

Математическое моделирование задачи построения множеств достижимости управляемых систем

Мансурова М.Е.

Пусть в некоторой ограниченной области \overline{D} пространства E^n задана система следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi &= u, & \text{в } D \times D_t, \\ a\varphi &= g, & \text{на } \partial D \times D_t, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi \in F, u \in U, F, U$ – линейные нормированные пространства функций, A, a – линейные операторы, функция u – управление, на которое наложено ограничение

$$\{\varphi, u\} \in Y, \quad (2)$$

где Y – выпуклое множество пространства $F \times U$, задано начальное условие:

$$\varphi = \varphi^0 \quad \text{в } D \quad \text{при } t = 0 \quad (3)$$

Пусть $A \geq 0$ и не зависит от времени. Ставится задача определить множество достижимости.

Определение. Множеством достижимости $\Gamma(T)$ системы (1)–(4) в момент времени T называется совокупность всех функций ψ с областью определения в \overline{D} , для которых найдется по крайней мере одно решение $\varphi \in F$ системы (1)–(4) такое, что $\psi = \varphi|_{t=T}$.

Проводим аппроксимацию (1)–(4) по пространственным переменным, затем по времени по схеме Кранка–Николсона второго порядка. К полученной системе применим метод построения множества достижимости, разработанный автором [1], который сокращает количество итераций с N прямого метода до $m = \log_2 N$. В результате аппроксимаций получим разностный аналог задачи (1)–(4). Обозначим $\Gamma^{h\tau}(T)$ – множество достижимости для разностной системы. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть для системы (1)–(4) множество Y ограничено, операторы A, a – линейны, разностная схема аппроксимирует систему (1)–(4) с порядком $O(h + \tau^2)$, задачи построения множеств $\Gamma(T), \Gamma^{h\tau}(T)$ устойчивы, тогда множество достижимости $\Gamma^{h\tau}(T)$ аппроксимирует $\Gamma(T)$ т.е.

$$\rho(\Gamma^{h\tau}(T), \Gamma(T)) = O(h + \tau^2).$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы Лакса [2].

Литература .

1. Мансурова М.Е., Мухамедиев Б.М. Численный метод с удвоением шага построения множеств достижимости для автономных управляемых систем. со смешанными ограничениями. Поиск, 2001, 2.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980.