

## БЕЗНАПОРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В. Н. Эмих

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: emikh@hydro.nsc.ru

На конкретных схемах иллюстрируется присущее многопараметрическим краевым задачам фильтрации со свободными границами разнообразие их физического содержания и излагается подход к их гидродинамическому анализу.

Труды российских ученых Н. Н. Павловского и Н. Е. Жуковского положили начало изучению фильтрации грунтовых вод со свободными границами в рамках смешанных краевых задач теории аналитических функций с широким использованием при решении задач методов конформных отображений. Актуальность таких исследований определялась запросами гидромелиорации, одной из проблем которой становится расчет фильтрационных течений при наличии горизонтального дренажа. На протяжении нескольких десятилетий математическое моделирование таких процессов ограничивалось построением решений соответствующих краевых задач и составлением систем уравнений относительно неизвестных параметров отображений; сама же специфика течений оставалась не изученной. Осуществляемые в лаборатории фильтрации СО РАН с 60-х гг. целенаправленные исследования в этом направлении позволили выработать новый подход к моделированию двумерных безнапорных фильтрационных течений и использовать его при решении ряда конкретных задач.

### 1. Дренаж в потоке грунтовых вод через завесу

Ключевую роль в раскрытии одной из существенных особенностей многопараметрических краевых задач фильтрации со свободными границами: разнообразия их физического содержания, — сыграла схема двумерной установившейся фильтрации в пласте, неограниченном по глубине и простирающемуся, при поступлении воды с земной поверхности, затопленной всюду, кроме полосы шириной  $2l$ , к одиночной трубчатой дрене (точечному стоку  $D$ ), заложенной в середине полосы (рис. 1). Первоначально на такой модели предполагалось выявить физические предпосылки своеобразного эффекта, обнаруженного ранее в более общих схемах: возникновения на свободной поверхности потока вторичной, локальной депрессии над дренажным стоком. Ее связь с определяющими физическими параметрами течения и, в первую очередь, с расходом дрены удалось наметить в этих задачах лишь ориентировочно посредством асимптотического анализа решений, но в схеме одиночной дрены она обозначилась совершенно отчетливо.

Решение соответствующей краевой задачи построено [1] путем конформного отображения на полуплоскость  $\text{Im}\zeta \geq 0$  (рис. 2) областей приведенного к коэффициенту фильтрации грунта комплексного потенциала течения  $\omega = \phi + i\psi$  ( $\phi$  — потенциал скорости фильтрации,  $\psi$  — функция тока) и функции Жуковского  $\theta = \omega + iz$  [2]. При этом для функций  $z = x + iy$  и  $\omega$  получены следующие зависимости:

$$z = \frac{2Q}{\pi} \left[ \left( \frac{a}{f} \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} - \arctg \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} \right) + i \operatorname{arth} \sqrt{1 - \zeta} \right],$$

$$\omega = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arth} \sqrt{1 - \zeta} + iQ.$$

Содержащиеся здесь неизвестные параметры отображения  $a$  и  $f$  связываются системой двух уравнений с входными геометрическими параметрами схемы  $l$  и  $d$  (рис. 1) и с фильтрационным расходом дрены  $Q$ , в непосредственной зависимости от которого выполнено исследование течения. Основное внимание при этом было уделено деформациям кривой депрессии  $AB$ , на которой выполняется равенство

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\pi f^2 \zeta (\zeta - r_1)(\zeta - r_2)}{aQ(\zeta - f)^2 \sqrt{(1 - \zeta)^2}}, \quad a \leq \zeta \leq 1, \quad (1)$$

$$r_{1,2} = \left( 1 + 3a \pm \sqrt{(1 - a)(1 + 8f - 9a)} \right) / 4.$$

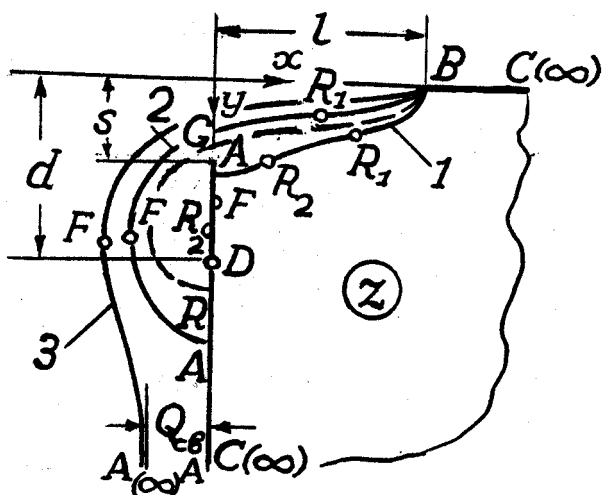


Рис. 1.



Рис. 2.

В ходе исследования выяснилось, что при  $l \geq \sqrt{8\beta}$  локальная депрессия, ограниченная справа точкой перегиба  $R_1$  кривой  $AB$ , формируется при сколь угодно малых значениях  $Q$ , иначе она возникает по достижении расходом некоторой величины. В обоих случаях с увеличением расхода впадина углубляется, а заключенный в ее пределах участок  $AR_2$  выполаживания кривой  $AB$  сокращается. В итоге локальная депрессия предстает как реакция на дренаж, крайнее проявление которой наступает по достижении расходом определенного значения  $Q_*$ . При этом в согласии с (1) имеем  $r_2 = f = a = a_*$  (рис. 2): точки  $R_2$  и  $F$  совмещаются с точкой  $A$ , которая превращается в точку заострения депрессионной кривой; значения  $Q_*$  и  $a_*$  определяются величинами  $l$  и  $\beta$ . Давление на всем участке  $AD$  становится отрицательным, и его дальнейшее сколь угодно малое понижение в результате превышения расходом дрены указанного критического значения  $Q_*$  должно привести к прорыву в нее атмосферного воздуха.

Таким образом, на схеме одиночной дрены подтвердилось предположение о дестабилизации свободной поверхности фильтрационного потока при интенсификации дренажа. Далее естественным образом возник вопрос о том, какие течения описывает краевая задача за рамками исходной схемы, ради которой она была сформулирована.

На продолжении решения задачи по параметру отображения  $a$  с его уменьшением в интервале  $(0, a_*)$  происходит трансформация течения: часть фильтрационного потока перетекает через вершину  $S$  вертикальной завесы, в которую превращается теперь участок  $AC$ , в полуплоскость  $x < 0$ , но затем вместе с остальными поступающими с поверхности грунтовыми водами поглощается стоком. При этом вершина завесы, отрываясь от кривой депрессии при  $a = a_*$ , вначале опускается до уровня стока, достигая его при некотором значении  $a = a_{**}$ , а с дальнейшим уменьшением параметра  $a$  в интервале  $(0, a_{**})$  поднимается до поверхности земли, полностью перекрывая при  $a = 0$  поступление грунтовых вод к дренажному стоку. Последний к тому же переходит при  $a = a_{**}$  с внутренней, обращенной к источнику поверхности завесы на внешнюю, так что при  $a \in (0, a_{**})$  дренируются уже исключительно грунтовые воды, перетекающие через завесу. Точка  $R_2$  — одна из точек перегиба кривой депрессии в исходной схеме — переходит на участок  $AC$  превращаясь там в точку минимума скорости, а точка  $F$ , которая была первоначально точкой максимума давления на отрезке  $AD$ , становится теперь крайней левой точкой кривой депрессии; последняя отмечена на рис. 1 цифрой 2.

Главная же особенность течений, описываемых решением задачи на его продолжении, при  $a \in (0, a_*)$  состоит в том, что  $dp/dy = \gamma$  в точке  $A$  и  $dp/dy > \gamma$  на остальной части участка  $AS$  (рис. 1): градиент гидродинамического давления  $p$  на этом участке, где вода движется вверх, преодолевает действие на нее силы тяжести, уравновешивая ее только в точке  $A$ . На ней одной фактически держится, как и в отмеченной выше предельной ситуации для основной схемы, динамическое равновесие потока с атмосферой, для нарушения которого достаточно сколь угодно малого превышения расхода дрены над соответствующим критическим его значением; последнее, как и ордината  $s$  вершины  $S$  завесы, определяется при заданном конкретном значении параметра  $a \in (0, a_*)$ . В силу такой гидродинамической неустойчивости обсуждаемые течения физически нереализуемы и образуют в совокупности лишь оболочку некоторого

процесса, войти в который можно лишь посредством расширения постановки исходной краевой задачи.

Отправным в такой расширенной модели является свободный (под действием силы тяжести) переток грунтовых вод с расходом  $Q_0$  через вертикальную завесу, правее которой по отношению к фильтрационному потоку действует, как и в предыдущей схеме, подпор снизу. Предположим, что на фоне указанного течения функционирует с интенсивностью  $Q$  дренажный сток, расположенный на поверхности завесы, остальная же часть потока  $Q$  по-прежнему уходит вниз. На рис. 1 цифрой 3 обозначена кривая депрессии такого потока, а внутренняя линия тока, разделяющая две его указанные составляющие, схематично изображена штриховой линией. С возрастанием расхода  $Q$  до некоторого значения  $Q_1$  дрена перехватит весь поток, и эта предельная ситуация описывается изложенной выше краевой задачей.

Зависимости для функций  $z$  и  $\omega$  в обсуждаемом течении таковы:

$$z = \frac{2Q}{\pi} \left( \frac{a}{f} \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} \right) - Q +$$

$$i \frac{2}{\pi} \left( Q \operatorname{arth} \sqrt{1 - \zeta} + Q \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 - a}} \right),$$

$$\omega = \frac{2}{\pi} \left( Q \operatorname{arth} \sqrt{1 - \zeta} + Q \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 - a}} \right) + i(Q + Q).$$

Конечной целью моделирования рассматриваемого процесса в прямой постановке является расчет его гидродинамических характеристик при конкретных значениях физических параметров, определяющих течение: ширины  $l$  незатопленной полосы земной поверхности, к которой отнесены все геометрические величины ( $l = 1$ ), ординат  $s$  и  $d$  вершины завесы  $S$  и расположенного на его поверхности дренажного стока  $D$  ( $s \leq d$ ), а также фильтрационного расхода стока  $Q \in (0, Q_1)$ . Неизвестные параметры отображения  $a, f, g$  и количество  $Q$  части потока, не захваченной стоком, связываются с перечисленными входными параметрами следующей системой уравнений:

$$Q \left( \frac{a}{f} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} \right) = \frac{\pi}{2} (1 + Q),$$

$$Q \left( \frac{a}{f} - \ln \sqrt{a} \right) + Q \operatorname{arth} \sqrt{1 - a} = \frac{\pi}{2} d, \quad (2)$$

$$Q \left( \frac{a}{f} \sqrt{1 - g/a} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - g}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - g}} \right) + Q \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - a}{1 - g}} = \frac{\pi}{2} s,$$

$$f(r - g)\sqrt{a} = r(f - g)\sqrt{(a - g)(1 - g)} \quad \left( r = \frac{aQ}{Q + Q\sqrt{1 - a}} \right).$$

Последнее уравнение системы выражает обращение в бесконечность скорости фильтрации на вершине завесы. Содержащийся в нем параметр  $r$  является аффиксом точки  $R$  разветвления потоков на участке  $AD$  поверхности завесы и может быть исключен из системы.

В разработанном вычислительном алгоритме решение системы (2) сводится к нахождению из третьего уравнения системы параметра  $a \in (a_1, a_0)$ , сложной функцией которого можно представить левую часть этого уравнения после исключения из нее величины  $Q$  и параметра  $f$  с использованием первого и второго, а параметра  $g$  — четвертого уравнений системы. Численно устанавливается монотонность указанной функции, обеспечивающая единственность искомого решения в указанном интервале, границы которого  $a_1$  и  $a_0$  являются значениями параметра  $a$  соответственно при поглощении дренаем всего потока и при отсутствии дренажа. Эти значения и максимально допустимая интенсивность дренажа  $Q_1$  предвычисляются на основе зависимостей, полученных ранее [1] для схем, предельных по отношению к рассматриваемой. При расположении стока на внутренней поверхности завесы полное поглощение им потока возможно в рамках исходной фильтрационной схемы, сам же дренаж может играть заметную роль в формировании течения. В противоположном случае полный перехват потока заведомо осуществляется в критическом режиме дренирования, а сток в той или иной степени (в зависимости от глубины его заложения) экранируется завесой от поверхностного источника грунтовых вод, и его влияние на фильтрационные характеристики потока ослабевает.

## 2. О подходе к исследованию безнапорных течений

Описанная краевая задача способствовала выяснению некоторых принципиальных особенностей математических моделей фильтрации со свободными границами и формированию подхода к их исследованию, подробно изложенного и проиллюстрированного на конкретных задачах в монографии [2]. Отметим его основные аспекты.

Аппарат конформных отображений, используемый при решении краевых задач безнапорной фильтрации, хорошо разработан, и построение решений таких задач является лишь начальным этапом исследований, хотя и он в отдельных случаях может потребовать усилий. В самой же краевой задаче ключевыми являются предельные ситуации: окаймляя моделируемый фильтрационный процесс, они обозначают диапазоны изменения входных физических параметров и должны поэтому рассчитываться в первую очередь. Что же касается основной фильтрационной схемы, ради которой сформулирована задача, то ее полноценное исследование возможно лишь на базе прямой физической постановки — с ориентацией на анализ структуры течений и их характеристик в непосредственной зависимости от факторов, их определяющих. Но такая постановка связана с проблемой нахождения неизвестных параметров отображения, как раз и оставшейся до некоторого времени главным препятствием на пути развития гидродинамической теории фильтрации. Возможности для его преодоления открылись благодаря применению современных вычислительных средств в сочетании с классическими методами математического анализа.

За рамками ограничений, определяющих изучаемую схему течения, последняя может трансформироваться в другие, также возможные с физической точки зрения. Подобная трансформация описана в [2] для одной из задач дренажа почвенного слоя с инфильтрацией на свободную поверхность потока: при определенном возрастании интенсивности инфильтрации свободная поверхность выходит на поверхность земли в окрестности источника, и последний на некотором своем протяжении уже поглощает поток — в дополнение к дренажу, действующему изначально. На примере изложенной выше модели было выяснено, что именно этот дренаж может привести в конечном итоге к дестабилизации свободных границ, и вопрос об ограничениях на его интенсивность требует поэтому основного внимания.

Такая регламентация стала узловой в задаче о фильтрации в кайме пресных вод над солеными грунтовыми водами, первоначально залегающими на глубине  $H_0$  из периодически расположенных каналов ширины  $2l$  к заложенным посредине между ними на одинаковой глубине  $\beta$  и расстоянии друг от друга  $2L$  равнодебитным горизонтальным дренам. Полупериод каймы представлен на рис. 3 в качестве области фильтрации. Соответствующая краевая задача заключается в нахождении зависимости  $\omega(z)$  при граничных условиях

$$\begin{aligned} GE : y = 0, \phi = 0; \quad AB : x = 0, \psi = Q; \\ BC : x = 0, \psi = 0; \quad ED : x = L, \psi = 0; \\ AG : \phi - y = 0, \psi = Q; \quad CD : \phi + \rho y = C, \psi = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$  ( $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности пресных и соленых вод). Первое краевое условие на линии  $CD$  установлено П. Я. Кочиной [3] как следствие неподвижности соленых вод и непрерывности давления при переходе через указанную линию. Посредством отображения областей функции комплексного потенциала  $\omega$  и двулистной области функции  $1/w$  (инверсии годографа скорости фильтрации  $\bar{w} = w_x + i w_y$ ) на полуплоскость  $\text{Im}\zeta \geq 0$  (рис. 4) получено [4] следующее представление решения сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} z(\zeta) = z(\zeta_0) + \frac{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}{w(\zeta_0)} + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d}{du} \left( \frac{1}{w(u)} \right) (\omega(\zeta) - \omega(u)) du, \\ \omega(\zeta) = \frac{2Q}{\pi} \text{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\zeta)}{(1-g)(b+\zeta)}} + iQ, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{w(\zeta)} = \frac{dz}{d\omega} = \frac{M}{2} \int_{\zeta}^g \frac{P(u) du}{\sqrt{u^3(g-u)(d-u)^3}} + i = -M \frac{(f+\zeta)\sqrt{g-\zeta}}{\sqrt{\zeta(d-\zeta)}} - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2K}{\pi} Z(\alpha, k) + i, \quad M > 0.$$

Здесь

$$P(u) = u^3 - c_1 u^2 + c_2 u - c_3; \quad c_1 = 2d + f + aE,$$

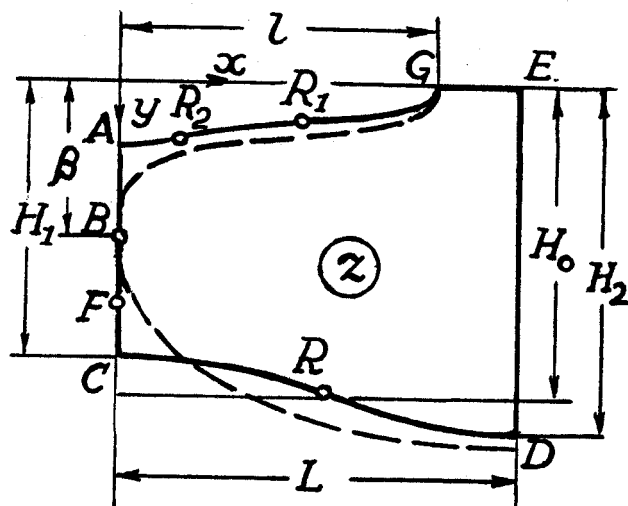


Рис. 3.

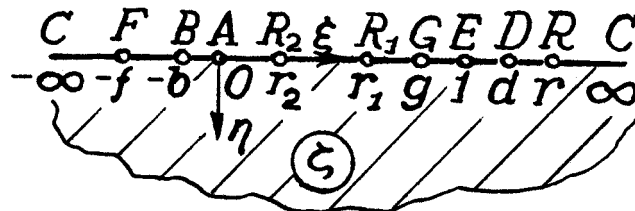


Рис. 4.

$$c_2 = g(d + 2f + a\Phi), \quad c_3 = dfg, \quad a = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2\sqrt{d}}{\pi M},$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{(1 - \zeta/g)(1 - \zeta/d)}, \quad k = \sqrt{g/d}.$$

Кроме того, используются стандартные обозначения эллиптических интегралов и функций  $K$ ,  $E$ ,  $\Phi$ ,  $Z$  [5]. Выражение для  $M$  получается из условия  $(1/w)|_{\zeta=-b} = 0$ .

При интерпретации дренажных стоков как водозаборов пресных вод их дебит  $Q$  (в расчете на рассматриваемую область течения) в прямой постановке подлежит заданию наряду с вышеперечисленными геометрическими параметрами схемы (рис. 3). Конечной же целью решения задачи является расчет положения его свободных границ: кривой депрессии  $AG$  и линии раздела  $CD$ .

Что касается величины  $Q$ , то при решении вопроса о ее допустимых значениях здесь приходится считаться с возможностью прорыва в водозаборы как атмосферного воздуха, так и соленых вод. Сложность заключается в том, что заранее неизвестно, какая из свободных границ раньше отреагирует на увеличение отбора.

В результате детального анализа задачи выявлен в качестве стержневого специфический для этого типа течений *двойной критический режим*, который проявляется при определенном значении  $\beta_*$  глубины стока  $B$  и его расхода  $Q_*$  (с фиксированием прочих входных физических параметров) на грани дестабилизации обеих свободных границ с превращением их точек  $A$  и  $C$  в точки заострения. Величина  $Q_*$  оказывается максимально возможной продуктивностью водозабора; сама же кайма, свободные границы которой в этом случае обозначены на рис. 3 штриховыми линиями, имеет минимальные размеры. Далее устанавливается, что если фактическая глубина  $\beta$  водозаборного стока удовлетворяет соотношениям  $0 < \beta < \beta_*$ , то при определенном значении его расхода  $Q^{(1)}(\beta)$  возникает отмеченный в п. 1 критический режим на кривой депрессии; в альтернативном же случае, при  $\beta_* < \beta < H_0$  ( $H_0$  — начальная глубина залегания соленых вод) при некотором значении  $Q = Q^{(2)}(\beta)$  течение в кайме выходит на критический режим, связанный с границей раздела. В краевой задаче этим *простым критическим режимам* соответствуют предельные случаи  $f = 0$  и  $f = \infty$ .

В статье [4] содержится полное исследование течения в прямой физической постановке с нахождением неизвестных параметров отображения. В каждом конкретном варианте при заданных физических параметрах  $L, \rho$  и  $H_0$  на первом этапе осуществляется расчет двойного критического режима, в котором неизвестными являются параметры  $d$  и  $g$ . В рассчитываемом затем простом критическом режиме к ним добавляется параметр  $b$ , а в общем случае — также параметр  $f$ . Относительно них на каждом из этапов с использованием приведенных выше аналитических зависимостей составляются системы трансцендентных уравнений, для решения которых разработаны и реализованы в компьютерной программе циклические процедуры. Разрешимость каждого из уравнений относительно параметра, вычисляемого из него в том или ином цикле при фиксировании остальных параметров, обеспечивается монотонностью соответствующей функции; установить же такое поведение функций удастся из-за их сложности только численно. Само решение уравнений производится по стандартизированному алгоритму с интерполированием.

Особого внимания требуют содержащиеся в функциональных зависимостях несобственные интегралы, каждый из которых преобразуется к расчетному виду надлежащей заменой переменной интегрирования, а затем вычисляется по стандартной программе, основанной на формуле Симпсона. Для вычисления эллиптических интегралов и функций используются экономичные алгоритмы, описанные в работах [6].

В дальнейшем была исследована структура фильтрационных схем, возникающих при продолжении решения обсуждаемой задачи по параметру  $f$  за рамки обоих критических режимов дренирования; две такие схемы представлены по результатам числовых расчетов в статье [7]. Как и в изложенной выше задаче о фильтрации к одиночной дрене, трансформированные течения здесь также лишены физического содержания из-за их гидродинамической неустойчивости.

## Список литературы

- [1] Эмих В. Н. О нескольких гидродинамических моделях дренажа. ПММ. 1979. Т. 43, вып. 6. С. 1046–1057.
- [2] Эмих В. Н. Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука, 1993. 213 с.
- [3] Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
- [4] Эмих В. Н. Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и ее приложения // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 494–503.
- [5] BYRD P. F., FRIEDMAN M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer Verl., 1971. 358 p.
- [6] BULIRSCH R. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions // Num. Math. 1965. Vol. 7. P. 78–90, 353–354; 1969. Vol. 13. P. 305–315.
- [7] Эмих В. Н. Критические режимы безнапорных фильтрационных течений с дренажем // Математические модели фильтрации и их приложения (сборник научных трудов). Новосибирск: Изд-во СО РАН. 1999. С. 189–201.