СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ С УЧЕТОМ АНАЛИЗА РАЗРЕШИМОСТИ ВАРЬИРУЕМЫХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЦЕНИЙ

В.Н. Пилишкин
Московский Государственный Технический
107005 Москва, ул.Бауманская, д.5
E-mail: pilishkin@hotmail.com

Введение

Для широкого класса динамических систем актуальной является проблема, как построения допустимых законов управления при наличии тех или иных ограничений на переменные системы с учетом имеющейся о них информации, так и последующей реализации синтезированных законов. Причем особенно важным будет совмещение процедур синтеза и реализации законов управления, т.е. представление (или объединение) двух различных процедур в виде одной. Это становится возможным, если используемый метод синтеза может быть реализован в реальном времени. Многие известные подходы [1]-[4] не позволяют учитывать различные ограничения, накладываемые непосредственно на систему (на векторы состояния, управления и возмущения, на параметры и структуру), а также те или иные требования, предъявляемые к характеру её функционирования (обеспечение желаемого или предпочтительного поведения системы в соответствии с определенными критериями, обеспечение заданного качества и свойств). Кроме того, формирование требуемого закона управления для различных систем часто связанно с существенными трудностями. Для преодоления этих трудностей разрабатываются различные процедуры синтеза, основанные на использовании соответствующих алгебраических преобразований системы [5]. Однако и в этом случае не удается учесть возможные ограничения и требования. С целью обеспечения различных условий, предъявляемых к системе, формализации из описания и формировании с учетом этого эффективных алгоритмов управления.

Аналитическая процедура формирования разрешимых ограничений

Рассмотрим реализацию теоремы 3 при квадратичных ограничениях на траекториях линейной алгебры, т.е.

$\dot{x} = Ax + Bu$, A – nxn матрица, (a)

$$\Psi(x,t) = (x, Mx) - q(t),$$

M>0 – nxn положительно-определенная матрица,
q(t)>0 – скалярная положительная непрерывно-дифференцируемая функция.
Подставляя в неравенство ( ) выражения

$$f_1(\bullet) = Ax,\ \nabla_X \Psi = 2Mx,\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\dot{q}\ ,$$

приходим к следующему соотношению

$$(Ax, 2Mx) - \dot{q} > 0\ ,$$

рассматриваемому на границе вида

$$(x, Mx) = q\ .$$

Обозначим $H = KerB^T$ - κ -мерное подпространство пространства R^n. Образуем в H произвольный базис $\{p_i\}_{i=1}^{\kappa}$. Пусть $P = \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_\kappa\}$ - n x κ матрица.

Если $\nabla_X \Psi = 2Mx \in H$, то данный вектор можно представить в виде.

$$2Mx = Pz, \quad z \in R^{\kappa}\ , \tag{3}$$

Причем

$$x = \frac{1}{2} M^{-1} Pz., \tag{4}$$

Предположим, что условия теоремы не выполняются. Тогда обязательно найдется такой вектор $\nabla_X \Psi$ вида (3), для которого обеспечиваются соотношения (1), (2). А это, с учетом (3), (4), означает, что в данном случае справедливы условия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(P^T A M^{-1} P z, z\right) - \dot{q} > 0 \\ &at\ \frac{1}{4}\left(P^T M^{-1} P z, z\right) = q \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

Введем обозначения

$$F=\frac{1}{4}P^T\left(M^{-1}A^T+AM^{-1}\right)P,\ G=\frac{1}{4}P^TM^{-1}P,$$

Очевидно, $F = F^T$, $G = G^T$ и $G > 0$ - положительно-определенные матрицы. Тогда (5) примет вид

$$\left.\begin{array}{l}(Fz,z)-\dot{q}>0\\ at\ (Gz,z)=q\end{array}\right\}, \tag{6}$$

Чтобы условия теоремы должно обеспечиваться соотношение

$$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{z}\left[(Fz,z)-\dot{q}\right]\le 0\\ at\ (Gz,z)=q\end{array}\right\}, \tag{7}$$

В [6], где решение подобных неравенств рассматривалось, было показано, что для разрешимости (7) необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\lambda_j\le\lambda^*=2\frac{\dot{q}}{q},\ t\ge t_0,\ j\in\overline{1,\kappa}, \tag{8}$$

где $\lambda_j,\ j\in\overline{1,\kappa}$, собственные значения матрицы $R=G^{-1}\left(F+F^T\right)$, являющиеся вещественными. В результате приходим к следующему результату:
для разрешимости неравенства ( ) в классе квадратичных ограничений необходимо и достаточно, чтобы положительно-определенная матрица M обеспечивала выполнение условия (8). Для проверки выполнения условия (8) согласно [] можно воспользоваться эквивалентными ему неравенствами:

$$g^{(k)}\left[\lambda^\bullet(t)\right]\ge 0,\ k\in\overline{0,\kappa-1}, \tag{9}$$

где $g^{(k)}(\lambda)$ - к-я производная полинома

$$g(\lambda)=\frac{\overline{g}(\lambda)}{g_\mu},\ \overline{g}(\lambda)=\det(\lambda G-2F),$$

g_κ - коэффициент при старшей степени λ^κ полинома $g(\lambda)$.

Пусть для линейной системы (а) рассматриваются линейные ограничения

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_i(x,t)=(l_i,x)-q_i(t),\\ \qquad i\in\overline{1,\chi},\end{array}\right\},$$

$l_i,\quad i\in\overline{1,n}$ - nx1 векторы; $q_i(t),\quad i\in\overline{1,n}$ - скалярные непрерывно-дифференцируемые функции.

Причем $Q(t)=\left\{x\in R^n:\Psi_i(x,t)\le 0,\ i\in\overline{1,\chi}\right\}$ - замкнутое ограниченное множество.

Тогда $\nabla_X\Psi_i=l_i$, $\partial\Psi/\partial t=-\dot{q}_i$, $i\in\overline{1,\chi}$ и неравенство принимает вид.

$$(Ax,l_i)-\dot{q}_i>0 \tag{10}$$

на участке границы $\Gamma Q_i(t)\cap\Gamma Q(t)$

$$(l_i,x)=q_i,\ i\in\overline{1,\chi} \tag{11}$$

Если на участке $\Gamma Q_i(t)\cap\Gamma Q(t)$, являющемся линейной гранью многогранника Q(t), линейное неравенство (10) разрешимо, то в силу линейности оно должно быть разрешимо, хотя бы в одной вершине $x=N_i^*$ данного многогранника, принадлежащей $\Gamma Q_i(t)\cap\Gamma Q(t)$, или принимать в ней максимально возможное значение, т.е.

$$\max_{x\in\Gamma Q_i\cap\Gamma Q}\left[(Ax,l_i)-\dot{q}_i\right]=\max_{N_i\in\Gamma Q_i\cap\Gamma Q}\left[(Ax,l_i)-\dot{q}_i\right]=\left(A\cdot N_i^*,l_i\right)-\dot{q}_i>0 \tag{12}$$

Если $\nabla_X\Psi_i=l_i\in H$, то можно записать

$$l_i=Pz^i,\ z^i\in R^\kappa \tag{13}$$

Тогда при невыполнении условий теоремы 3 получим следующее неравенство

$$\left(P^TAN_i^*,z^i\right)-\dot{q}_i>0 \tag{14}$$

В результате приходим к справедливости результата: для разрешимости неравенства в классе линейных ограничений необходимо и достаточно, чтобы либо

$$l_i \notin H \quad \forall i \in \overline{1,\chi} \tag{15}$$

либо, если $l_i \in H$, то

$$\left(P^T A N_i, z^i\right) - \dot{q}_i \le 0 \quad \forall N_i \in \Gamma Q_i \cap \Gamma Q \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (15), (16) достаточно просто проверить.

В более общем случае, когда система имеет вид $\dot{x} = A(x) + B \cdot u$ - некоторая нелинейная nx1 вектор-функция вместо неравенства (10) получим

$$\left(A(x), l_i\right) - \dot{q}_i > 0$$

Тогда для обеспечения разрешимости неравенства достаточно выполнения соотношений (15). Заметим, что соотношения (15) проще обеспечивать, если фазовый многогранник Q имеет минимальной число граней, т.е. когда q является пирамидой с (n+1)-й гранями и (n+1)-й вершинами в пространстве R^n.

Рассмотрим обобщение случая квадратичных фазовых ограничений. Пусть для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dv \tag{17}$$

заданны ограничения

$$x(t) \in Q(t) = \left\{x \in R^n : \Psi(x,t) = \left(x - x^*, M\left(x - x^*\right)\right) - q \ge 0\right\} \tag{18}$$

где $q = q(t);\ x^* = x^*(t)$ - некоторая непрерывно-дифференцируемая вектор-функция.

Используя замену переменных

$$x = \tilde{x} + x^* \tag{19}$$

получим

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + \eta,$$

$$\text{где } \eta = -\dot{x}^* + Ax^* + Dv \tag{20}$$

Причем

$$\Psi(\tilde{x}, t) = (\tilde{x}, M\tilde{x}) - q(t) \le 0 \tag{21}$$

Для неравенства находим

$$f_1(\bullet) = A\tilde{x} + \eta, \ \ \nabla_{\tilde{x}}\Psi = 2M\tilde{x}, \ \ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\dot{q}$$

В результате приходим к неравенству

$$\left(2M\tilde{x}, A\tilde{x} + \eta\right) - \dot{q} > 0 \tag{22}$$

рассматриваемому на границе

$$(\tilde{x}, M\tilde{x}) = q \tag{23}$$

Используя, аналогично (3), (4) соотношение

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} M^{-1} P z \tag{24}$$

Полученное при условии $\nabla_{\tilde{x}}\Psi \in H$, определяем также как и (7), условие разрешимости неравенства в виде

$$\left.\begin{aligned} &\max_Z \left[\frac{1}{2}\left(\tilde{F}z, z\right) + (\alpha, z) - \dot{q}\right] \le 0 \\ &at \ \ \frac{1}{4}\left(\tilde{R}z, z\right) = q, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $\tilde{F} = P^T A M^{-1} P; \tilde{R} = P^T M^{-1} P > 0; \alpha = P^T \eta$.

Используя метод множителей Лагранжа, задачу максимизации (25) преобразуем к следующему выражению:

$$\left.\begin{aligned} &\max_\rho \left[-\left(\Phi^{-1}(\rho)\alpha, \alpha\right) - \frac{1}{4}\rho \cdot q - \dot{q}\right] \le 0 \\ &at \ \ \left(\tilde{R}\Phi^{-1}(\rho)\alpha, \Phi^{-1}(\rho)\alpha\right) = q \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

или более удобному виду:

$$\left.\begin{aligned} &\max_\rho \left[\left(\overline{\alpha}, N\overline{\alpha}\right) - s\right] \le 0 \\ &at \ \ \left(\overline{\alpha}, \tilde{R}\overline{\alpha}\right) = q, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где $\overline{\alpha} = \Phi^{-1}(\rho)\alpha;\ \Phi(\rho) = \widetilde{F} + \widetilde{F}^T + \rho\widetilde{R};\ N = -\Phi(\rho);\ s = \frac{1}{4}\rho q + \dot{q}$

Согласно (26), (27) каждому заданному значению вектора α^0 соответствует вполне определенное множество $L(\alpha^0)$ значений скалярной величины ρ, на котором должно выполняться рассматриваемое неравенство. В то же время произвольному $\hat{\rho} \in L(\alpha^0)$ в силу (26), (27) будет соответствовать такое ограниченное множество $\theta(\hat{\rho})$ значений вектора α, что $\alpha^0 \in \theta(\hat{\rho})$. Очевидно, в этом случае справедливо соотношение

$$\left[-\left(\Phi^{-1}(\hat{\rho})\alpha^0, \alpha^0\right) - \frac{1}{4}\hat{\rho}\cdot q - \dot{q}\right] \leq \max_{\alpha\in\theta(\hat{\rho})}\left[-\left(\Phi^{-1}(\hat{\rho})\alpha, \alpha\right) - \frac{1}{4}\hat{\rho}\cdot q - \dot{q}\right]$$

которое становиться точным равенством при $\hat{\rho} = \rho^0 \in L(\alpha^0)$, соответствующему решению задачи максимизации (26). Поэтому, если вместо задачи (27) при фиксированном α рассматривать задачу максимизации при фиксированном ρ:

$$\left.\begin{aligned} &\max_{\overline{\alpha}}\left[\left(\overline{\alpha}, N\overline{\alpha}\right) - s\right] \leq 0 \\ &at\ \left(\overline{\alpha}, \widetilde{R}\,\overline{\alpha}\right) = q, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

имеющую то же решение α^0, ρ^0, что и (27), то получим эквивалентные условия разрешимости. С учетом этого перейдем к анализу разрешимости задачи (28) , вместо используемой (27).

Для разрешимости (28) необходимо и достаточно, чтобы собственные значения λ_i, $i \in \overline{1,\kappa}$, матрицы

$$\widetilde{R}^{-1}\left(N + N^T\right) = -2\widetilde{R}^{-1}\left(\widetilde{F} + \widetilde{F}^T\right) - 2\rho E = \Sigma - 2\rho E$$

удовлетворяли неравенству

$$\max_{i\in\overline{1,\kappa}} \lambda_i = \lambda_i^* \leq 2\frac{s}{q} \tag{29}$$

Поскольку

$$\det\left[\lambda E - (\Sigma - 2\rho E)\right] = \det\left[(\lambda + 2\rho)E - \Sigma\right]$$

то собственные значения матрицы Σ имеет вид

$$\gamma_i = \lambda_i + 2\rho,\ i \in \overline{1,\kappa} \tag{30}$$

Отсюда, с учетом (29) и выражения для S, получим

$$\gamma^* \leq 2{,}5\rho + 2\frac{\dot{q}}{q} \tag{31}$$

где $\gamma^* = \max_{i\in\overline{1,\kappa}} \gamma_i$

Известно, что решение задачи (28) достигается на собственном векторе $\overline{\alpha}^*$ матрицы $(\Sigma - 2\rho E)$, т.е.

$$(\Sigma - 2\rho E)\overline{\alpha}^* = \lambda^*\overline{\alpha}^* = \left(\gamma^* - 2\rho\right)\overline{\alpha}^*$$

откуда следует $\Sigma \cdot \overline{\alpha}^* = \gamma^* \cdot \overline{\alpha}^*$ (32)

Поскольку $\overline{\alpha}^* = \Phi^{-1}P^T\eta^*$ и справедливо выражение $\Phi = \frac{1}{2}\widetilde{R}(2\rho E - \Sigma)$,

То получим

$$P^T\eta^* = \frac{1}{2}\left(2\rho - \gamma^*\right)\cdot P^T\left(M^{-1}P\overline{\alpha}^*\right) \tag{33}$$

Данное уравнение соответствует условию, которому должен удовлетворять вектор η, обеспечивающий решение задачи максимизации (28). На основу (33) нетрудно получить выражение для указанного вектора η^*.

Соответственно, решение (33) будет следующим:

$$\eta^* = \mu_1 M^{-1}P\overline{\alpha}^* + \varphi \tag{34}$$

где $\mu_1 = \frac{1}{2}\left(2\rho - \gamma^*\right)$; φ - произвольный элемент из пространства. $KerP^T$, т.е. $\varphi \in KerP^T$.

Отсюда находим $\rho = \mu_1 + \frac{1}{2}\gamma^*$,

И в результате условие разрешимости (31) принимает вид

$$\gamma^* \geq -2\left(5\mu_1 + 4\frac{\dot{q}}{q}\right) \tag{35}$$

Согласно (32) $\overline{\alpha}^*$ - собственный вектор матрицы Σ является заданным в пространстве R^{κ}. Вектор η вида (20) задан в R^n, и потому можно определить его проекцию на nx1 вектор $\alpha^* = M^{-1}P\overline{\alpha}^*$ (т.е. конкретное значение величины μ_1).

Нетрудно показать, что для произвольного вектора η величина μ_1 определяется в соответствии с зависимостью

$$\mu_1 = \frac{\left(\hat{\eta}, \hat{\alpha}^*\right)}{\left\|\hat{\alpha}^*\right\|^2} \tag{36}$$

где $\overline{\eta} + \hat{\eta} = \eta$; $\overline{a}^* + \hat{\alpha}^* = a^*$; $\overline{\eta}, \overline{a}^* \in \overline{H}$; $\hat{\eta}, \hat{\alpha}^* \in H$; $\overline{H} \oplus H = R^n$ ($\oplus$ - знак прямой суммы, т.е. $\overline{H} \perp H$, и как отмечалось выше, $H = KerB^T$, а тогда $\overline{H} = KerP^T$).

Таким образом, если $\eta = \eta^*$, то требуемое условие разрешимости принимает вид

$$\gamma^* \geq -2\left(5 \cdot \frac{\left(\hat{\eta}^*, \hat{\alpha}^*\right)}{\left\|\hat{\alpha}^*\right\|^2} + 4\frac{\dot{q}}{q}\right) \tag{37}$$

Рассмотрим использование данного неравенства при выборе произвольного вектора η. В этом случае справедливо представление

$$\eta = \hat{\eta} + \overline{\eta}$$

где

$$\hat{\eta} = \mu_1 \cdot \hat{\alpha}^* + \hat{b} = \frac{\left(\hat{\eta}, \hat{\alpha}^*\right)}{\left\|\hat{\alpha}^*\right\|^2}\hat{\alpha}^* + + \hat{b}, \tag{38}$$

Определяем вектор

$$\overline{\alpha}\left(\eta\right) = \Phi^{-1}\left(\rho\right) \cdot P^T\eta = \Phi^{-1}\left(\rho\right)P^T\hat{\eta}$$

где $$\rho = \mu_1 + \frac{1}{2}\gamma^* = \frac{\left(\hat{\eta}, \hat{\alpha}^*\right)}{\left\|\hat{\alpha}^*\right\|^2} + \frac{1}{2}\gamma^* \tag{39}$$

Тогда, если при выбранном η выполняется ограничения (18), то с учетом (28) получим, что вектор $\alpha\left(\eta\right)$ должен удовлетворять условию:

$$\left(\overline{\alpha}\left(\eta\right), \tilde{R}\overline{\alpha}\left(\eta\right)\right) \leq q \tag{40}$$

Если же условие (40) не выполняется, то это означает, что рассматриваемый вектор $\alpha\left(\mu\right)$ выходит за пределы эллипсоида (40), и, следовательно для него неравенство (28) не обеспечивается. Таким образом, для того, чтобы система (17) удовлетворяла ограничениям (18) на всем множестве возмущений V, достаточно выполнения $\forall \upsilon \in V$ неравенств (40) и (37).

Рассмотрены некоторые реализации законов управления, формируемых на основе прямого метода синтеза. Приведенные реализации получены с помощью вычислительной процедуры в реальном режиме времени. Показано, что в зависимости от соотношения скоростей протекания реальных процессов в системе управления и численных процессов в используемой процедуре, возможны различные режимы движения.

Список используемой литературы

1. Елкин В.И. «Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход». – М:Наука, 1997, 317с.

2. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. 1981. “Practical Optimization”, - *Academic Press Inc*. (London).

3. Isidori A. 1999. “Nonlinear Control Systems”. 3rd edition. Berlin : Springer – Verlag, 1995. Vol. 2.

4. Колесников А.А. «Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления», - М: Энергоатомиздат, 1987.

5. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. 2000. “Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamical Systems”, - St.-Petersburg: *Nauka*, 549 P.

6. Pilishkin V.N. 1998a. “Robust Management Algorithms for Intelligent System”, - BMSTU News, *Priborostroenie*, 1, P. 23-34.

7. Pilishkin V.N., Pupkov K.A. 1999. “Robust Control System Design using Phase – Constraints Variation Approach”, - Proceedings of the European Control Conference. Karslruhe, Germany, Session BP-13, No F614, P. 1-5.

8. Pilishkin V.N. 1998b. “Construction of Rough Regulators on Restrictions in Space Condition”, - Proceedings the 3rd Scientific-Technical Conference with International Participation Process Control ’98, volume 1, Konty and Desnou, Czech Republic, P. 323-326.

9. Pilishkin V.N., Pupkov K.A. 1997. “Development of Intelligent System Dynamic Model”, - 2nd IFAC Workshop on “New trends in design of control systems”, Smolenice, Slovac Republic, P. 383-386.

10. Pilishkin V.N. 2000. “Synthesis of Flight Control in Real Time on Specified Efficiency”, - 9th IFAC Symposium Control in Transportation Systems, Braunschweig, Germany.

11. Pontryagin L.S., Boltnyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishenko E.F. 1969. “Mathematical Theory of Optimal Processes”, - Moscow: *Nauka*, 384 P.

12. Sepulchre R., Jaukovic M., Kokotovic P.V. 1996. “Constructive Nonlinear Control’. New York: Springer – Verlag.