

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ДОСТАТОЧНО ДЛИННЫХ ВОЛН НА ВОДЕ В БАССЕЙНЕ С ПОЛОГИМ ДНОМ

А.А.Литвиненко и Г.А. Хабахпашев*

*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
электронная почта: geshev @ otani.thermo.nsk.su*

На предыдущей конференции была доложена модель для описания эволюции трехмерных возмущений свободной поверхности несжимаемой вязкой жидкости (см., [1]). Предполагалось, что, во-первых, стационарные компоненты скорости воды отсутствуют, во-вторых, «длина волны» существенно больше, а амплитуда возмущения значительно меньше равновесной глубины слоя h , в-третьих, капиллярные эффекты не велики (число Бонда $Bo = \rho g h^2 / \sigma > 1$, где ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, а σ - поверхностное натяжение), в-четвертых, неподвижное недеформируемое дно является слабонаклонным, и наконец, в-пятых, появляющиеся пограничные слои остаются тонкими, т. е. время прорастания пограничного слоя на всю толщу воды много больше «периода» волны. Следовательно, возникающее течение будет потенциальным всюду за исключением узкой придонной области.

В результате была выведена система двух уравнений для возмущений свободной поверхности η и осредненной по глубине жидкости горизонтальной составляющей скорости \mathbf{u} :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (h + \eta)(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(h + \eta) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(g\eta + \frac{u^2}{2} - \frac{\sigma}{\rho} \nabla^2 \eta + \frac{h}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{(h + \eta)} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \left(g \nabla \int_0^t \frac{\eta dt_i}{\sqrt{t-t_i}} - \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{t}} \right)$$

Здесь t - время, оператор ∇ определен в горизонтальной плоскости, ν - кинематическая вязкость, \mathbf{u}_0 - начальное возмущение скорости воды. Если нелинейные волны бегут преимущественно в одном (хотя и произвольном) направлении, то систему уравнений (1) удастся свести к одному эволюционному уравнению для возмущения уровня жидкости:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \nabla^2 \eta - \frac{3}{2} g \nabla^2 \eta^2 - h^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{Bo} \right) \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g(\nabla \eta \cdot \nabla h) + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \left(g \nabla \int_0^t \frac{\eta dt_i}{\sqrt{t-t_i}} - \frac{1}{h\sqrt{t}} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (2)$$

где η_0 - начальное возмущение уровня. Подчеркнем, что волны очень малой амплитуды могут одновременно двигаться в любые стороны (в том числе, в противоположные).

Используя традиционный метод конечных разностей (см., например, [2]), с помощью уравнения (2) проведен ряд вычислительных экспериментов.

Показано, что расчеты по накату нелинейных уединенных плоских волн на берег хорошо согласуются с опытными данными по лабораторному моделированию трансформации таких возмущений свободной поверхности воды [3]. При этом вклады пятого и шестого членов уравнения (2) были пренебрежимо малы, а наклон дна фактически учитывался изменением коэффициентов при втором и четвертом членах.

В случае, когда вязкость жидкости существенна, рассмотрен вопрос о конкуренции между влияниями уменьшения глубины бассейна и нестационарного трения о дно. Продемонстрированы различные варианты (рис. 1), в частности, ситуация, при которой указанные эффекты практически уравнивают друг друга (амплитуда одиночной волны не меняется со временем, хотя за основным фронтом четко видны вязкий и дисперсионный «хвосты»).

При изучении трехмерных возмущений исследована эволюция нелинейных уединенных плоских волн над подводным хребтом, расположенным параллельно волновому вектору. Для очень широкого хребта наблюдается лишь некоторое отставание возмущения, увеличение его амплитуды и образование осциллирующего «хвоста», а для достаточно узкого хребта имели место, кроме того, слабые волны типа корабельных (рис. 2).

Представлены результаты по распространению возмущений, являющихся суперпозицией двух плоских солитонов, которые движутся под прямым углом друг к другу. Наконец, смоделировано воздействие конически-цилиндрического острова на нелинейную уединенную плоскую волну.

Все вышеупомянутые расчеты дают возможность сделать вывод, что уравнение (2) применимо для решения рассматриваемого класса задач волновой гидродинамики.

Данная работа поддержана РФФИ (проект 96-01-01766) и СО РАН (грант ИГ-43-97).

Список литературы

1. **Хабахпашев Г. А.** Нелинейное эволюционное уравнение для достаточно длинных волн на свободной поверхности вязкой жидкости // *Вычисл. технол.* 1997. Т. 2, № 2. С. 94–101.
2. **Шокин Ю. И., Чубаров Л. Б., Марчук Ан. Г., Симонов К. В.** *Вычислительный эксперимент в проблеме цунами.* Наука, Сиб. отделение, Новосибирск, 1989.
3. **Proceedings of the International Workshop on Long Wave Runup Models.** Friday Harbor, San Juan Island, WA, USA, September 12–16, 1995.

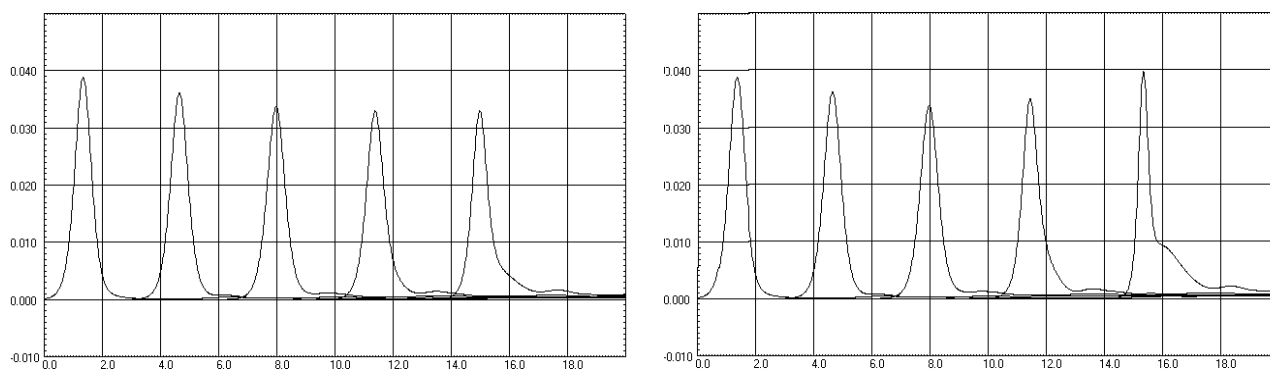


Рис. 1. Конкуренция между влияниями нестационарного трения о дно и уменьшения глубины бассейна. Расстояние между датчиками – 5 м, $h = 0.2$ м, $\nu = 100 \text{ мм}^2/\text{с}$. До третьего датчика дно горизонтально, а затем $dh/dx = -1/200$ (слева) и $-1/100$ (справа).

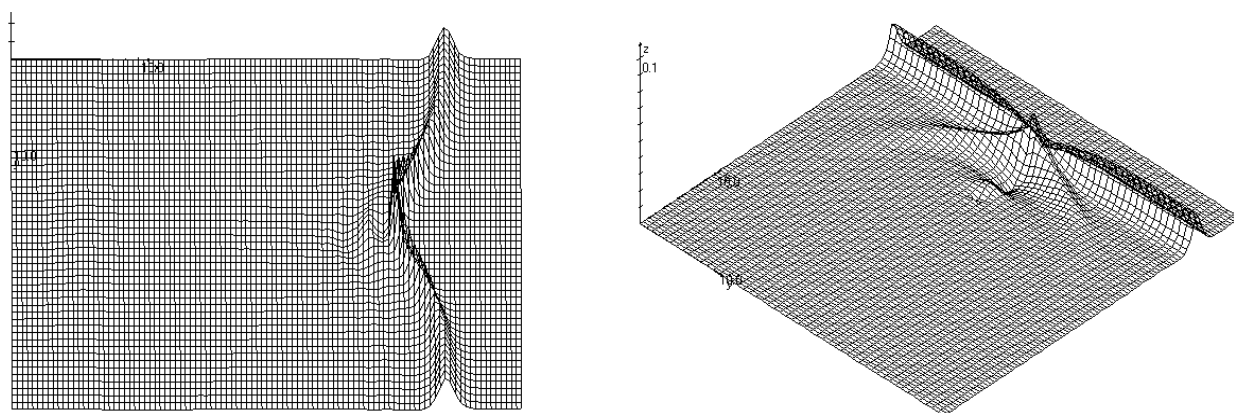


Рис. 2. Деформация первоначально плоской нелинейной уединенной волны над подводным хребтом, расположенным параллельно волновому вектору. Длина бассейна – 40 м, а его ширина – 30 м; глубина жидкости – 0.2 м. Хребет начинается на расстоянии 10 м от левого края бассейна и через 5 м достигает высоты 0.1 м, которая в дальнейшем не меняется. Характерная ширина хребта ~ 10 м (слева) и ~ 1 м (справа).