

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЗМУЩЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНЫ В ДВУХСЛОЙНОМ ВОДОЕМЕ С ПОЛОГИМ ДНОМ

А. А. ЛИТВИНЕНКО

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: toljanich@yahoo.com

Г. А. ХАБАХПАШЕВ

Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

This paper deals with the numerical realization of a solution on the differential model offered before for two-dimensional nonlinear wave processes in the ocean of an arbitrary depth. The calculations on evolution of the pycnocline solitary perturbations (both the wave trough type and oscillating) are performed at a change of the pool depth. It is shown the formation of wave trains or disturbances of the triangular shape.

Моделированию волн на воде посвящено очень много работ (см., например, литературу в монографиях [1–7]). В большинстве из них делается вывод о необходимости учитывать одновременно дисперсию и нелинейность гравитационных возмущений в жидкости для адекватного описания исследуемых явлений. В последнее время все большее внимание привлекают нелинейно-дисперсионные модели мелкой или глубокой воды, в частности, те их варианты, которые учитывают изменение глубины жидкости, т. е. топографию.

Вопрос о внутренних волнах — один из наиболее существенных для понимания динамики океана в целом [8]. Несмотря на интенсивность изучения, эта проблема решена далеко не полностью. Во многих работах выведены и исследованы эволюционные уравнения типа уравнения Кортевега–де Вриза, Буссинеска, Бенджамина–Оно, Джозефа или нелинейного уравнения Шредингера (также см. [1–7]). Однако диапазон частот, в котором они могут быть использованы недостаточно широк. Поэтому моделирование волновых процессов на свободной поверхности и границе раздела двухслойной жидкости, когда характерные длины возмущений могут быть как малы, так и велики по сравнению с глубиной жидкости, является одной из актуальных задач океанологии.

Для правильного описания волн в естественных водоемах необходимо, конечно же, задавать реальную зависимость плотности от глубины. Наиболее простой моделью, учитывающей стратификацию, можно считать профиль в виде одной ступеньки. Хотя в двухслойной жидкости возможны только две моды колебаний (баротропная и первая бороклинная или так называемые быстрая и медленная), это ограничение не так серьезно. Результаты наблюдений показывают (например, [8]), что во многих реальных ситуациях большая часть энергии приходится именно на первые две моды колебаний.

В статье [9] получено одно дифференциальное уравнение для двумерных слабонелинейных квазистационарных внутренних волн медленной моды в водоемах с очень тонким пикноклином и пологим дном. Оно пригодно при произвольных соотношениях глубин слоев и характерного продольного размера возмущения.

Данная работа посвящена численной реализации эволюционного уравнения, предложенного в статье [9]. Тот факт, что используется одно уравнение, а не система уравнений, имеет свои преимущества: уменьшение количества переменных приводит к увеличению эффективности расчета. Кроме того, в рассматриваемом случае легче задать начальные данные, так как обычно известна лишь форма возмущения пикноклина, а информация о горизонтальной составляющей скорости воды отсутствует.

1. Постановка задачи и исходное уравнение

Допустим, что двухслойная жидкость является идеальной несжимаемой и несмешивающейся, стационарная составляющая скорости воды отсутствует, возникающие осциллирующие течения считаем безвихревыми (потенциальными), а волны — малыми, но конечной амплитуды (т. е. $\zeta k \operatorname{cth}(kh) \sim \varepsilon$, здесь ζ —

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (инициативный проект 00–05–65441–а и молодежный грант 01–05–06048–мас), СГП ВНИИ (грант 00–15–96810) и СО РАН (интеграционная программа ИГ–01–00).

© А. А. Литвиненко, Г. А. Хабахпашев, 2001.

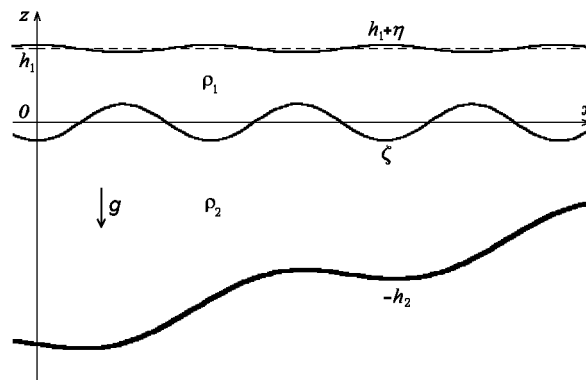


Рис. 1. Схема волнового процесса в двухслойном водоеме с пологим дном.

возмущение границы раздела, k — волновое число, h — глубина слоя, ε — малый параметр). Кроме того, предполагаем, что глубина пикноклина постоянна, а неподвижное твердое дно является слабонаклонным ($\nabla h_2 \operatorname{cth}(kh_2) \sim \varepsilon$, где оператор градиента ∇ определен в горизонтальной плоскости). Следовательно, формулы для волн в водоеме постоянной глубины локально верны. Наконец, влиянием вращения Земли и капиллярных эффектов пренебрегаем.

Использование Паде-аппроксимации точного дисперсионного соотношения и приближения квазистационарности возмущения (в системе отсчета, движущейся вместе с волной, форма возмущения меняется медленно) позволило свести исходную систему уравнений неразрывности и движения в каждом из слоев к следующему эволюционному уравнению [9]:

$$\begin{aligned} \rho'_* \frac{h_1 h_2}{h} A_t \nabla \cdot \left[\left(g + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) \nabla \zeta \right] &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{4h_1 h_2}{\rho'_* g h} A_t \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} + \frac{h_*}{h} \mathbf{U} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \nabla h + \\ &+ \frac{h_*}{h} \left(\frac{\rho_*}{h_*^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{2} A_t \right) \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial t^2} - \frac{2h_1}{\rho'_* g h} \left(\frac{\rho_*}{h_*} - 1 \right) A_t \frac{\partial^4 \zeta^2}{\partial t^4} - \frac{14h_1 h_2}{\rho'_* g^2 h} A_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right)^2 \right] + \\ &+ \alpha \frac{4h_1^3 h_2}{h^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\nabla \zeta - \frac{4}{(\rho'_* g)^2} \mathbf{U} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3} \right) \cdot \nabla h, \quad A_t = 1 - \alpha \frac{4h_1 h_2}{\rho'_* g h} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\rho'_* = 1 - \rho_*$, $\rho_* = \rho_1/\rho_2$, ρ — плотность; индекс l равен единице для верхнего слоя и двойке для нижнего (см. схему волнового процесса на рис. 1); g — ускорение свободного падения; $h = h_1 + h_2$, $h_* = h_1/h_2$; t — время, а \mathbf{U} — характерная скорость распространения возмущения. Коэффициент α равен нулю для модели первого порядка точности [10] или $2/3$ для модели второго порядка точности [9].

В работе [10] показано, что уже модель первого порядка точности хорошо согласуется с известными результатами для коротких волн (в частности, волн Стокса). А для правильного описания умеренно длинных возмущений (как уединенных, так и периодических) необходимо в линейных членах применять модель второго порядка точности [9]. Поэтому ниже при численной реализации расчетов по эволюционному уравнению использован его промежуточный вариант, когда в членах первого порядка малости $\alpha = 2/3$, а в членах второго порядка малости (нелинейных и учитывающих градиент глубины водоема) $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \rho'_* g \frac{h_1 h_2}{h} A_t \nabla^2 \zeta + \rho'_* \frac{h_1 h_2}{h} \nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \nabla \zeta \right) &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{4h_1 h_2}{\rho'_* g h} A_t \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} + \frac{h_*}{h} \mathbf{U} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \nabla h + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{h_*}{h} \left(\frac{\rho_*}{h_*^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial t^2} - \frac{2h_1}{\rho'_* g h} \left(\frac{\rho_*}{h_*} - 1 \right) \frac{\partial^4 \zeta^2}{\partial t^4} - \frac{14h_1 h_2}{\rho'_* g^2 h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в направлении роста одной из горизонтальных координат (например, координаты x). Очевидно, что в этом случае глубина водоема h (напомним, что дно изменяется достаточно полого) может зависеть лишь от той же координаты x . Тогда уравнение (2) не зависит от второй горизонтальной координаты y :

$$c_0 \left[g A_t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c_1 A_t \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} + c_2 U \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} +$$

$$+ c_3 \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial t^2} - c_4 \frac{\partial^4 \zeta^2}{\partial t^4} - c_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right)^2 \right], \quad A_t = 1 - \alpha c_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что для линейных волн данное уравнение дает только нейтрально устойчивые решения.

Ниже рассмотрены задачи, для которых в качестве начального возмущения берутся плоские уединенные волны. Задание частных производных ζ по времени на первых шагах во всех точках бассейна осуществлялось с помощью сдвига возмущения в соответствии с характерным значением скорости распространения волны. На боковых границах бассейна ставятся условия отражения, т. е. производные ζ по нормальям к стенкам равны нулю.

2. Численная реализация расчетов по уравнению (3)

Для решения нелинейного дифференциального уравнения с частными производными построим следующую неявную разностную схему типа предиктор-корректор:

$$\begin{aligned} c_0 \left[(g + \Lambda_{tt} \zeta_i^n) \frac{\bar{\zeta}_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \alpha c_1 g \frac{\Lambda_{tt} \bar{\zeta}_{i+1}^n - 2\Lambda_{tt} \zeta_i^n + \Lambda_{tt} \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] = \Lambda_{tt} \zeta_i^n - \\ - c_1 \Lambda_{tttt} \zeta_i^n + \alpha c_1^2 \Lambda_{ttttt} \zeta_i^n + c_2 U_i^n \Lambda_t \zeta_i^n \Lambda_x h_i + c_3 \Lambda_{tt} (\zeta^2)_i^n - c_4 \Lambda_{tttt} (\zeta^2)_i^n - c_5 \Lambda_{tt} [(\Lambda_{tt} \zeta_i^n)^2] - \\ - c_0 \frac{\Lambda_{tt} \zeta_i^n - \Lambda_{tt} \zeta_{i-1}^n}{\Delta x} \frac{\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{— предиктор,} \\ c_0 \left[(g + \Lambda_{tt} \zeta_i^n) \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \alpha c_1 g \frac{\Lambda_{tt} \zeta_{i+1}^n - 2\Lambda_{tt} \zeta_i^n + \Lambda_{tt} \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] = \Lambda_{tt} \zeta_i^n - \\ - c_1 \Lambda_{tttt} \zeta_i^n + \alpha c_1^2 \Lambda_{ttttt} \zeta_i^n + c_2 U_i^n \Lambda_t \zeta_i^n \Lambda_x h_i + c_3 \Lambda_{tt} (\zeta^2)_i^n - c_4 \Lambda_{tttt} (\zeta^2)_i^n - c_5 \Lambda_{tt} [(\Lambda_{tt} \zeta_i^n)^2] - \\ - c_0 \Lambda_x (\Lambda_{tt} \zeta_i^n) \frac{\bar{\zeta}_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{— корректор.} \end{aligned}$$

Здесь Λ_{tt} , Λ_{tttt} и Λ_{ttttt} — операторы разностной аппроксимации вторых, четвертых и шестых производных по времени со вторым порядком на трехточечном, пятиточечном и семиточечном шаблонах, соответственно, а Λ_t и Λ_x — аппроксимации первых производных центральными разностями. В результате, эта неявная схема имеет второй порядок аппроксимации по обоим переменным. Видно, что расчет ведется на трех слоях по координате x : на левом и правом слоях — по трехточечному шаблону, а на среднем — по семиточечному шаблону.

Решение итоговой системы алгебраических уравнений, возникшей после разностной аппроксимации уравнения (3) по данной схеме, в проведенных расчетах выполнялось методом Зейделя. Скорость сходимости итерационного процесса высока, так как имеется строгое диагональное преобладание.

В проведенных расчетах значения искомой функции ζ в начальных и конечных по времени узлах брались равными ее значениям в ближайших внутренних узлах. В качестве краевого возмущения (на первом и втором слева слоях по координате) использовались не только солитонное решение укороченного уравнения (3), найденное в статье [9]:

$$\zeta = \zeta_a / \cosh^2[(x - Ut)/L], \quad U = \sqrt{\frac{\rho'_* g h_1 h_2}{h(1 - \zeta_a^*)}}, \quad \zeta_a^* = \frac{\zeta_a (h_*^2 - \rho_*)}{h_* h}, \quad L = L_0 = \frac{4h_1 h_2}{h} \sqrt{\frac{1 + 2\zeta_a^*}{3\zeta_a^* (1 - \zeta_a^*)}}, \quad (4)$$

но и другие уединенные решения (4) с $L = L_1 = L_0/4$ и $L = L_2 = 4L_0$ для длинных волн, а также уединенный волновой поезд для коротких возмущений:

$$\zeta = a \cos \omega t / \cosh[k a \omega (x/U_0 - t)/\sqrt{2}], \quad (5)$$

где a — амплитуда волны, ω — частота возмущения, k — волновое число, $U_0 = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость поезда.

Укороченный вариант построенной разностной схемы тестировался на аналитическом решении (4) с $L = L_0$. Результаты расчетов показали, что, как и следовало ожидать, такая волна распространялась с постоянной скоростью и неизменной формой. Решение сходится со вторым порядком по обоим переменным (и по времени, и по координате).

3. Результаты вычислительных экспериментов

С начала рассмотрим трансформацию уединенного волнового поезда с достаточно высоким значением основной (несущей) частоты. Невозмущенные глубины верхнего и нижнего слоев были выбраны равными 100 м и 300 м, а плотности воды в этих слоях — 1000 кг/м^3 и 1020 кг/м^3 , соответственно. На рис. 2 показаны мареограммы трех датчиков, расположенных на расстояниях $a)$ — $x = 10$ м, $б)$ — $x = 100$ м и $в)$ — $x = 300$ м от волнопродуктора, который создавал краевое возмущение (5) с амплитудой 4 м, частотой 0,05 Гц, волновым числом $0,025 \text{ м}^{-1}$ и групповой скоростью 1 м/с. Хорошо видно, что расчет уравнения (3) по предложенной разностной схеме с шагом по времени $\Delta t = 2,5$ с и шагом по координате

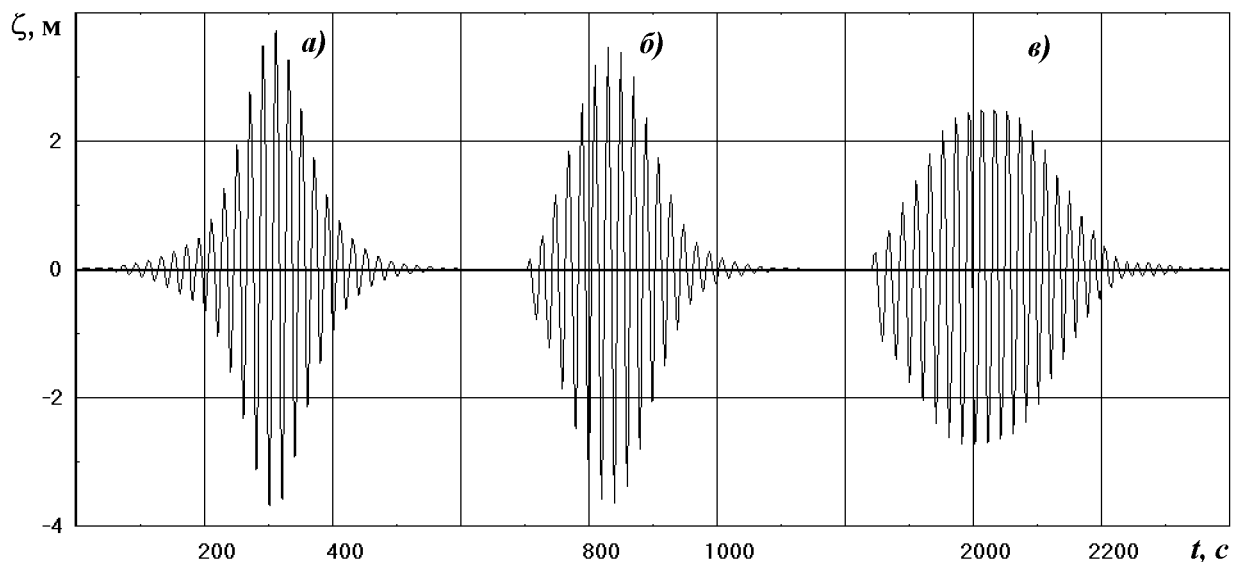


Рис. 2. Эволюция волнового поезда достаточно высокой несущей частоты.

$\Delta x = 0,2$ м действительно устойчив. Что касается эволюции коротких возмущений в водоеме с полого изменяющимся дном, то, конечно же, она неотличима от результатов вычислений в бассейне постоянной глубины. В связи с этим наибольший интерес представляет распространение длинных волн.

Но сперва проанализируем трансформацию уединенных возмущений в водоеме с горизонтальным дном. На рис. 3 продемонстрирована эволюция волны, задававшейся на левой границе аналитическим решением (4) с $L = L_0$. Глубины и плотности слоев те же, что и для волнового поезда; амплитуда возмущения $\zeta_a = 5$ м; датчики находились на расстояниях $a)$ — $x = 1$ км, $б)$ — $x = 20$ км и $в)$ — $x = 40$ км от левого края бассейна; шаг по времени $\Delta t = 15$ с, а шаг по координате $\Delta x = 10$ м. Наличие в полном уравнении (3) средне- и высокочастотных членов (укороченное уравнение для длинных волн получается из уравнения (3), если опустить второе слагаемое в квадратных скобках его левой части, а в правой положить $A_t = 1$ и $c_4 = c_5 = 0$ [9]) приводит к незначительному уменьшению амплитуды основного возмущения и появлению дисперсионного “хвоста”.

Увеличение глубины водоема на порядок ($h_2 = 3900$ м) качественно не меняет картину (см. рис. 4). Все остальные параметры системы те же, что и в предыдущем случае. Сравнение с мареограммами, изображенными на рис. 3, показывает, что наблюдается лишь очевидное слабое возрастание скорости распространения волны и небольшое усиление колебаний в хвосте основного возмущения.

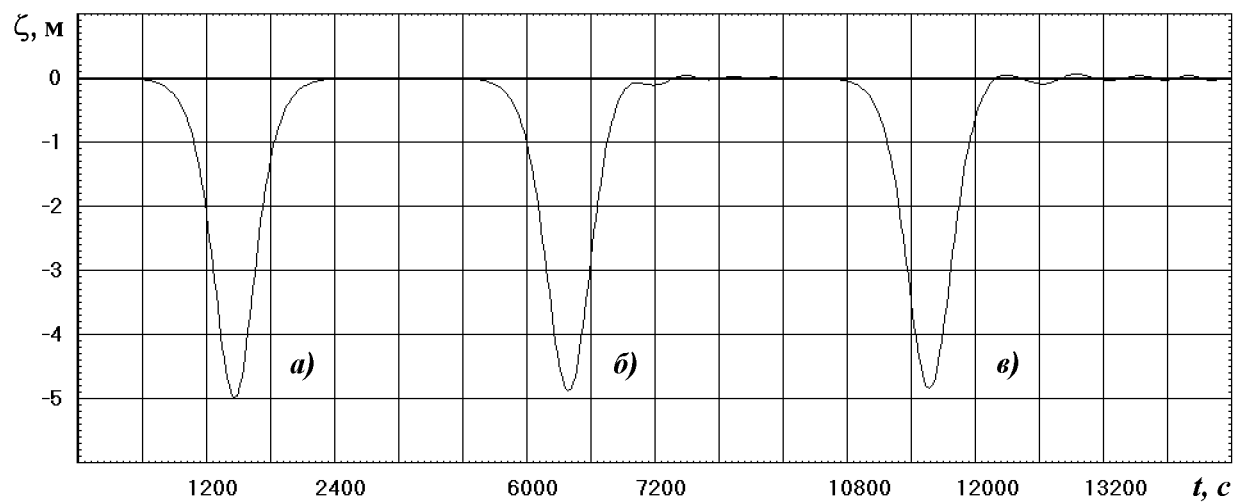


Рис. 3. Динамика длинного уединенного возмущения вдали от берега.

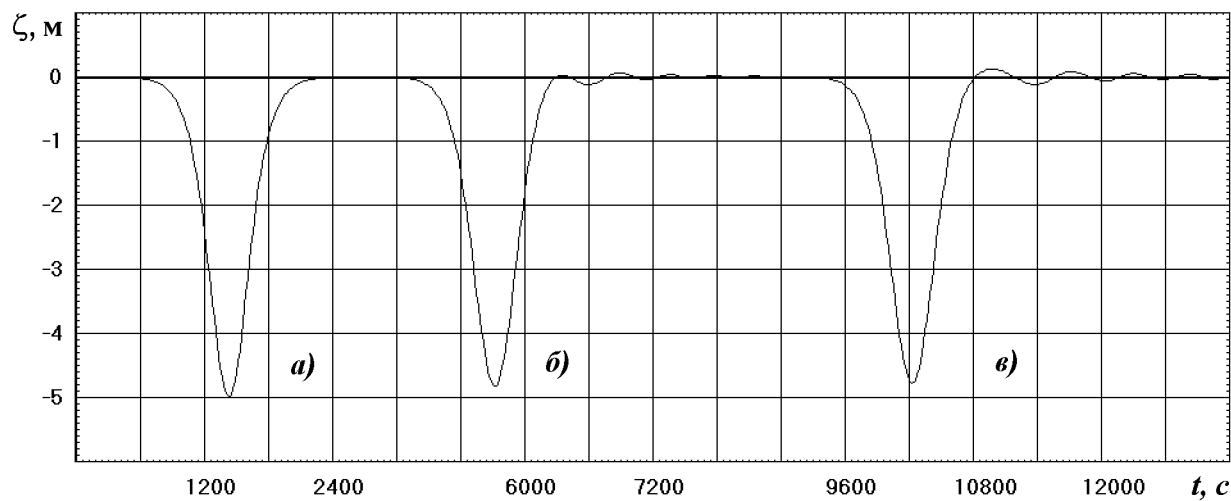


Рис. 4. Распространение длинной уединенной волны в океане.

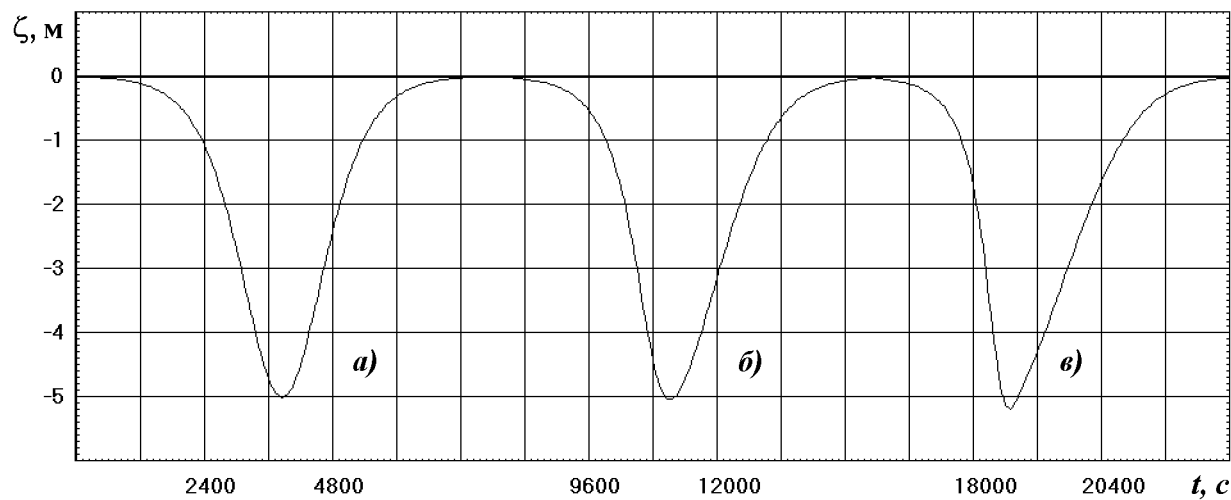


Рис. 5. Эволюция очень длинного уединенного возмущения в море.

Если исходная волна является очень длинной (зависимость (4) с $L = 4L_0$), то, как и следовало ожидать, возмущение постепенно трансформируется в “треугольное” с крутым передним и растянутым задним фронтом (см. рис. 5). При этом вновь $h_2 = 300$ м; шаг по времени $\Delta t = 30$ с, а шаг по координате $\Delta x = 20$ м; датчики же находились на расстояниях а) — $x = 1$ км, б) — $x = 30$ км и в) — $x = 60$ км от левого края бассейна.

Если же исходная волна была умеренно длинной (зависимость (4) с $L = L_0/4$), то более пологим становился ее передний фронт, за которым возникают медленно затухающие осцилляции (см. рис. 6). Здесь снова $h_2 = 300$ м, но $\Delta t = 15$ с, а $\Delta x = 10$ м; датчики же располагались на расстояниях а) — $x = 0, 1$ км и б) — $x = 10$ км от левого края водоема.

Теперь рассмотрим эволюцию длинного уединенного возмущения в бассейне с наклонным участком дна. На рис. 7 представлены результаты для случая, когда на первых 5 км глубина нижнего слоя линейно уменьшается в два раза (с 300 м до 150 м). При этом исходная волна имела ту же форму и амплитуду, что и на рис. 3 (зависимость (4) с $L = L_0$ и $\zeta_a = 5$ м); датчики находились на расстояниях а) — $x = 1$ км, б) — $x = 20$ км и в) — $x = 40$ км от левого края водоема; шаг по времени $\Delta t = 15$ с, а шаг по координате $\Delta x = 10$ м. Сравнение этих мареграмм показывает, что наблюдается лишь очевидное слабое убывание скорости распространения возмущения и небольшое усиление колебаний в хвосте основной волны. На рис. 8 продемонстрирована трансформация возмущения для ситуации, когда на первых 5 км глубина нижнего слоя линейно уменьшается в шесть раз (с 300 м до 50 м). Здесь исходная волна, шаги по времени и координате были теми же, а датчики располагались на расстояниях а) — $x = 1$ км, б) — $x = 10$ км и в) — $x = 20$ км от левого края бассейна. По мере подъема дна коэффициент c_3 меняет знак, что приводит к возникновению значительных осцилляций на заднем фронте возмущения.

4. Обсуждение результатов и заключение

Трансформация нелинейных поверхностных волн на глубокой воде, подобная вышеописанной, ранее не только получалась при решении кубического уравнения Шредингера (например, [1, 4, 5]), но и фиксировались в лабораторных экспериментах [4, 5, 11]. Эволюция длинных уединенных возмущений в однородных и стратифицированных жидкостях с горизонтальным дном, аналогичная исследованной выше, была обнаружена многими авторами как с помощью уравнения Кортевега–де Вриза (например, [1, 2, 4, 6]), так и в различных опытах [4, 12–14].

Результаты расчетов по распространению уединенной внутренней волны в двухслойной жидкости под “крышкой” при плавном подъеме дна были представлены в статье [15]. Динамика возмущения, изображенная на рис. 8, хорошо с ними согласуется. Экспериментальное исследование трансформации уединенной внутренней волны в двухслойной жидкости со свободной поверхностью в лотке с участком линейного уменьшения глубины нижней жидкости выполнено в работе [16]. Качественно картина та же, а количественное сравнение осуществить невозможно из-за того, что в этой статье мареграммы слишком мелкие.

Похожая картина имела место в натуральных наблюдениях и модельных вычислениях для периодических нелинейных приливных возмущений, набегающих на северо-западный шельф Австралии [17]. В работе [18] коэффициент при нелинейном члене в уравнении Кортевега–де Вриза также изменял свой знак. Но это объяснялось не подъемом дна бассейна, а горизонтальной неоднородностью глубин верхней и нижней жидкостей, т. е. местоположения пикноклина.

При рассмотрении длинных волн характерная скорость распространения возмущений, входящая в член второго порядка малости уравнения (3), который пропорционален градиенту глубины водоема, может быть заменена фазовой скоростью очень длинных линейных волн. В результате, матрица итоговой системы уравнений зависит лишь от топографии бассейна и не изменяется в процессе решения. Поэтому можно один раз определить обратную матрицу к ней для рассматриваемого водоема и использовать ее для различных начальных данных. Следовательно, время расчета на одном слое будет почти таким же, как и для явной схемы.

Подводя итог, можно сделать вывод, что предложенная здесь численная реализация эволюционного уравнения (3) с помощью неявной трехслойной конечно-разностной схемы позволяет находить устойчивые решения и для длинных, и для коротких волн. Таким образом, есть все основания надеяться, что данная модель окажется полезной при изучении практических вопросов океанологии и прогнозировании гидрофизических процессов в водоемах.

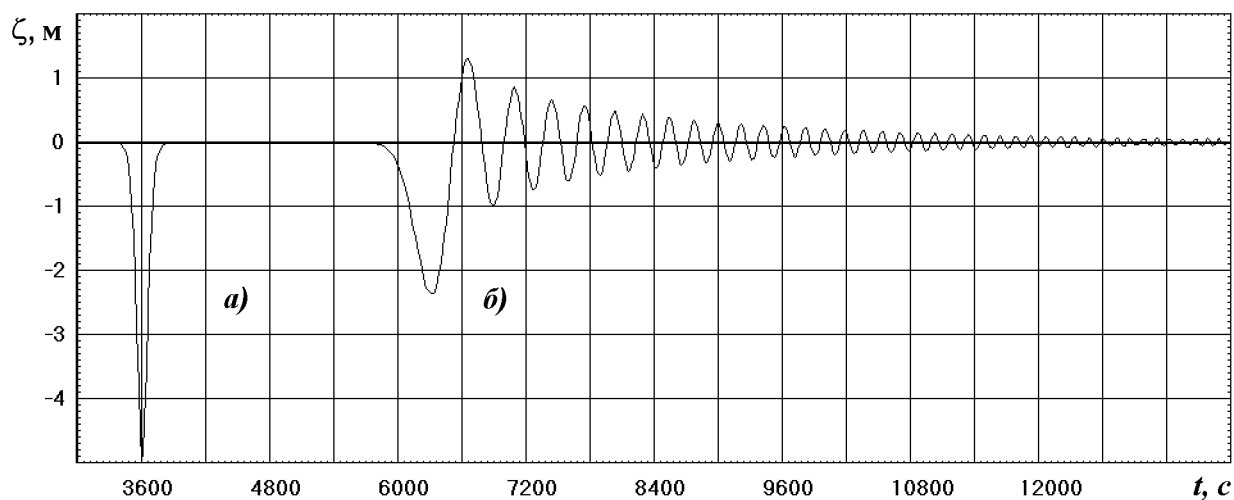


Рис. 6. Трансформация умеренно длинной уединенной волны в море.

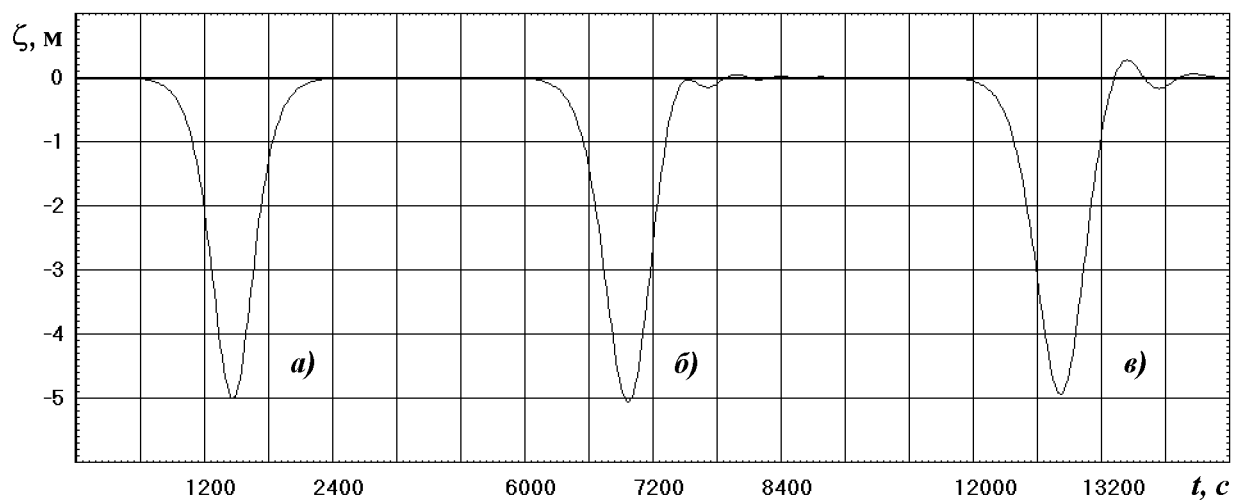


Рис. 7. Динамика длинного уединенного возмущения при несущественном подъеме дна.

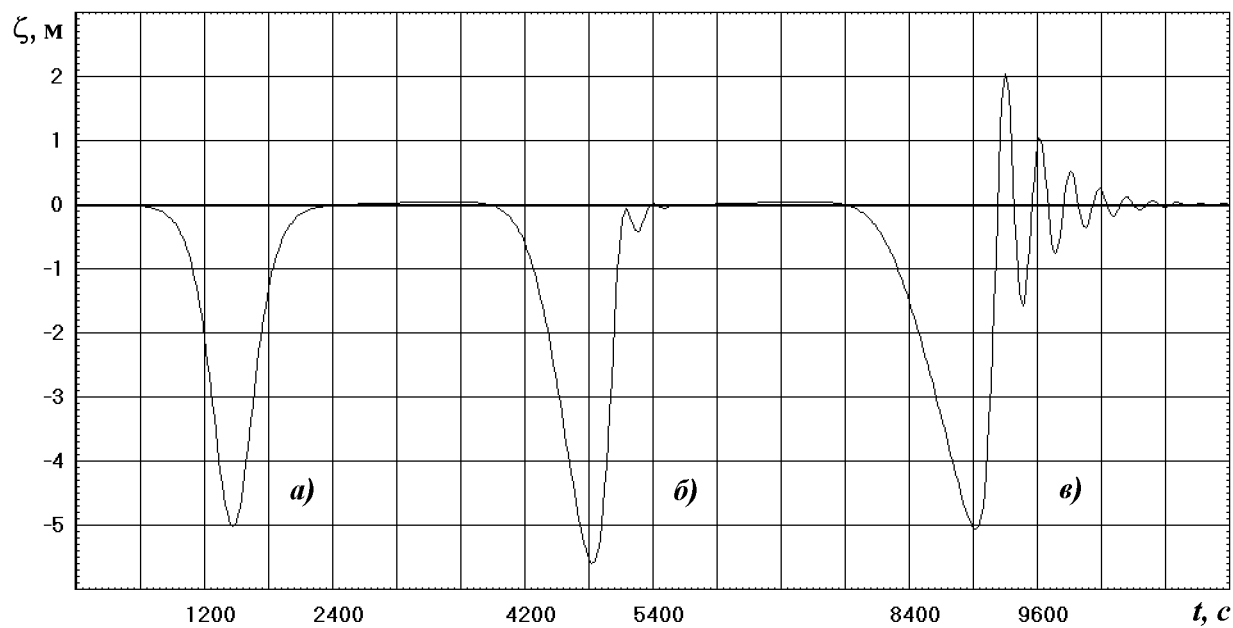


Рис. 8. Эволюция длинной уединенной волны при ее переходе на мелководье.

Список литературы

- [1] УИЗЕМ ДЖ. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [2] МИРОПОЛЬСКИЙ Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1981.
- [3] ОВСЯННИКОВ Л. В., МАКАРЕНКО Н. И., НАЛИМОВ В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Наука, Новосибирск, 1985.
- [4] АБЛОВИЦ М., СИГУР Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [5] ЮЭН Г. С., ЛЭЙК Б. М. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987.
- [6] ВОЛЬЦИНЕР Н. Е., КЛЕВАННЫЙ К. А., ПЕЛИНОВСКИЙ Е. Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоздат, 1989.
- [7] ШОКИН Ю. И., ЧУБАРОВ Л. Б., МАРЧУК АН. Г., СИМОНОВ К. В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука, 1989.
- [8] ЛЕ БЛОН П., МАЙСЕК Л. Волны в океане. Т. 1. М.: Мир, 1981.
- [9] ХАБАХПАШЕВ Г. А. Распространение внутренних и поверхностных двумерных нелинейных волн в океане со скачком плотности и пологим дном // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 3.
- [10] БОРИСОВ А. А., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Динамика слабонелинейных внутренних волн в двухслойном океане // Доклады РАН. 1993. Т. 330, № 1. С. 105–107.
- [11] ABLOWITZ M. J., HAMMACK J., HENDERSON D., SCHÖBER C. M. Modulated periodic Stokes waves in deep water // Physical Review Letters. 2000. Vol. 84, No. 5. P. 887–890.
- [12] HAMMACK J. L., SEGUR H. The Korteweg–de Vries equation and water waves. Part 2. Comparison with experiments // J. Fluid Mechanics. 1974. Vol. 65, pt. 2. P. 289–314.
- [13] HAMMACK J. L., SEGUR H. The Korteweg–de Vries equation and water waves. Part 2. Oscillatory waves // J. Fluid Mechanics. 1978. Vol. 84, pt. 2. P. 337–358.
- [14] SEGUR H., HAMMACK J. L. Solitary models of long internal waves // J. Fluid Mechanics. 1982. Vol. 118. P. 285–304.
- [15] HELFRICH K. R., MELVILLE W. K., MILES J. W. On interfacial solitary waves over slowly varying topography // J. Fluid Mechanics. 1984. Vol. 149. P. 305–317.
- [16] MAURER J., HUTTER K., DIEBELS S. Viscous effect in internal waves of two-layered fluid with variable depth // European J. Mechanics. B/Fluids, 1996. Vol. 15, No. 4. P. 445–470.
- [17] HOLLOWAY P. E., PELINOVSKY E., TALIROVA T., BARNES B. A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf // J. Physical Oceanography. 1997. Vol. 27, No. 6. P. 871–896.
- [18] ТАЛИПОВА Т. Г., ПЕЛИНОВСКИЙ Е. Н., ГРИМШОУ Р. Трансформация солитона в точке нулевой нелинейности // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. № 1. С. 113–117.