

КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

К. Г. ШВАРЦ

Пермский государственный университет, Россия

e-mail: shwarz@aa.mail

В плоском горизонтальном слое жидкости при наличии вдоль границ постоянного градиента температуры возникает адвективное течение. Механизм формирования адвективного течения во вращающемся слое жидкости обусловлен двумя факторами: адвекцией и силой Кориолиса. Адвективное течение, возникающее во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости, в котором ось вращения совпадает с вертикальной осью координат, для случая, когда температура на границах линейно изменяется с продольной координатой, было впервые описано аналитически С. Н. Аристовым [1]. Особенностью течения является отсутствие вертикальной компонента скорости, вектор скорости в потоке ориентирован перпендикулярно силе плавучести, однако имеются обе горизонтальные компоненты. Адвективное течение во вращающемся слое имеет экмановскую спиралевидную форму [2] и наряду с изотермическим течением Экмана оно безусловно является основным пограничным течением в атмосфере и океане.

В данной работе рассматривается поведение конечно-амплитудных возмущений такого движения за порогом устойчивости в зависимости от числа Тейлора при фиксированном значении числа Прандтля $Pr = 6.7$ (вода).

Рассмотрим плоский горизонтальный слой несжимаемой жидкости, ограниченный твердыми плоскостями

$Z = \pm h$ и вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω_0 . Направление оси вращения совпадает с вертикальной осью координат. На обеих границах задана температура, линейно меняющаяся с координатой x , условие прилипания и замкнутости потока:

$$Z = \pm h : \quad T = Ax, \quad A = \text{const}, \quad \vec{v} = 0, \quad \int_{-h}^h v_x dz = 0. \quad (1)$$

Возникающее адвективное течение описывается аналитически [3]. Если выбрать в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления соответственно h , h^2/ν , $g\beta Ah^3/\nu$, Ah и $\rho_0 g\beta Ah^2$ (здесь ν — кинематическая вязкость жидкости, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент теплового расширения, ρ_0 — средняя плотность), то безразмерные профили скорости и температуры имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} \Im f_1(z), & v_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} [z - \Re f_1(z)], \\ T_0 &= x + \frac{\text{GrPr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0(z), & p_0 &= x(z+1) + \int_{-1}^z \frac{\text{GrPr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0(\zeta) d\zeta, \\ f_1(z) &= \frac{\sinh \lambda z}{\sinh \lambda}, & \lambda &= \sqrt[4]{\text{Ta}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $z = Z/h$, u_0 , v_0 — горизонтальные компоненты вектора скорости, T_0 — температура, p_0 — давление, $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, $Gr = \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2}$ — число Грасгофа, $\text{Ta} = \left(\frac{2\Omega_0 h^2}{\nu}\right)^2$ — число Тейлора [4], \Re — действительная, \Im — мнимая часть комплексного значения.

Профили компонент скорости $u_0(z)$, $v_0(z)$ и, соответственно, $\tau_0(z)$ являются антисимметричными относительно оси z . Они описывают движение типа спирали Экмана. Температура представляется в виде функции, описывающей два антисимметричных тепловых потока, направленных в противоположные направления. С ростом числа Тейлора вблизи твердых границ образуются пограничные слои скорости и температуры. Относительная толщина погранслоя $\left(\frac{\text{Ta}}{4}\right)^{-0.25}$.

Линейная теория устойчивости данного течения рассматривалась в [3]. Для исследования вторичных течений применим метод малых возмущений. Рассмотрим возмущенное течение в виде

$$v_x = u_0 + u, \quad v_y = v_0 + v, \quad v_z = w, \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + p. \quad (3)$$

Уравнения для возмущений скорости \vec{V} , температуры θ , давления P в безразмерном виде имеют следующее представление во вращающейся системе координат:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{Gr} \left[(\vec{V} \nabla) \vec{v}_0 + (v_0 \nabla) \vec{V} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} \right] + \sqrt{\text{Ta}} (\vec{i}_z \times \vec{V}) = -\nabla P + \Delta \vec{V} + \theta \vec{i}_z, \quad \text{div} \vec{V} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[\vec{V} \nabla T_0 + v_0 \nabla \theta + \vec{V} \nabla \theta \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \quad (5)$$

$$z = \pm 1: \quad \vec{V} = 0, \quad \theta = 0; \quad \vec{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \vec{V} = (u, v, w), \quad \vec{i}_z = (0, 0, 1). \quad (6)$$

В силу большой сложности исследования устойчивости течения в трехмерной постановке будем рассматривать предельные случаи: пространственные винтовые периодические по x возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной оси X и пространственные спиральные периодические по y возмущения в виде валов с осью, параллельной оси X . Заметим, что при отсутствии вращения для $\text{Ta} = 0$ винтовые возмущения вырождаются в плоские.

Винтовые возмущения. Уравнения винтовых возмущений выводятся из системы (4)–(6) в предположении, что производные по y от всех функций равны нулю. Имеются все три компоненты вектора возмущения скорости, которые также как и возмущения температуры, являются функциями времени t и двух пространственных переменных x, z . Учитывая дивергентность возмущений скорости, введем функцию тока возмущений $\psi(t, x, z)$:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

и вихря возмущения скорости

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\Delta \psi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

Тогда система уравнений (4)–(6) примет вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_0' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta \phi - \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\Delta \psi + \phi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \Delta v, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} + u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\text{GrPr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta. \quad (12)$$

В данном случае оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Граничные условия:

$$\text{при } z = \pm 1: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad v = 0, \quad \theta = 0, \quad (13)$$

на боковых границах заданы условия периодичности

$$\psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \phi(t, 0, z) = \phi(t, L, z), \quad v(t, 0, z) = v(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z). \quad (14)$$

Здесь L — длина волны возмущений.

С помощью системы уравнений (9)–(12) с граничными условиями (13)–(14) исследовалась структура вторичных течений, возникающих в горизонтальном слое при фиксированных значениях числа Прандтля и Тейлора для значений числа Грасгофа выше критического.

Задача решалась численно с помощью метода сеток в терминах возмущения функции тока и вихря возмущения скорости (“двухполювым” методом [6]). Использовались явные конечно-разностные схемы с центральными и направленными разностями. Уравнение Пуассона (10) для функции тока возмущений ψ

решалось методом последовательной верхней релаксации. Основные расчеты проводились на сетке 21×41 для $Pr = 6, 7$, число Ta варьировалось в пределах от 0 до 5000. В качестве начальных возмущений для неизвестных ψ , v и θ бралась функция $\cos \frac{2\pi x}{L} \sin^2 \pi z$.

Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях числа Тейлора возмущения представляют собой систему бегущих винтообразных вихрей, возникающих в областях с неустойчивой температурной стратификацией (см. рис. 1). С ростом числа Тейлора вблизи твердых границ формируется пограничный слой. На рис. 2 представлены изолинии возмущения функции тока, возмущения компоненты скорости $v(t, x, z)$ и возмущения температуры при $Ta = 5000$ при малой надкритичности ($Gr = 2200$). В этом случае область неустойчивой температурной стратификации и система бегущих вихрей расположены именно в тонких пограничных слоях. Период повторения картины вторичного течения и возмущения температуры уменьшается с ростом числа Грасгофа. Зависимость периода от Gr подчиняется гиперболическому закону.

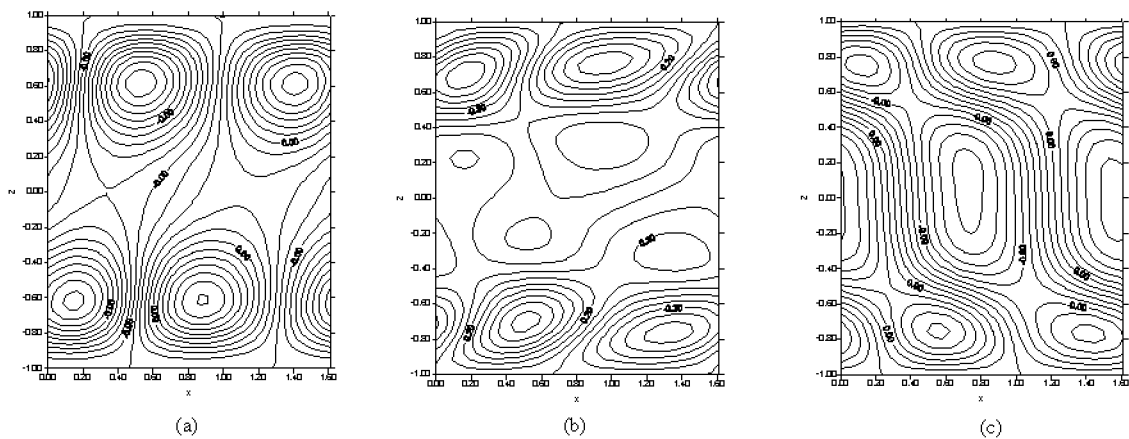


Рис. 1. Изолинии возмущения (a) функции тока ψ , (b) температуры θ и (c) компоненты скорости v для $Ta = 1$, $Gr = 150$.

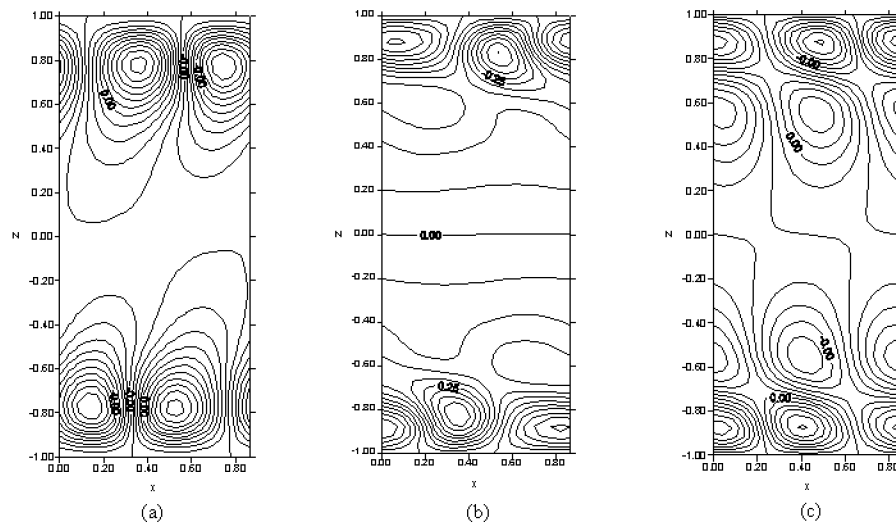


Рис. 2. Изолинии возмущения (a) функции тока ψ , (b) температуры θ и (c) компоненты скорости v для $Ta = 5000$, $Gr = 2200$.

Счетом нелинейной задачи получены следующие зависимости амплитуды функции тока возмущений ψ_{\max} , компоненты возмущения скорости v_{\max} , амплитуды возмущения скорости $V_{\max} = \max \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ и числа Нуссельта Nu от Gr при $Ta = 1$, $k = 4, 16$ вблизи порога устойчивости:

$$\begin{aligned} \psi_{\max} &\approx 0,485 \cdot 10^{-5} \sqrt{G - G_c}, \\ v_{\max} &\approx 0,562 \cdot 10^{-4} \sqrt{G - G_c}, \\ V_{\max} &\approx 0,293 \cdot 10^{-3} \sqrt{G - G_c}, \\ Nu &\approx 1 - 0,0247 \sqrt{G - G_c} + 0,0107(G - G_c). \end{aligned} \quad (15)$$

С ростом числа Грасгофа увеличивается скорость вторичного течения, его температура и тепловой поток через границы.

В случае пространственных возмущений с осью, перпендикулярной оси OX , суммарное движение представляет собой верхний и нижний потоки жидкости, на фоне которых распространяются волны, порожденные возмущениями температуры и скорости.

При надкритичности выше двух нестационарное течение теряет гармоничность по времени и перестраивается. Масштаб вихрей в экмановских пограничных слоях уменьшается, температурная стратификация вблизи твердых стенок сохраняется.

Спиральные возмущения. Уравнения спиральных возмущений выводятся из системы (3)–(5) в предположении, что производные по x от всех функций равны нулю. Имеются все три компоненты вектора возмущения скорости, которые, также как и возмущения температуры, являются функциями времени t и двух пространственных переменных y, z . Учитывая дивергентность возмущений скорости, введем функцию тока возмущений $\Psi(t, y, z)$:

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (16)$$

и вихря возмущения скорости

$$\Phi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = -\Delta \Psi = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right). \quad (17)$$

Тогда система уравнений (4)–(6) примет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + v_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_0' \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial u}{\partial z} = \Delta \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (18)$$

$$\Delta \Psi + \Phi = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} + u_0' \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta u, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} + v_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} + u + \frac{\text{GrPr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0' \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \quad (21)$$

где оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Граничные условия:

$$\text{при } z = \pm 1: \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad u = 0, \quad \theta = 0, \quad (22)$$

на боковых границах заданы условия периодичности, аналогичные условиям (14):

$$\Psi(t, 0, z) = \Psi(t, L, z), \quad \Phi(t, 0, z) = \Phi(t, L, z), \quad u(t, 0, z) = u(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z). \quad (23)$$

С помощью системы уравнений (18)–(21) с граничными условиями (22)–(23) исследовалась структура вторичных течений, возникающих в горизонтальном слое при фиксированных значениях числа Прандтля и Тейлора, для значений числа Грасгофа выше критического.

Задача решалась численно с помощью метода сеток тем же способом, что и в случае винтовых возмущений. Основные расчеты проводились на сетке 21×41 для $\text{Pr} = 6, 7$, число Ta варьировалось в пределах от 0 до 100. В качестве начальных возмущений для неизвестных Ψ, u и θ бралась функция $\cos \frac{2\pi y}{L} \sin^2 \pi z$.

В соответствии с результатами работ [5, 7] в потенциально неустойчивых зонах распределения температуры при отсутствии вращения формируются плоские ячеистые возмущения, сносимые основным потоком. При наличии слабого вращения вид возмущений температуры и скорости практически не меняется. На рис. 3 представлены изолинии возмущения функции тока Ψ , возмущения температуры θ и возмущения компоненты скорости u при $\text{Ta} = 1, \text{Gr} = 200$ и $k = 4, 16$ в фиксированный момент времени.

Вращение приводит к периодическому движению потенциально-неустойчивых зон возмущения температуры и, соответственно, ячеек возмущения вдоль горизонтального слоя: внизу — по часовой стрелке, вверх — против часовой. Одновременно, за счет нестационарного и “вихреобразного” поведения возмущения компоненты скорости u , вторичное движение имеет сложную трехмерную структуру в виде

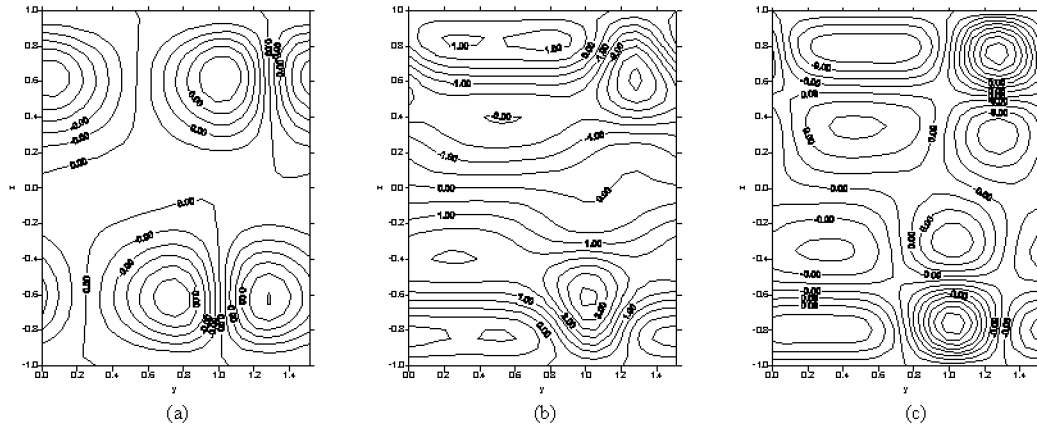


Рис. 3. Изолинии возмущения (а) функции тока Ψ , (б) температуры θ и (с) компоненты скорости u для $Ta = 1$, $Gr = 200$, $k_x = 4, 16$.

закрученных периодически движущихся вихрей. Период повторения картины вторичного течения и возмущения температуры уменьшается с ростом числа Грасгофа.

Кривая зависимости периода от числа Gr по расчетным точкам подчиняется гиперболическому закону. Для $Ta = 1$ и $k = 4, 16$ период $Period \approx \frac{583}{Gr^{1,129}}$.

Счетом нелинейной задачи получены следующие зависимости амплитуды функции тока возмущений Ψ_{max} , компоненты возмущения скорости u_{max} , амплитуды возмущения скорости $V_{max} = \max \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ и числа Нуссельта Nu от Gr при $Ta = 1$, $k = 4, 16$ вблизи порога устойчивости:

$$\begin{aligned} \Psi_{max} &\approx 0,274 \cdot 10^{-3} \sqrt{G - G_c}, \\ u_{max} &\approx 0,579 \cdot 10^{-3} \sqrt{G - G_c}, \\ V_{max} &\approx 0,188 \cdot 10^{-2} \sqrt{G - G_c}, \\ Nu &\approx 1 + 3,090 \sqrt{G - G_c} + 1,180(G - G_c). \end{aligned} \quad (24)$$

С ростом числа Грасгофа увеличивается скорость вторичного течения, его температура и тепловой поток через границы.

В пределах $0 \leq Ta < 100$ характер возмущений скорости и температуры существенно не меняется.

Исследовалось суммарное движение, полученное путем наложения возмущений на основное движение. При $Ta = 1$ функция тока суммарного движения Ψ_{Σ} , которая вычисляется по формуле

$$\Psi_{\Sigma}(t, y, z) = - \int_{-1}^z v_0(\zeta) d\zeta + \Psi(t, y, z),$$

описывает движение двух встречных потоков, вблизи каждой твердой границы слоя формируется движущийся вихрь. Пара вихрей возникает за счет вторичного движения. При небольших закритических значениях числа Грасгофа они слабы. С ростом Gr их интенсивность возрастает и возникает система периодически движущихся четырех вихрей. Возмущение x -ой компоненты скорости в виде бегущих вдоль оси OY волн возрастает с ростом числа Грасгофа, однако остается незначительным, лишь слегка деформируя потоки, движущиеся вдоль оси абсцисс. Суммарная температура $T(t, x, y, z)$, исследованная при $x = 0$, незначительно отличается от $\theta(t, y, z)$ ввиду того, что возмущение температуры превосходит значение T_0 уже при малых закритичностях Gr .

Выводы

Вращение приводит к возникновению надкритических возмущений в виде нестационарных, винтообразных вихрей, расположенных в потенциально неустойчивых зонах температуры и движущихся периодически вдоль границ слоя. С ростом числа Тейлора эти вихри прижимаются к горизонтальным границам. Период повторения картины течения по времени обратно пропорционален числу Грасгофа.

Список литературы

- [1] Аристов С. Н., Зимин В. Д. Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: Препринт / АН СССР. Уральский научный центр. Ин-т механики сплошных сред. Свердловск, 1986.
- [2] Аристов С. Н., Фрик П. Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт ИМСС УрО АН СССР. Свердловск, 1987.
- [3] Аристов С. Н., Шварц К. Г. Об устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. №4. С. 3–11.
- [4] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
- [5] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
- [6] Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1990.
- [7] GERSHUNI G. Z., LAURE P., MYZNIKOV V. M., ROUX B., ZHUKHOVITSKY E. M. On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layer. *Microgravity Q.* 1992. Vol. 2, No. 3. P. 141–151.