

Метод коллокации и наименьших квадратов для расчета стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости

Л. Г. СЁМИН

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: l_semin@windoms.sitek.net

В работе представлен численный метод коллокации и наименьших квадратов (КНК) решения краевых задач для уравнений Стокса и Навье—Стокса с учетом уравнения теплопереноса. Реализован алгоритм адаптации сетки к особенностям решения. Представлены результаты расчетов модельных задач о течении в прямоугольной каверне и обтекания уступа, обращенного по потоку.

1. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Стокса

1.1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для уравнений Стокса:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}^{-1} \Delta v_j - p_{x_j} = f_j, & (x_1, x_2) \in \Omega, \quad j = 1, 2, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{V}. \end{cases} \quad (1)$$

Приближённое решение отыскивается в виде кусочно-полиномиальной функции на регулярной сетке. Вводятся следующие обозначения: h — половина ширины ячейки, (x_{1m}, x_{2m}) — координаты центра m -ой ячейки, $y_1 = (x_1 - x_{1m})/h$, $y_2 = (x_2 - x_{2m})/h$ — локальные координаты в ячейке, $\vec{u}(y_1, y_2) = \vec{v}(x_1, x_2)$, $q(y_1, y_2) = hp(x_1, x_2)$. Тогда уравнения (1) в локальных переменных примут вид:

$$\Delta u_j - \operatorname{Re} q_{y_j} = \operatorname{Re} h^2 f_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{U}. \quad (4)$$

Пусть известно некоторое приближённое решение $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{q})$. Искомое уточнённое решение представим в виде: $u_1 = \bar{u}_1 + \hat{u}_1$, $u_2 = \bar{u}_2 + \hat{u}_2$, $q = \bar{q} + \hat{q}$. Подставляя это представление в уравнения (2), получаем:

$$\Delta \hat{u}_j - \operatorname{Re} \hat{q}_{y_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

где $F_j = \operatorname{Re}(h^2 f_j + \bar{q}_{y_j}) - \Delta \bar{u}_j$.

В каждой ячейке приближённое решение отыскивается в виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \sum_j a_{jm} \varphi_j, \quad (6)$$

где φ_j — базисные функции (векторы с тремя компонентами), m — номер ячейки.

Коэффициенты a_{jm} будут определяться из уравнений коллокации и условий согласования на границах соседних ячеек или краевых условий на $\partial\Omega$.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (коды проектов 99-01-00515, 00-01-00370, 01-01-06174), интеграционного проекта СО РАН 2000-60.2.

© Л. Г. Сёмин, 2001.

1.2. Приближённые уравнения

Базисные функции выбираются так, чтобы компоненты вектора скорости представлялись в виде полиномов второго порядка, а давление — в виде линейной функции, причём требуется, чтобы решение (6) удовлетворяло уравнению неразрывности $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Их вид приведён в работе [1].

Для получения единственного кусочно-полиномиального решения необходимо на границах между ячейками задать условия согласования. В качестве условий согласования рассматриваются условия непрерывности выражений:

$$\frac{\partial U_n}{\partial n} - p + \eta U_n, \quad \frac{\partial U_t}{\partial n} + \eta U_t. \quad (7)$$

Здесь U_n и U_t — нормальная и касательная к границе ячейки компоненты скорости, n — вектор единичной внешней к ячейке нормали, а η — некоторый положительный параметр, с его помощью можно управлять обусловленностью получающейся системы линейных алгебраических уравнений и влиять на скорость сходимости итераций. Вообще говоря, мы не можем удовлетворить этим условиям на всей границе ячейки. Мы удовлетворяем им, требуя, чтобы они выполнялись в смысле наименьших квадратов в восьми точках границы ячейки.

Если граница ячейки лежит на границе области, то в двух точках этой границы задается вектор скорости. Кроме того, в левом нижнем углу области задается давление.

К условиям согласования (краевым условиям) добавляются условия коллокации уравнений (2) в четырёх точках внутри ячейки.

В результате получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{12} B_{lk} a_{km} = F_l, \quad l = 1, \dots, 24. \quad (8)$$

Система (8) переопределена, в ней 24 уравнения и 12 неизвестных. Для того, чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим два функционала:

$$\Phi_1 = \sum_{l=1}^{16} \left(\sum_{j=1}^{12} B_{lj} a_{jm} - F_l \right)^2, \quad \Phi_2 = \sum_{l=17}^{24} \left(\sum_{j=1}^{12} B_{lj} a_{jm} - F_l \right)^2. \quad (9)$$

Первый функционал соответствует сумме квадратов невязок уравнений, полученных из условий согласования или краевых условий, второй — сумме квадратов невязок уравнений коллокации. Решение системы (8) находится из условия минимума этих функционалов, причем минимум Φ_1 берётся по коэффициентам a_{jm} , $j = 1, \dots, 10$, при фиксированных a_{11m} и a_{12m} , а минимум Φ_2 — по a_{jm} , $j = 11, 12$, при фиксированных a_{jm} , $j = 1, \dots, 10$.

Таким образом, для определения коэффициентов a_{jm} , $j = 1, \dots, 12$, получаем систему уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^{12} D_{lj} a_{jm} = \tilde{F}_l, \quad l = 1, \dots, 12, \quad (10)$$

решение которой находим методом прямого исключения.

Для определения решения задачи применяется итерационный метод, в котором решение уточняется для каждой ячейки области в отдельности. На каждой итерации при уточнении решения в m -ой ячейке решение в соседних ячейках либо уже уточнялось, либо берётся с предыдущей итерации.

Различались несколько типов ячеек: все грани ячейки находятся внутри области (“внутренние” ячейки); одна грань ячейки лежит на границе области; две соседние грани ячейки лежат на границе области.

Аналитические выражения для элементов матрицы D и вектора правых частей \tilde{F} системы (10) для всех указанных типов ячеек находились программой, написанной в системе REDUCE. Исходные уравнения, базисные функции, вид решения записаны в ней в качестве входных данных. Точки постановки условий согласования, граничных условий, уравнений коллокации, параметр η входят в полученные формулы в символьном виде, что позволяет при организации численного счёта рассматривать различные варианты, не изменяя формул.

Правильность полученных формул, сходимость и работоспособность метода проверялись на ряде тестовых задач с известным точным решением и на модельной задаче о течении в прямоугольной каверне с движущейся верхней границей. Результаты приведены в работе [1].

2. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье — Стокса

2.1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}^{-1} \Delta v_j - v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_j} = f_j, & (x_1, x_2) \in \Omega, \quad j = 1, 2, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{V}. \end{cases} \quad (11)$$

Как и для задачи Стокса, приближённое решение отыскивается в виде кусочно-полиномиальной функции на регулярной сетке. В локальных переменных уравнения (11) принимают следующий вид:

$$\Delta u_j - \operatorname{Re} \left(h \left(u_1 \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial u_j}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial q}{\partial y_j} \right) = \operatorname{Re} h^2 f_j, \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (13)$$

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{U}. \quad (14)$$

Существенное отличие от задачи Стокса состоит в наличии в определяющих уравнениях нелинейных членов. Поэтому для получения системы *линейных* уравнений для нахождения решения требуется линеаризация уравнений Навье — Стокса. Она производится следующим образом. Пусть известно некоторое приближённое решение $(\check{u}_1, \check{u}_2, \check{q})$. Искомое уточнённое решение представим в виде: $u_1 = \check{u}_1 + \hat{u}_1$, $u_2 = \check{u}_2 + \hat{u}_2$, $q = \check{q} + \hat{q}$. Подставив это представление в уравнения (12) и пренебрегая членами второго порядка малости $\hat{u}_1 \hat{u}_{j,y_1}$, $\hat{u}_2 \hat{u}_{j,y_1}$, $j = 1, 2$, получим линеаризованные уравнения:

$$\Delta \hat{u}_j - \operatorname{Re} h (\check{u}_1 \hat{u}_{j,y_1} + \check{u}_2 \hat{u}_{j,y_2} + \hat{u}_1 \check{u}_{j,y_1} + \hat{u}_2 \check{u}_{j,y_2}) - \operatorname{Re} \hat{q}_{y_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \quad (15)$$

где $F_j = \operatorname{Re} (h^2 f_j + h(\check{u}_1 \check{u}_{j,y_1} + \check{u}_2 \check{u}_{j,y_2}) + \check{q}_{y_j}) - \Delta \check{u}_j$.

В каждой ячейке уточнение решения отыскивается в виде (6). При выборе базисных функций руководствуемся теми же соображениями, которые приведены в разделе 1. Коэффициенты a_{jm} определяются по тому же алгоритму, как и для уравнений Стокса.

2.2. Повышение порядка аппроксимации давления

Как показали численные эксперименты, вследствие того, что давление, в отличие от компонент вектора скорости, аппроксимируется полиномами первого порядка, точность его определения заметно хуже. Для улучшения свойств метода в данной работе предложен вариант аппроксимации давления с помощью полиномов второго порядка. В этом случае к ранее введенным 12-ти базисным вектор-функциям добавим еще три:

k	13	14	15
φ_k	0	0	0
	$4\operatorname{Re}^{-2} y_1^2$	$4\operatorname{Re}^{-2} y_2^2$	$4\operatorname{Re}^{-2} y_1 y_2$

Формулы метода для определения коэффициентов a_j разложения приближенного решения по базису находятся по описанному выше алгоритму. Введение добавочных базисных функций несколько усложняет вывод формул, поэтому и здесь применяется система компьютерной алгебры.

Правильность полученных формул проверялась на ряде задач с известным точным решением. В качестве одного из тестов была рассмотрена следующая задача. Расчетная область — единичный квадрат. В качестве точного решения были взяты выражения для (v_1, v_2, p) в виде тригонометрических функций: $v_1 = -\sin(\pi(x_2 - 0.5)/(1 - 2l)) \cos(2\pi x_1)/(2(1 - 2l))$, $v_2 = \sin(2\pi x_1) \cos(\pi(x_2 - 0.5)/(1 - 2l))$, $p = (\cos(\pi/2x_1) + \cos(\pi/2x_2))/2$. В численных экспериментах полагалось $l = 0.25$.

Подстановка этого решения в уравнения (11) вносит в правые части члены типа внешних сил и источников, которые обеспечивают движение жидкости, заданное этим решением. Для полученной таким образом системы уравнений с дифференциальными операторами (11) применяем метод КНК для нахождения численного решения.

На этом тесте были проведены численные эксперименты на последовательности сеток по определению порядка сходимости метода. На сетках с шагами 1/10, 1/20, 1/40 и 1/80 вычислялись разности между точным и численным решениями. В табл. 1 приведены сравнительные результаты расчетов погрешности в определении скорости и давления на последовательности сеток при числе Рейнольдса 100 для вариантов метода КНК с линейной аппроксимацией давления и с аппроксимацией давления полиномами второго порядка.

Таблица 1. Определение порядка сходимости на последовательности сеток, $Re=100$

Шаг сетки	Линейная аппроксимация давления		Квадратичная аппроксимация давления	
	Погрешность	Коэффициент уменьшения погрешности	Погрешность	Коэффициент уменьшения погрешности
Д а в л е н и е				
1/10	9.5e-2		1.4e-1	
1/20	2.3e-2	4.1	8.9e-3	15.8
1/40	4.9e-3	4.7	1.4e-3	6.4
1/80	1.0e-3	4.9	2.4e-4	5.9
С к о р о с т ь				
1/10	3.7e-2		6.0e-2	
1/20	8.9e-3	4.2	4.9e-3	12.3
1/40	2.3e-3	4.0	3.1e-4	15.8
1/80	5.1e-4	4.5	2.9e-5	10.7

Видно, что при уменьшении шага сетки вдвое погрешность решения уменьшается не менее, чем в четыре раза как в случае линейной, так и в случае квадратичной аппроксимации давления. Следовательно, порядок сходимости метода на гладких решениях не хуже второго.

Из сравнения со случаем аппроксимации давления линейными полиномами видно, что порядок сходимости и точность вычисления давления улучшаются. Следует также отметить, что улучшились также порядок сходимости и точность расчета компонент вектора скорости. Таким образом, повышение порядка аппроксимации давления повышает точность расчета всего решения в целом.

2.3. Расчёт течения в прямоугольной каверне с движущейся верхней границей

С помощью метода КНК проведён расчёт течения в прямоугольной каверне с движущейся верхней границей. Расчёты проводились для чисел Рейнольдса от 1 до 2000 при различных отношениях глубины каверны к её ширине. Картины линий тока приведены в работе [2]. При увеличении числа Рейнольдса происходит увеличение угловых придонных вихрей и смещение центра главного вихря сначала в направлении движения крышки, а потом к центру каверны. Этот эффект подтверждается физическими экспериментами, описанными в работе [3] и расчётами, проведенными в работах [4, 5, 6, 7, 8]. Следует отметить, что вторичные вихри на два порядка слабее главного. Тем не менее предлагаемый в данной работе метод хорошо их передаёт.

Максимальные и минимальные значения скоростей вдоль вертикальной и горизонтальной средней линии каверны и координаты точек, в которых они достигаются, приведены в табл. 2.4. Эти результаты находятся в хорошем соответствии с результатами расчётов других исследователей [4, 5, 6, 7].

2.4. Расчет обтекания обратного уступа

Проведён расчёт обтекания вязкой жидкостью уступа, обращённого по потоку. Высота уступа полагалась равной половине максимальной высоты расчётной области. На входе задавался параболический профиль скорости, на выходе — равная по расходу парабола. Кроме того, в левом нижнем углу входного канала задавалось давление. Как отмечалось в работе [9], характер течения в области за уступом оказывает влияние на характер течения во входном канале, а именно, параболический профиль течения искажается вблизи внезапного расширения канала. Поэтому длину входного канала следует устанавливать существенно отличной от нуля. В приводимых ниже расчётах длина входного канала полагалась равной четырём высотам уступа, длина области за уступом — 24 высотам уступа. Расчёты проводились в диапазоне

чисел Рейнольдса от 1 до 800. Известно [9], что в этом диапазоне чисел Рейнольдса течение является ламинарным.

Таблица 2. Характерные значения компонент вектора скорости для задачи о течении в каверне для квадратичной аппроксимации давления

Сетка	$v_1 \min$	$x_2 \min$	$v_2 \min$	$x_1 \min$	$v_2 \max$	$x_1 \max$
Re = 1						
20 × 20	-0.208	0.53125	-0.185	0.7890625	0.184	0.2109375
40 × 40	-0.2078	0.5390625	-0.1848	0.7890625	0.1841	0.2109375
80 × 80	-0.20777	0.5390625	-0.18483	0.7890625	0.18408	0.2109375
Re = 100						
20 × 20	-0.216	0.453125	-0.256	0.8046875	0.181	0.234375
40 × 40	-0.2146	0.4609375	-0.2544	0.8125	0.1802	0.234375
80 × 80	-0.21420	0.4609375	-0.25399	0.8125	0.17975	0.234375
160 × 160	-0.21412	0.4609375	-0.25391	0.8125	0.17968	0.234375
Re = 400						
40 × 40	-0.3306	0.28125	-0.4557	0.859375	0.3058	0.2265625
80 × 80	-0.32947	0.28125	-0.45466	0.859375	0.30464	0.2265625
Re = 1000						
80 × 80	-0.38970	0.171875	-0.52743	0.90625	0.37808	0.15625
160 × 160	-0.38907	0.171875	-0.52692	0.90625	0.37745	0.15625

Таблица 3. Координаты точек отрыва и присоединения потока

Re	1	50	100	200	300	400	650	800
X_1	0.4	1.7	3.0	5.0	6.8	8.3	10.8	11.83
X_2	—	—	—	—	—	7.7	8.7	9.39
X_3	—	—	—	—	—	10.0	16.8	20.55

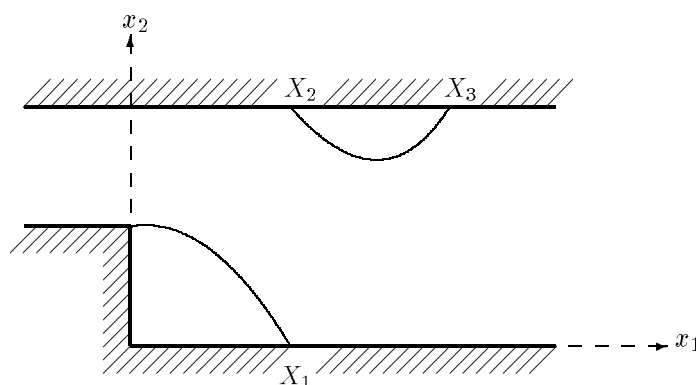


Рис. 1. Схема обтекания уступа

Характерными величинами, определяющими структуру потока, являются координаты точек отрыва и присоединения потока. В табл. 3 приведены координаты точки присоединения потока X_1 на нижней границе и координаты точек отрыва X_2 и присоединения X_3 потока на верхней границе, полученные в данной работе при шаге сетки 0.05, для различных чисел Рейнольдса. Величины X_1 , X_2 , X_3 безразмерны относительно высоты уступа, за начало координат по оси абсцисс принималось место внезапного расширения канала (см. рис. 1).

3. Адаптация сетки

В данной работе реализован алгоритм адаптации сетки к особенностям решения дифференциальной задачи на основе апостериорной оценки погрешности в каждой ячейке сетки. Если оценка погрешности превышает определенную заданную величину, то ячейку необходимо измельчить. Для оценки погрешности численного решения был применен подход, аналогичный предложенному А.Г. Слепцовым [10] в методе КНК для эллиптических уравнений. Он заключается в следующем: пусть численное решение в ячейке является полиномом степени m , тогда в качестве оценочного решения возьмем полином степени $m+1$, построенный по данным из этой и/или соседних ячеек, причем строим его методом КНК. Разность между оценочным и численным решениями и будет апостериорной оценкой погрешности.

В данной работе реализован вариант адаптивного метода КНК в случае, когда компоненты вектора скорости в каждой ячейке отыскиваются в виде полиномов второй степени, а давление — в виде полинома первой степени. Мельчение сетки производилось в тех ячейках, где была велика оценка погрешности давления. В качестве оценочного решения берем вектор, в котором и компоненты скорости, и давление являются полиномами второго порядка.

Для тестирования была взята задача с известным точным решением из работы [11]. Точное значение давления в этой задаче выражается формулой: $p = -0.5(x_1^4 + x_2^4) - (x_1 x_2)^2 + (3+n)(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2^2 + \text{const}$. В области, ограниченной прямыми $x_1 = 3$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_2 = -5$ (квадрат со стороной 6), значение давления изменяется от -726 при $x_1 = -3$, $x_2 = -5$ до 4.5 при $x_1 = -1.725$, $x_2 = -0.005$, причем при изменении x_2 от -5 до -2 происходит наибольший рост давления.

Расчет начинался с сетки 10×10 ячеек с нулевого приближения. По достижении сходимости на данной сетке производилась оценка погрешности давления по указанному выше алгоритму и мельчение тех ячеек, где эта оценка превышала некоторое наперед заданное ε . С каждым последующим мельчением величина ε уменьшалась. Делалось это из следующих соображений: в области больших градиентов погрешность решения будет большой и при согласовании решения с ячейками из области малых градиентов погрешность будет в них передаваться, из-за чего в области малых градиентов погрешность будет больше, чем можно было бы ожидать при данном размере шага сетки; после же мельчения ячеек в области больших градиентов погрешность в них уменьшается и также уменьшается погрешность в ячейках из области малых градиентов, вследствие чего отпадает необходимость их мельчения.

На рис. 2 показаны линии уровня давления, построенные по его точным значениям, и картина адаптации сетки. Из рисунка видно, что сетка сгущается в области больших градиентов давления.

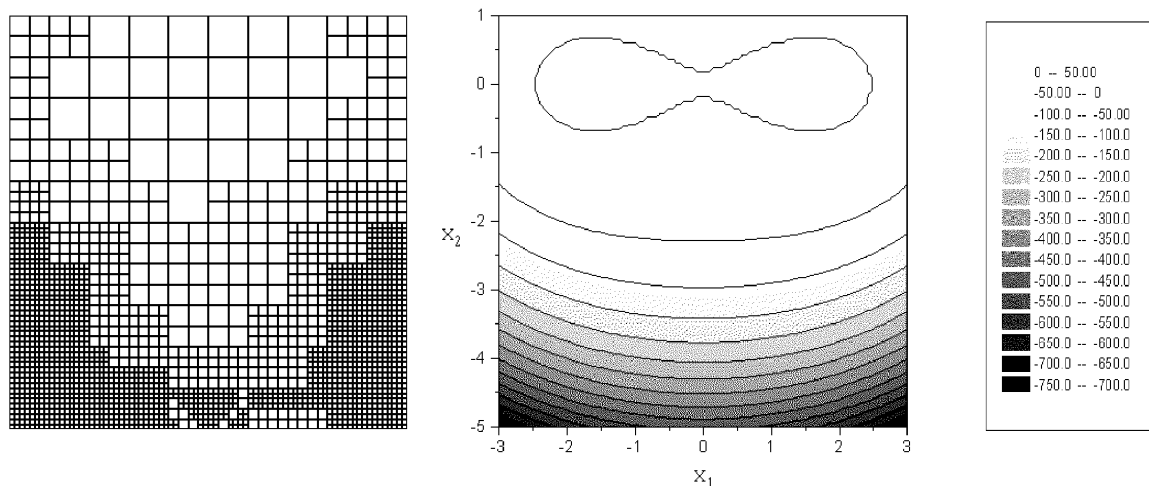


Рис. 2. Задача с большим градиентом давления

4. Метод коллокаций и наименьших квадратов решения краевых задач теплопереноса в вязкой жидкости

При рассмотрении уравнения конвективного теплопереноса считаем, что плотность и вязкость среды не зависят от температуры и, следовательно, распределение температуры не оказывает влияния на поле течения. Таким образом, температура не входит в уравнения (11) и эти уравнения образуют замкнутую

систему для определения функций \vec{v} и p . Уравнение теплопереноса запишем в следующем виде:

$$\Delta T - \text{Pe} \left(v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (16)$$

Здесь $\text{Pe} = Ul/\chi$ — число Пекле, χ — коэффициент температуропроводности, U и l — характерные скорость и размер, выбранные при обезразмеривании задачи. Считаем, что коэффициент температуропроводности не зависит от температуры.

Для определения поля температуры рассматривались как задача Дирихле

$$T|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{T}, \quad (17)$$

так и смешанная краевая задача, когда на части границы задаются условия (17), а на другой части — условия Неймана

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_N} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial n}, \quad (18)$$

где n — внешняя нормаль к ячейке, $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$.

Если решение краевой задачи (11) найдено, то температура находится по вычисленному полю скоростей из решения краевой задачи (16), (17) при $\partial\Omega_N = \emptyset$, или задачи (16)–(18).

Приближенное решение для температуры также отыскивается в виде кусочно-полиномиальной функции на регулярной сетке с прямоугольными ячейками. В каждой ячейке решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций:

$$T = \sum_j c_{jm} \psi_j, \quad (19)$$

где ψ_j — базисные функции, m — номер ячейки.

Базисные функции ψ_j выбираем из класса полиномов второго порядка. В данной работе они были взяты следующим образом: $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = y_1$, $\psi_3 = y_2$, $\psi_4 = y_1 y_2$, $\psi_5 = y_1^2$, $\psi_6 = y_2^2$. Здесь через y_1 и y_2 обозначены локальные координаты в ячейке.

Нахождение формул метода для определения коэффициентов c_j разложения приближенного решения по базису производится по тому же алгоритму КНК. В каждой ячейке сетки выписываются четыре уравнения коллокации (16). Если граница ячейки лежит на границе области, то в двух точках на ней задаются граничные условия (17) или (18). Кроме того, для согласования решения между соседними ячейками, в двух точках на границе между ними задаются условия непрерывности выражений

$$\frac{\partial T}{\partial n} + kT,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к ячейке, k — положительный коэффициент, с помощью которого можно влиять на обусловленность системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_j . В итоге в каждой ячейке получаем переопределенную систему уравнений, решение которой находим в смысле наименьших квадратов.

Для нахождения решения задачи во всей расчетной области, как и ранее, применяется метод итераций по подобластям.

Правильность полученных формул проверялась на задачах с известным точным решением. В качестве одной из тестовых задач была рассмотрена задача о стационарном теплообмене при ламинарном течении жидкости с параболическим профилем скорости в плоском канале. Уравнение теплопереноса в этом случае выглядит так:

$$\Delta T - \text{Pe} (1 - x_2^2) \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0.$$

Если правые части уравнений Навье—Стокса взять следующим образом: $f_1 = 0$, $f_2 = -g$, то точное решение задачи (11) — (16) будет выражаться формулами: $v_1 = 1 - x_2^2$, $v_2 = 0$, $p = gx_2 - 2x_1/\text{Re}$, $T = 12x_1 + \text{Pe}(6x_2^2 - x_2^4)$; стенки канала задаются уравнениями: $x_2 = \pm 1$. Краевые условия для скорости и температуры задавались из точного решения.

Для определения температуры были рассмотрены краевые задачи (16), (17) и (16)–(18). Во втором случае условия (17) задавались только на левой границе области (при $x_1 = 0$), а на всей остальной границе ставились условия (18).

В вычислительных экспериментах на последовательности сеток было установлено, что численное решение для температуры сходится к точному с порядком не хуже второго в обоих случаях, но для решения задачи со смешанными краевыми условиями требуется существенно большее количество итераций.

Список литературы

- [1] Смин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций – наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычислит. технологии. 1996. Т. 1, № 2. С. 90–98.
- [2] Смин Л.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье – Стокса .. Вычислит. технологии. 1998. Т. 3, № 3. С. 72–84.
- [3] PAN F., ACRIVOS A. Steady flows in rectangular cavities // J. of Fluid Mechanics. 1967. Vol 28, pt. 4. P. 643–655.
- [4] BRUNEAU C.H., JOURON C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier – Stokes equations // J. of Comput. Phys. 1990. Vol. 89, No. 2. P. 389–413.
- [5] CHEN C.J., CHEN H.J. Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier – Stokes equations // J. of Comput. Phys. 1984. Vol. 53, No. 2. P. 209–226
- [6] GHIA U., GHIA K.N., SHIN C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method // J. of Comput. Phys. 1982. Vol. 48, No. 4. P. 387–411.
- [7] DENG G.B., PIQUET J., QUEUTEY P., VISONNEAU M. A new fully coupled solution of the Navier – Stokes equations // Inter. J. for Numer. Meth. in Fluids. 1994. Vol. 19, No. 7. P. 605–639.
- [8] BOZEMAN J.D., DALTON C. Numerical study of viscous flow in a cavity // J. of Comput. Phys. 1973. Vol. 12, No. 3. P. 348–363.
- [9] BARTON I.E. The entrance effect of laminar flow over a backward - facing step geometry // Inter. J. for Numer. Meth. in Fluids. 1997. Vol. 25. P. 633–644.
- [10] Слепцов А.Г., Шокин Ю.И. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 5. С. 572–586.
- [11] Шмыглевский Ю.Д. О вихревых образованиях в плоскопараллельных потоках вязкой и идеальной жидкости // Механика жидкости и газа. 1997. № 6. С. 88–92.