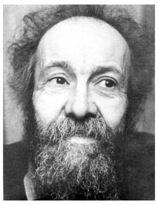

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ,
ПОСВЯЩЕННОЙ 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
АЛЕКСЕЯ АНДРЕЕВИЧА ЛЯПУНОВА
Новосибирск, 8-12 октября 2001 г.

Математические олимпиады школьников: продолжение традиции

Кукин Г.П. Штерн А.С.
Омский Государственный Университет

Аннотация

Математические олимпиады школьников живут в России без малого 70 лет. А.А.Ляпунов был инициатором проведения Всесибирских математических олимпиад. В нашем докладе мы рассказываем о продолжении этой традиции на примере Омских городских олимпиад. Доклад содержит тезисы критиков олимпиад и наш ответ на эту критику. Двадцать две лучшие задачи Омских городских олимпиад последних лет завершают (и украшают) доклад.

The mathematical competitions of the schoolchildren live in Russia almost 70 years. A.A.Liapunov was the initiator of realization of the Siberian mathematical competitions. In our report we tell about continuation of this tradition on an example Omsk Olympiads. The report contains the theses of critics of Olympiads and ours the answer to this criticism. Twenty two best tasks of last years Omsk Olympiads complete (and decorate) the report.

Алексей Андреевич Ляпунов был инициатором проведения математических олимпиад школьников и председателем оргкомитета первых Сибирских математических олимпиад. Он рассматривал математические олимпиады как способ пропаганды математических знаний, способ привлечения в науку талантливой молодежи. Наш доклад посвящен олимпиадам в системе дополнительного математического образования школьников. Мы покажем на примере Омских городских математических олимпиад, как развивается традиция, заложенная А.А.Ляпуновым.

Система проведения математических олимпиад в нашей стране существует уже более шестидесяти лет. Именно сейчас, как никогда ранее, в среде преподавателей математики и математиков-исследователей популярны мнения о неэффективности и даже вредности этой системы. В пользу этой точки зрения существует довольно солидная аргументация, с которой авторы имели возможность очень хорошо ознакомиться в ходе общения со своими коллегами по работе на математическом факультете Омского Государственного Университета. Среди этих аргументов наиболее основательными нам представляются следующие.

1. Олимпиады не способствуют выявлению математически одарённых школьников, так как в настоящий момент для хорошего выступления даже на олимпиаде городского уровня

требуется очень солидная специальная подготовка. Школьник, такой подготовкой не обладающий, не имеет шансов на успех в состязании с конкурентами, "надрессированными"на решении олимпиадных задач.

2. Участие в олимпиадах способствует выработке искажённого представления о математике, которая воспринимается "олимпиадными бойцами"как совокупность головоломок, а не как наука с системой понятий, требующая планомерной и не всегда увлекательной работы по её изучению. В качестве аргумента, как правило, приводятся случаи, когда школьники, имеющие высокие достижения на олимпиадах Всероссийского и международного уровней, крайне неуспешно обучаются на математических факультетах университетов. Скажем честно, подобрать такие примеры несложно.

3. Поскольку участвующий в олимпиаде школьник не владеет, как правило, серьёзными математическими понятиями, он в состоянии придумать лишь такое сложное рассуждение, которое носит комбинаторный характер. Это не могут не учитывать авторы олимпиадных задач. В результате на олимпиадах высокого уровня комбинаторные задачи доминируют, а мышление "школьников-олимпиадников"приобретает ярко выраженный комбинаторный уклон. Естественно, что впоследствии это сужает их научные интересы.

Эти аргументы весьма убедительны, но, на наш взгляд, они не дают оснований для полного пересмотра роли математических олимпиад или, тем более, для постановки вопроса об их ликвидации в административном порядке. Современная математика имеет два полюса: полюс дискретности и полюс непрерывности. Однако в той математике, которую изучают в школе, преимущество отдается методам непрерывной математики. Вот почему комбинаторный уклон математических олимпиад является естественной реакцией на программу обучения математике в школе. Мы полагаем, что при правильной постановке системы проведения математических олимпиад задачи, которые естественно ставить пред олимпиадным движением, могут решаться достаточно успешно. Основной из таких задач, естественно, является поиск математически одарённых школьников, стимулирование их интереса к изучению математики и подготовка к обучению на математическом факультете.

В нашей стране существует немало научно-образовательных центров, эффективно работающих в этом направлении. Не преувеличивая значения собственной деятельности, мы полагаем, что в их число должен быть включен и Омский Государственный Университет. Нам хотелось бы рассказать о сложившейся в нашем городе системе работы с одарёнными школьниками, о её результатах и о том месте, которое в ней занимает подготовка и проведение математических олимпиад.

Существующая в нашей стране система математических олимпиад предполагает проведение для учеников 5-7 классов лишь районного звена. Однако в нашем городе силами сотрудников и студентов математического факультета университета проводятся городские математические олимпиады для учащихся этого возраста. Понятно, что для пятиклассников фактор подготовки не играет серьёзной роли по той простой причине, что в начальной школе детей к олимпиадам никто не готовит. Есть основания утверждать, что значительная часть школьников, имеющих математические способности, попадает таким путём в поле зрения специалистов. По итогам олимпиад комплектуются математические кружки. Материалы занятий группируются вокруг классических олимпиадных тем, но элементы некоторых математических теорий (например теории графов) удаётся изложить уже для этого возраста. По форме занятие представляет собой решение некоторого набора задач. При этом набор подбирается так, что представляет собой некоторую мини-теорию: рассуждения повторяются и модифицируются, последующие задачи используют предыдущие и т.д. Здесь школьник получает первый опыт погружения в математическую теорию и не так важно, является ли она осколком настоящей научной дисциплины или некоторой "псевдотеорией", представляющей интерес лишь в контексте занятий со школьниками.

Основная форма работы - решение задач, лекционный элемент сводится к минимуму. Естественно важной (хотя и не единственной) задачей на данном этапе является формирование представлений о математической строгости. Олимпиадные успехи на этом этапе приходят сами собой, в качестве побочного продукта описанной работы.

Уже начиная с восьмого класса характер работы меняется. Основной формой проведения занятия остаётся решение специальным образом подобранного набора задач, но меняется содержание таких наборов. Комплект задач может представлять собой разобранное на части доказательство не очень тривиальной теоремы. Всё большую роль играет в занятии диалог, направленный на то, чтобы школьник сам сформулировал ответ на поставленный вопрос, построил аналог некоторого утверждения в другой ситуации и т.д. Решая задачи, школьник наблюдает за происхождением математических понятий. В качестве иллюстрации хотелось бы кратко сказать о двух занятиях. Одно из них проводится в 8 классе и посвящено вопросам сходимости рядов. Решая задачи без единой подсказки преподавателя, школьник сам доказывает неограниченность частичных сумм гармонического ряда, ограниченность частичных сумм ряда, обратного ряду квадратов, и упражняется в применении открытых им рассуждений. Другая тема называется "От теоремы Хелли к компактности". В ходе этого занятия для учеников 10 (как правило) класса школьник, пытаясь перенести изученную им ранее теорему Хелли на случай бесконечного множества фигур, приходит к понятию компактности самостоятельно. Такое занятие можно трактовать как попытку промоделировать фрагмент истории математики. При этом совершенно не важно, что в реальности такого момента не было, и соответствующее понятие рождалось совсем не так. При разумной организации материала у школьника всё равно возникает довольно адекватное ощущение погружения в серьёзную математическую жизнь. Как совершенно естественное, приходит понимание того, что глубокое математическое понятие возникает, как правило, в ходе решения конкретной проблемы. Это серьёзный шаг на пути к формированию "математического вкуса", исключающего любовь к обобщению ради обобщения.

Самое удивительное заключается в том, что при этом преподавателю удаётся оставаться в кругу задач, взятых с разного рода олимпиад или близких к таковым. Оказывается, что, разбирая например со школьниками теорему Брауэра о неподвижной точке непрерывного отображения, удаётся найти довольно много задач, иллюстрирующих метод триангуляции, идею векторного поля на плоскости и многое другое. Это обстоятельство показывает, что слухи об окончательном разрыве между "олимпиадной"и "серьёзной"математикой следует признать сильно преувеличенными. "Комбинаторизацию"олимпиадной математики нельзя считать окончательно состоявшейся. И до сих пор на разных этапах Всероссийской математической олимпиады продолжают появляться задачи, прекрасно иллюстрирующие серьёзные математические идеи топологического, алгебраического или теоретико-множественного происхождения. Насколько же эффективна подобная методика в качестве подготовки к выступлению на олимпиадах высокого уровня? Это довольно сложный вопрос, на который, обобщая имеющийся опыт, можно ответить так. До десятого класса школьник продолжает весьма успешно выступать на Всероссийской олимпиаде, однако со временем ослабляется как специфический психологический настрой олимпиадного бойца, так и сам интерес к выступлению на олимпиадах. Но не падает интерес к математике как таковой. После поступления в университет бывший школьник, уже ознакомленный со многими ключевыми идеями начальных университетских курсов, использует полученные возможности для интенсивного движения вперёд. Не нужно и говорить, что подавляющее большинство ребят, прошедших через систему наших математических кружков, не рассматривают для себя никаких возможностей кроме поступления на факультеты математического профиля. Конечно в определённый момент на выбор молодым человеком или девушкой будущей профессиональной деятельности начинают влиять "социальные"факторы, но это уже тема для совершенно другого разговора. Студент, прошедший школьником через систему кружковой работы, даже в Московском университете продолжает выделяться по уровню понимания ключевых идей и степени интереса к изучаемому предмету. А это и показывает эффективность системы работы со способными школьниками, в которой математические олимпиады играют весьма заметную, хотя и не главную роль.

1 Заключение

В Омске, наряду с традиционными олимпиадами, с 1978 по 1999 год проводились Командные олимпиады школ города, а с 1992 года сформировалась система Городских математических олимпиад для школьников 5-11 классов. В 1998 году Управление образования г.Омска издало сборник задач городских математических олимпиад 1992-1997 годов.

2 Избранные задачи олимпиад 1998-2001 годов

1. В Стране Дураков - денежная реформа: меняют десять старых сольдо на один новый. Желая получить прибыль, кот Базилио берет плату 1 старый сольдо за обмен денег: если дать ему 1 новый сольдо, то он дает 9 старых; если же хочешь получить 1 новый сольдо, то надо дать ему 11 старых. Потом Базилио указал в декларации для налоговой инспекции, что в начале дня у него был один новый сольдо (а старых не было), а в конце дня стало 1997 новых сольдо (старых по-прежнему нет). Налоговый инспектор Буратино сразу сказал, что кот неправильно указал свой доход. Прав ли он? Тот же вопрос, если в конце дня у кота стало 1998 новых сольдо.

(1998 год, 5 класс, Г.Кукин)

2. Взяли целые числа от одного до ста включительно. Некоторые написали синими чернилами, а остальные красными. Если сложить два разных числа одного цвета, и получится число, не превосходящее 100, то оно того же цвета, что и слагаемые. Сколько синих чисел может быть среди написанных?

(1999 год, 6-7 классы, А.Штерн)

3. Тридцать друзей собрались, чтобы встретить Новый год за круглым столом. Среди друзей 26 Олегов. В полночь каждый из друзей загадал желание, но сбылись желания только у тех, кто сидит между двух Олегов. Могло ли так быть, что сбылось ровно 20 желаний? А если Олегов 25?

(1998 год, 7 класс, А.Фадин)

4. Имеются две деревянные палочки. Разрешается прикладывать палочки друг к другу и делать засечки на любой из них. Как узнать, что больше: длина первой палочки или 2/3 длины второй палочки?

(1999 год, 7 класс, О.Червяков)

5. Буратино купил в лавке бумажную курточку, расплатившись без сдачи монетами в

13 и 8 сольдо. Если бы куртка стоила на 1 сольдо дороже, то расплатиться такими монетами без сдачи Буратино бы не смог. Чему равна наибольшая возможная цена курточки?

(1998 год, 8 класс, А.Штерн)

6. Карлсон, Робин-Бобин и Гаргантюа устроили соревнование по поеданию огромных тортов. Соревнование длится сто минут. В первую минуту Гаргантюа съедает $\frac{1}{101}$ часть своего торта, во вторую - $\frac{1}{102}$ часть и т.д. Робин-Бобин съедает в первую минуту $\frac{1}{201}$ часть своего торта, во вторую - $\frac{1}{202}$ часть и т.д. Наконец, Карлсон съедает в первую минуту $\frac{1}{301}$ часть своего торта, во вторую - $\frac{1}{302}$ часть и т.д. Гаргантюа уверен, что съеденное им ровно на 20 % больше съеденного двумя другими обжорами, вместе взятыми. Верно ли это, если известно, что все три торта одинаковые?

(1999 год, 8 класс, А.Штерн)

7. Натуральное число называется хорошим, если в его разложении на простые множители нет никаких чисел кроме 2, 3 и 5. Существует ли такое натуральное число n, что среди всех хороших чисел, не превосходящих n, содержится менее 10 процентов точных квадратов? (Единица считается хорошим числом)

(1998 год, 9-11 класс, А.Штерн)

8. По кругу расположены 1997 лампочек, некоторые из которых горят, а некоторые потушены. Каждые десять секунд состояние гирлянды меняется по следующему правилу: горящая лампочка тухнет, если среди четырех ближайших к ней (по две с каждой стороны) было больше двух потушенных. Потушенная лампочка загорается, если среди четырех ближайших к ней было больше двух горящих. Все остальные лампочки свое состояние не меняют. Докажите, что через некоторое время гирлянда перестанет "мигать".

(1998 год, 9 класс, С.Усов)

9. Петя и Вася играют в такую игру. На плоскости дан правильный n-угольник, все вершин которого выкрашены в белый цвет. Играющие по очереди окрашивают в чёрный цвет любую белую вершину, у которой обе соседние вершины - белые. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

(1999 год, 10 класс, Г.Кукин)

10. Можно ли распилить куб с ребром 6 на фигурки из черытех кубиков с ребром один, расположенных в виде буквы Г?

(1998 год, 11 класс, Д.Ланин)

11. В ряд стоят 50 стульев. Нужно убрать 20 из них, но при этом нельзя убирать два стула, стоящих рядом. Сколькими различными способами можно это сделать?

(1998 год, командная олимпиада школ города, В.Топчий)

12. На клетчатой бумаге выделено поле для игры, состоящее из $n^2 + (n-1)^2$ клеток - "квадрат", повернутый на 45° (см. картинку для n=4). С самого начала центральная клетка закрашена. Играют двое, Петя и Вася; Петя ходит первым. В свой ход каждый игрок может закрасить одну или несколько клеток поля, соседствующих с закрашенными до этого хода. Выигрывает тот, кто закончит окраску поля. Кто выиграет при правильной игре: Петя или Вася?

(1998 год, командная олимпиада школ города, И.Фирдман)

13. Буратино пишет натуральные числа, большие 2, разными чернилами: некоторые черные, некоторые красные, а остальные - синие. Все три цвета использованы. а) Он говорит, что если перемножить два числа разного цвета, то цвет произведения всегда отличается от цвета любого сомножителя. Возможно ли это? б) Он говорит, что ему удалось так раскрасить числа, что если перемножить два числа одного цвета, то произведение обязательно будет того же цвета, что и сомножители. Возможно ли это?

(2000 год, 6,7 класс, Г.Кукин)

14. Множество M содержит 2000 элементов. Выписан некоторый список его подмножеств. Известно, что любые два подмножества из списка имеют хотя бы один общий элемент, а никакие три подмножества не имеют общего элемента. Найти наибольшее возможное число подмножеств в этом списке.

(2000 год, 9 класс, А.Штерн)

15. Играют двое, Петя и Вася, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя. Они взяли треугольник, разбитый на 9 белых равных треугольных клеток. В свой ход играющий окрашивает черной краской любую белую клетку. Проигрывает тот, после хода которого впервые появится какой-либо полностью окрашенный треугольник из 4 клеток. Кто выиграет при правильной игре, Петя или Вася?

(2000 год, 8 класс, Г.Кукин)

16. На плоскости даны два произвольных выпуклых многоугольника, один вне другого. Это два здания, изображенных на плане. Докажите, что можно так разместить всего два точечных источника света, чтобы полностью осветить снаружи все стены этих зданий. Точечный источник света освещает всю плоскость, если на ней нет стен. (Аналогичное утверждение справедливо и для двух выпуклых многогранников: их можно осветить всего двумя точечными источниками света. Факт удивительный, поскольку для освещения сферы снаружи необходимо как минимум 4 точечных источника.)

(2000 год, 10 класс, Г.Кукин)

17. Комната имеет форму треугольной пирамиды (не обязательно правильной). В вершинах этой пирамиды находятся точечные источники света. Каждый источник освещает всю комнату, если она пустая. Внутри пирамиды расположен выпуклый многогранник, не имеющий общих точек с гранями пирамиды. Доказать, что поверхность многогранника полностью освещена снаружи.

(2000 год, 11 класс, Г.Кукин)

18. В волейбольном турнире в один круг участвовало 1000 команд. Барон Мюнхгаузен не знает результатов турнира, но утверждает, что он всегда может выбрать 21 команду и выписать их в список так, что будет выполняться следующее условие: каждая команда в списке выиграла у всех следующих за ней. Прав ли барон?

(2000 год, 11 класс, А.Штерн)

19. Для действительных чисел a, b, c выполнены следующие неравенства: $(a-b+c)(4a-2b+c)<0$, c $(a-b+c)<0$. Доказать, что для этих чисел выполнено неравенство $(a+b+c)(4a+2b+c)>0$.

(2001 год, 9 класс, А.Штерн)

20. За круглым столом собрались рыцари и лжецы. Рыцари говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Каждый сказал: "Когда я смотрю на остальных, среди любых троих, сидящих подряд, я вижу лжецов больше, чем рыцарей". Сколько было рыцарей?

(2001 год, 10 класс, Г.Кукин)

21. Барон Мюнхгаузен рассказывает, что побывал в стране, где 2001 город, причем некоторые соединены дорогами, и для любой пары городов можно найти более тысячи городов, соединенных ровно с одним (каким-либо) городом из этой пары. Может ли такое быть?

(2001 год, 10 класс, А.Штерн)

22. Взяли квадрат клетчатой бумаги $n \times n$ клеток. Из него свернули трубку, а потом ее концы склеили. На рисунке показано, какая точка с какой точкой склеена (A с A, B с B и т.д.). Полученную поверхность математики называют тором. Все точки внутри клетки

окрашивают одинаково, причем любые две клетки, соседствующие по стороне, окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов требуется для такой раскраски?

(2001 год, 11 класс, С.Усов., Е.Кукина)