = \alpha_0/H_0$, $\sigma = (H_0/\lambda_0)^2$ – параметры нелинейности и дисперсии (λ_0, H_0, α_0 – характерные горизонтальный размер, глубина бассейна и амплитуда волны).

При выводе модели и в ее преобразованиях параметры ε и σ предполагаются малыми одного порядка. Вектор-функция $\mathbf{u}(x, y)$ с компонентами (u, v) , представляет усредненную по глубине скорость соответствующей полной модели.

Отметим, что уравнения Перегринна часто используются при моделировании процессов волновой гидродинамики. В частности, один из алгоритмов на основе этой модели был описан и успешно применен для решения задачи о трансформации поверхностных волн в канале с модельной "квази-одномерной" структурой дна на полукруглом шельфе в работе Ригга [6].

В докладе обсуждается модификация модели Перегринна, допускающая построение эффективной разностной схемы и ее экономичную реализацию. Особое внимание уделено сопоставлению численных результатов, полученных с помощью моделей различного порядка гидродинамической аппроксимации, зависимости точности воспроизведения волнового режима от параметров расчетной сетки и от модификации (в сторону упрощения) геометрии острова.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (Гранты № 97-01-00819, № 96-15-96265)

Модификация модели

Рассмотрим модификацию дисперсионных членов, входящих в уравнения движения исходной модели с тем, чтобы оставаясь в пределах выбранного порядка гидродинамической аппроксимации $O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma, \sigma^2)$ привести эти дисперсионные слагаемые к виду, целесообразность которого будет ясна ниже. Применяя соотношение $\text{rot } \mathbf{u} = O(\sigma)$ и приближение нулевого порядка для уравнения движения, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla\eta &= \sigma H/2(\mathbf{F}_t - \nabla^{ort} \mathbf{G}), \quad \mathbf{F} = \Delta(H\mathbf{u}) - H\Delta\mathbf{u}/3, \\ \nabla^{ort} &= (\partial/\partial y, -\partial/\partial x), \quad \mathbf{G} = H_x \eta_y - H_y \eta_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что в уравнениях движения (3) под знаком производной стоит только одна из компонент вектора скорости. Модификация модели завершается введением вспомогательной неизвестной $\mathbf{U} = \mathbf{u}_t$, с учетом которой система (3) переписется следующим образом:

$$\sigma H/2 \{ \Delta(H\mathbf{U}) - H/3 \Delta\mathbf{U} \} - \mathbf{U} = \varepsilon(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla\eta + \sigma H/2(\nabla^{ort} \mathbf{G}), \quad \mathbf{U} = \mathbf{u}_t. \quad (4)$$

Дополненные уравнением неразрывности уравнения (4) позволяют определить искомые параметры волнового режима, при этом для нахождения вектор-функции \mathbf{U} получено достаточно простое уравнение эллиптического типа.

Постановка задачи завершается описанием соответствующих начальных и краевых условий.

Численный алгоритм

Для построения конечно-разностного алгоритма используется полностью разнесенная равномерная прямоугольная сетка, на которой с помощью схемы "крест" аппроксимируются уравнения (1a), (4), при этом для решения эллиптической части задачи используются метод SOR.

Разностная схема для уравнений (4), в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left\{ \delta_t u = U \right\}_{k,m+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \left\{ \frac{\sigma H}{2} \left[(\delta_x^2 + \delta_y^2)(HU) - \frac{H}{3} (\delta_x^2 + \delta_y^2)U \right] - U = F \right\}_{k,m+\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ F_{k,m+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left\{ \mu_t u \delta_x \mu_{t,x} u + \mu_{t,y,x} v \delta_y \mu_{t,y} u \right\}_{k,m+\frac{1}{2}}^{n+1} + \left\{ \delta_x \eta + \frac{\sigma}{2} H \delta_y (\delta_x H \delta_y \mu_x \eta - \delta_y H \delta_x \eta) \right\}_{k,m+\frac{1}{2}}^{n+1}, \end{aligned}$$

где символами δ_α , μ_α обозначены стандартные операторы центральной разности и усреднения по аргументу α . Такая схема условно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации. Для организации вычислительного процесса применяются некоторые приемы итерации по нелинейности конвективных членов в правой части уравнений движения.

Вычислительный эксперимент

В рамках описанной выше модели были выполнены расчеты, в ходе которых исследовалось взаимодействие уединенной волны с коническим островом. Полученные результаты сравнивались с данными лабораторных экспериментов, проведенных в Инженерной экспериментальной станции водного транспорта вооруженных сил США. Данные были получены по с помощью профессора Harry Yeh (harryeh@u.washington.edu).

Опуская исследование стадии наката волны на берег, авторы несколько упростили структуру рельефа дна, заменив верхнюю часть острова цилиндром, установленным на коническом основании (Рис. 1). Плоская входящая волна задавалась соответствующим граничным условием на одной из сторон прямоугольной расчетной области.



Рисунок 1

Выводы

Результаты расчета представлены изображениями свободной поверхности (Рис. 2) и мареограммами, рассчитанными непосредственно перед островом и за ним (Рис. 3).

Анализ полученных результатов, в частности, сравнение расчетов, выполненных с использованием различных моделей волновой гидродинамики, показал, что исследуемый процесс имеет выраженный нелинейно-дисперсионный характер и предложенная НЛД-модель воспроизводит реальный волновой режим в достаточно широком диапазоне амплитуд.

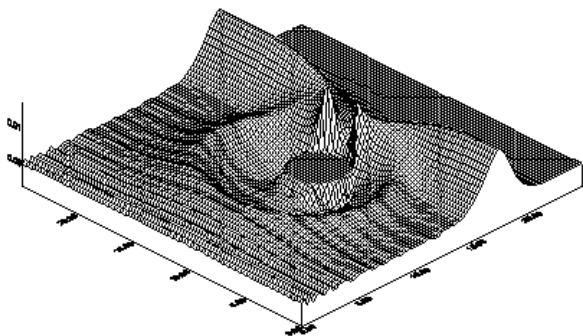


Рисунок 3

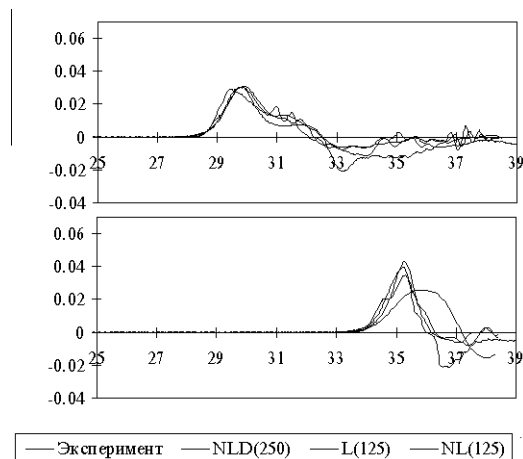


Рисунок 2

Литература

1. Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. –Н.: Наука, Сибирское отделение, 1983.
2. Chubarov L.B., Yu.I. Shokin, N 3, 229 (1987)
3. Fedotova, V.Yu. Pashkova, Russ. J.Numer.Anal. Math. Modelling, N 2, 127 (1997)
4. Хакимзянов Г.С.
5. D.H.Peregrine, Fluid Mech., V. 27, 815 (1967)
6. O.B.Rigg, Coastal Engineering, V.12, 191 (1988)