VI *Международная конференция по вычислительным методам в задачах волновой гидродинамики.*

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ДИНАМИКИ ТЕЧЕНИЙ МАЛЫХ ОЗЕР НА ПРИМЕРЕ ОЗЕРА ШИРА.[1]

Гаврилова Л.В., Компаниец Л.А.*

КГТУ, ФИВТ, МО ЭВМ, Красноярск, Россия, ул.Киренского, 26
ИВМ СО РАН, Красноярск, Россия, Академгородок
E-mail: kla@cc.krascience.rssi.ru

1. При выборе математических моделей и методов расчета необходимо учитывать все особенности объекта, для которого проводятся расчеты. Это позволяет значительно упростить численный алгоритм. Так, например, озеро Шира представляет собой бессточное озеро без островов, размеры его $9\,км$ на $5\,км$, в которое впадает одна речка Сон. В силу малости притока все влияние реки сосредоточено в приустьевой зоне, поэтому для математического моделирования ветровых течений можно пренебречь влиянием реки и использовать усредненные по глубине уравнения линейной мелкой воды

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = lv - K_{bt}\frac{u|\overline{V}|}{h} + K_w\frac{w_x|\overline{W}|}{h}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = -lu - K_{bt}\frac{v|\overline{V}|}{h} + K_w\frac{w_y|\overline{W}|}{h}, \\ &\eta_t + \nabla(H\overline{V}) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где (x,y) – пространственные переменные, $\overline{V} = (u,v)$ – вектор скорости течения по направлениям x, y соответственно, η – возвышение свободной поверхности, h – полная глубина, $h = \eta + H(x,y)$, H – глубина бассейна, $\overline{W}(t)$ – вектор скорости ветра, $l = 2\omega\sin\varphi$ – параметр Кориолиса, ω – угловая скорость вращения Земли, φ – широта места, K_{bt} – коэффициент придонного трения, $K_{bt} = gK_m^2/h^4$, K_m – коэффициент Маннинга, K_w – коэффициент касательного ветрового напряжения, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, с начальными условиями для (1)

$$u(x,y,0) = u_0(x,y),\ v(x,y,0) = v_0(x,y),\ \eta(x,y,0) = \eta_0(x,y),$$

и условиями отражения от жесткой стенки (нормальная компонента скорости равна нулю) на всех берегах .

Для решения этих уравнений применяется явная разностная схема второго порядка аппроксимации Мак-Кормака, устойчивая при выполнении обычного условия Куранта для гиперболических систем уравнений.

2. Была проведена серия расчетов для проверки учета параметра Кориолиса. Показано, что при шаге разностной сетки $\Delta x = \Delta y = 276\,м$, $\Delta t = 10\,сек$, $g = 10\,м/сек$, скорость ветра $10\,м/сек$, число шагов по времени 200 влияние параметра Кориолиса несущественно, что может быть связано с небольшими размерами озера. Следовательно, в уравнениях (1) можно положить параметр $l = 0$, разделить уравнения движения и для оценки плановых течений достоверно применять одномерные модели.

[1] Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы "Интеграция" "Экспертиза, мониторинг, прогноз качества воды и лечебных свойств уникального сибирского озера Шира" (рег.№ 73) и Красноярского краевого фонда науки, проект 7Ф0036.

3. Основное движение в оз.Шира определяется ветровым воздействием, но при сложной батиметрии озера трудно оценить правильность расчетов. Поэтому был проведен анализ влияния геометрии области и параметров разностной схемы на течение в одномерном случае. В тестовых одномерных расчетах бралось 53 точки и $\Delta x = 138$, что соответствует длине озера Шира, и глубина $10\,м$, что соответствует средней глубине озера. Одномерные расчеты показывают, что при коэффициенте $K_w = 1.2 \cdot 10^{-5}$ имеем колебание поверхности с периодом около 700 сек. Естественно, для озер большей протяженности период колебаний больше. При этом качественно картина свободной поверхности совпадает с рисунком статьи [1]. Увеличение области расчетов в 2 и 4 раза приводит к увеличению амплитуды и периода колебаний почти линейно.

4. Для определения распределения скоростей в зависимости от глубины использовалась система уравнений [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - lv &= g\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= g\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial v}{\partial z}\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

K_z – коэффициент диффузии, в общем случае $K_z = K(z)$. Система уравнений (2) дополнена граничными условиями при $z = \eta$:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = -\Theta \frac{\rho_a}{\rho_b} \left|\overline{W}\right| w_x, \quad K_z \frac{\partial v}{\partial z} = -\Theta \frac{\rho_a}{\rho_b} \left|\overline{W}\right| w_y,$$

где ρ_a – плотность атмосферы, ρ_b – плотность воды, $\Theta = 0.0012$, и при $z = H$:

$$u = 0, \quad v = 0, \text{ — условие прилипания,}$$

или

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} = K_* \left|\overline{V}\right| \overline{V}, \text{ — условие проскальзывания.}$$

Значение $\xi\,(x, y)$ берется из решения предыдущей задачи.

Для проверки влияния граничных условий на дне коэффициент K_z был взят в соответствии с формулой Прандтля-Обухова.

Расчеты показывают, что при данной геометрии расчетной области влияние параметра Кориолиса в уравнениях (2) также несущественно. Если в (2) положить $l = 0$, то численный алгоритм упрощается: нахождение скоростей в зависимости от глубины сводится к применению метода скалярной прогонки, а не матричной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головизин В.М., Симачева О.Г., Сороковикова О.С. Метод расчета конвективных течений стратифицированных жидкостей со свободной верхней границей. – Математическое моделирование, т.4, № 9, 1992, с.1101–1112.
2. Добровольская З.Н., Епихов Г.П., Корявов П.П., Моисеев Н.Н. Математические модели для расчета динамики и качества сложных водных систем. – Сб.: Численные методы в гидравлике, 1981, с.33–51.