ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

С.М. Аульченко, А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: latypov@itam.nsc.ru

Предлагается семейство методов, основанное на представлении функций правых частей локальными параметрическими полиномами, для решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод позволяет в процессе решения вычислять локальную и глобальную погрешность решения, интегрируя систему уравнений в вариациях. Доказана A- и L-устойчивость при определенных значениях параметров На примерах решения ряда известных тестовых задач приведены оценки локальной и глобальной погрешностей и сравнения с некоторыми известными методами в авторской реализации.

Исходные соотношения

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_K]$ задана в K упорядоченных по возрастанию аргумента точках x_1, x_2, … , x_K вместе со своими производными до порядков L_i, i=1, 2, …, K включительно. Обозначим производные функции $f(x)$ в заданных точках через $f_i^{(j)}$, $j=0,1,...,L_i$, так что $f_i^{(0)}=f(x_i)$, $f_i^{(j)}=d^j f(x_i)/dx^j$ Рассмотрим сегмент $X_i=[x_i, x_{i+1}]$ и обозначим $L = L_i$, $R = L_{i+1}$. Предполагая функцию $f(x)$ на всем отрезке $[x_1, x_K]$ гладкой до степени $M=\max(L_i+L_{i+1})+2,\ i=\overline{1,K}$ представим ее на сегментах X_i, i=1, 2, … , K–1 полиномами следующего вида:

$$\tilde{f}_i(x)=(1-\xi)^{R+1}\sum_{k=0}^{L}a_{ki}\xi^k+\xi^{L+1}\sum_{m=0}^{R}b_{mi}(1-\xi)^k, \\ \xi=(x-x_i)/h_i,\ h_i=x_{i+1}-x_i. \tag{1}$$

Коэффициенты полиномов (1) определим по заданным значениям функции $f(x)$ и ее производных соответственно для первой суммы в точке x_i и для второй суммы – в точке x_{i+1}, что легко позволяет сделать выбранная форма записи (1). Получим следующие соотношения:

$$a_{ki}=\sum_{j=0}^{k}\bar{f}_i^{(j)}C_{R+k-j}^{R}/j!,\quad b_{mi}=\sum_{j=0}^{m}\bar{f}_{i+1}^{(j)}(-1)^j C_{L+k-j}^{L}/j!,\quad k=\overline{0,L},\quad m=\overline{0,R}, \\ \bar{f}_i^{(j)}=h^j d^j f(x_i)/dx^j,\quad C_i^j=\frac{i!}{j!(i-j)!},\qquad i=\overline{1,K-1}. \tag{2}$$

Полиномы (1) с использованием для коэффициентов формул (2) можно записать в виде

$$\tilde{f}(x)=\sum_{k=0}^{L}\bar{f}_i^{(k)}\psi_k(\xi)+\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\bar{f}_{i+1}^{(m)}\chi_m(\xi),\quad \xi\in[0,1], \tag{3}$$

где

$$\psi_k(\xi)=\frac{1}{k!}\left[(1-\xi)^{R+1}\sum_{j=0}^{L-k}C_{R+j}^{R}\xi^{k+j}\right],\qquad k=\overline{0,L}, \\ \chi_m(\xi)=\frac{1}{m!}\left[\xi^{L+1}\sum_{j=0}^{R-m}C_{L+j}^{L}(1-\xi)^{m+j}\right],\quad m=\overline{0,R},\quad \xi\in[0,1]. \tag{4}$$

Обозначим Q=L+R+2 и приведем необходимые в дальнейшем соотношения для определенных интегралов этих

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00564.

функций.

$$I_k(\xi)=\int_0^{\xi}\psi_k(\xi)\,d\xi=\frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{R}\frac{\xi^{L+2+j}}{(L+2+j)}p_{j,k},$$
$$J_m(\xi)=\int_0^{\xi}\chi_m(\xi)\,d\xi=\frac{1-(1-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}-\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{L}\frac{1-(1-\xi)^{R+2+j}}{(R+2+j)}q_{j,\,m}, \tag{5}$$

$$I_k(1)=\frac{C_{L+1}^{k+1}}{C_Q^{k+1}(k+1)!},\quad J_m(1)=\frac{C_{R+1}^{m+1}}{C_Q^{m+1}(m+1)!},\quad k=\overline{0,L},\quad m=\overline{0,R}. \tag{6}$$

Полиномы (3) представляют собой интерполирующие полиномы Эрмита, записанные в удобной для практического использования форме. Очевидно, представление (3) обладает гладкостью до степени $L_m=\min(L_i),\quad i=\overline{1,K}$ на всем отрезке $[x_1, x_K]$. Остаточный член полинома (3) на i-м интервале, согласно [1], записывается соотношением

$$f(x)-\widetilde{f}(x)=(1-\xi)^{R+1}\,\xi^{L+1}\,\frac{f^{(Q)}(\xi)\,h^Q}{Q!},\quad \xi\in[0,\,1]. \tag{7}$$

Используем соотношение (7) для получения верхней оценки точности представления (3). Заметим, что

$$\max_{\xi\in[0,1]}(1-\xi)^{R+1}\,\xi^{L+1}=\frac{(L+1)^{R+1}\cdot(R+1)^{L+1}}{Q^Q}.$$

Тогда

$$\delta_i=\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f(x)-\widetilde{f}(x)\right|\le\frac{(L+1)^{R+1}(R+1)^{L+1}h^Q\,d_Q}{Q^Q\,Q!},\quad d_Q=\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f^{(Q)}(x)\right|. \tag{8}$$

Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть дана задача Коши для решения системы n обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\mathbf{y}'(x)=\mathbf{f}(\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0,\quad x\in[0,X].$$

Рассмотрим решение системы на одном шаге величины $h<X$, $x\in[x_j, x_j+h]$. Представим систему на шаге h в виде

$$d\mathbf{y}/d\xi=h\,\mathbf{f}(\mathbf{y})\equiv\mathbf{\Phi}(\xi),\qquad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0,\quad \xi\in[0,1]. \tag{9}$$

Зададим две целые величины L и R. Предполагая, что существует единственное решение и функции правых частей уравнений (9) на решении имеют порядок гладкости по $\mathbf{y}$ не ниже $Q = L+R+2$, представим их на шаге h в форме (1):

$$\tilde{\Phi}_i(\xi)=(1-\xi)^{R+1}\sum_{k=0}^{L}a_{k\,i}\xi^k+\xi^{L+1}\sum_{k=0}^{R}b_{k\,i}(1-\xi)^k+2^Q(1-\xi)^{L+1}\xi^{R+1}c_i,$$
$$\xi=x/h,\ i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Коэффициенты полиномов при двух первых членах (10) определяются по заданным значениям функции $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{y}(x))$ и ее производных соответственно для первой суммы в точке $x = x_j$ ($\xi = 0$) и для второй суммы – в точке $x = x_j+h$ ($\xi = 1$) и, значит, они удовлетворяют соотношениям (2).

Коэффициенты при третьем члене суммы (10) определим из значения функций правых частей системы (10) в середине отрезка $[0,\ h]$. Полиномы (10), следовательно, запишутся аналогично соотношениям (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}(\xi)=\sum_{k=0}^{L}\Phi_0^{(k)}\ \psi_k(\xi)+\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\Phi_1^{(m)}\ \chi_m(\xi)+2^Q(1-\xi)^{R+1}\xi^{L+1}\mathbf{c},\\ &\mathbf{c}=\Phi_{1/2}-\sum_{k=0}^{L}\psi_k(1/2)\Phi_0^{(k)}-\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\chi_m(1/2)\Phi_1^{(m)}.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь и дальше нижний индекс указывает на значение переменной; напомним также, что $\mathbf{\Phi^{(k)}}(\xi)=h\bar{\mathbf{f}}^{(k)}(x_j+h\xi)$, $\mathbf{\Phi}'(\xi)=\mathbf{\Phi}^{(1)}(\xi)$, надчерк – в соответствии с обозначениями в (2). Проинтегрировав полиномы (11) на отрезках [0, 1], [0, 1/2], получим следующую неявную систему $2n$ алгебраических уравнений для определения решений в точках ξ=1/2 и ξ=1:

$$\begin{cases}\widetilde{\mathbf{y}}(1)=\mathbf{y}_0+P(1)\ \Phi_{1/2}+\sum\limits_{k=0}^{L}\gamma_k(1)\Phi_0^{(k)}+\sum\limits_{m=0}^{R}(-1)^m\eta_m(1)\Phi_1^{(m)},\\ \widetilde{\mathbf{y}}(1/2)=\mathbf{y}_0+P(1/2)\ \Phi_{1/2}+\sum\limits_{k=0}^{L}\gamma_k(1/2)\Phi_0^{(k)}+\sum\limits_{m=0}^{R}(-1)^m\eta_m(1/2)\Phi_1^{(m)},\end{cases}\tag{12}$$

где

$$\gamma_k(\xi)=I_k(\xi)-P(\xi)\psi_k(1/2),\quad \eta_m(\xi)=J_m(\xi)-P(\xi)\chi_m(1/2),$$

$$P(\xi)=2^Q\alpha_{L+1,R+1}(\xi),\quad \alpha_{m.n}(\xi)=\int_0^{\xi}\xi^m(1-\xi)^n\,d\xi=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^jC_n^j}{(m+1+j)}\xi^{m+1+j},$$

$$\alpha_{L+1,R+1}(1)=\frac{1}{(L+2)C_{Q+1}^{R+1}}.$$

Метод решения задачи Коши для систем ОДУ, основанный на пошаговом решении систем алгебраических уравнений (12), назван *LRM*-методом.

В работе [5] приводится метод, названный *LR*-методом, в котором при представлении функций правых частей системы (9) используются полиномы (10) без третьего члена. Как показано в [2], введение третьего члена значительно увеличило эффективность и удобство практического применения получаемого таким образом метода.

Представление в форме (11) является интерполяционным многочленом Эрмита по трем точкам, для которого в принятых в [1] обозначениях $\alpha_0=L+1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=R+1$ и формула для вычисления погрешности имеет вид

$$\widetilde{\Phi}(\xi)-\Phi(\xi)=\frac{\Phi^{(Q+1)}(\theta\xi)}{(Q+1)!}\xi^{L+1}(\xi-1)^{R+1}(\xi-1/2),\quad \theta\in(0,1).\tag{13}$$

Для оценки ошибки решения на шаге h

$$\delta\mathbf{y}(h)=\left|\widetilde{\mathbf{y}}(h)-\mathbf{y}(h)\right|=\int_0^1[\widetilde{\Phi}(\xi)-\Phi(\xi)]d\xi\ ,\tag{14}$$

учитывая малость величины шага интегрирования, положим

$$\Phi^{(Q+1)}(\theta(\xi))=\Phi^{(Q+1)}(0)+\theta\Phi^{(Q+2)}(0)\xi+o(\xi).$$

Проведя интегрирование в (14), получим оценку локальной погрешности решения на шаге h:

$$\left|\mathbf{y}(h)-\widetilde{\mathbf{y}}(h)\right|\sim h^{Q+3}.\tag{15}$$

Для линейных систем ОДУ вида

$$\mathbf{y}'=A\mathbf{y}+\mathbf{b},\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0,\ x\in[0,X]\tag{16}$$

с заданной матрицей A и векторами $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{b}$ производные вычисляются по формулам

$$\mathbf{y}^{(k)}=A^k\,\mathbf{y}+A^{k-1}\,\mathbf{b}.\tag{17}$$

Подставив (17) в (12), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения решения в точках $x = h$ и $x = h/2$.

$$\begin{aligned}
&\left[E-\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\eta_m(1)\bar{A}^{m+1}\right]\tilde{\mathbf{y}}(h)-P(1)\bar{A}\,\tilde{\mathbf{y}}(h/2)=\\
&\left[E+\sum_{k=0}^{L}\gamma_k(1)\bar{A}^{k+1}\right]\mathbf{y}_0+\left[P(1)+\sum_{k=0}^{L}\gamma_k(1)\bar{A}^{k}+\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\eta_m(1)\bar{A}^{m}\right]\mathbf{b},\\
&\left[\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\eta_m(1/2)\bar{A}^{m+1}\right]\tilde{\mathbf{y}}(h)+\left[E-P(1/2)\bar{A}\right]\tilde{\mathbf{y}}(h/2)=\\
&\left[E+\sum_{k=0}^{L}\gamma_k(1/2)\bar{A}^{k+1}\right]\mathbf{y}_0+\\
&\left[P(1/2)+\sum_{k=0}^{L}\gamma_k(1/2)\bar{A}^{k}+\sum_{m=0}^{R}(-1)^m\eta_m(1/2)\bar{A}^{m}\right]\mathbf{b}.
\end{aligned}\tag{18}$$

Здесь E – единичная матрица. Особенностью системы (18) является то, что матрицы-коэффициенты перед неизвестными и правые части зависят только от h и, значит, в процедуре решения на отрезке $[0, X]$ с постоянным шагом не нужно пересчитывать эти величины на каждом шаге.

Показано, что при $R \geq L$ *LRM*-метод A-устойчив в смысле [3], при $R > L$ — L-устойчив.

Множество значений параметров L и R в описанном подходе порождают семейство *LRM*-методов решения задачи Коши для систем ОДУ. Так, в [2] описывается разработанный авторами настоящей статьи эффективный вариант *LRM*-метода для $L = R = 1$ Основным затруднением при использовании *LRM*-метода является расчет производных для функций правых частей системы (9). Для функций правых частей системы (9), представимых «аналитически» – в виде конечной последовательности алгебраических операций над множеством аналитических функций – можно воспользоваться методом аналитических преобразований

Опишем еще один метод из рассматриваемого семейства, названный *LRMD*-методом, имеющий 7-й порядок точности по шагу h и обладающий свойствами A- и L-устойчивости, основанный на следующем одношаговом алгоритме. Представим функции правых частей системы (9) полиномами аналогично (10) со значениями $L=R=1$ и с добавлением еще одного члена:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi)&=(1-\xi)^2(\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1\xi)+\xi^2[\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1(1-\xi)]+\\
&+(1-\xi)^2\xi^2[\mathbf{c}_{1/2}(1-\zeta)+\mathbf{c}_*\zeta],\quad \zeta=(1/2-\xi)/(1/2-\xi_*),\ \ \xi_*=1-\Delta.
\end{aligned}\tag{19}$$

Коэффициенты представления (19) определяются аналогично (10) из значений функций правых частей системы (9) в соответствующих точках. Получим следующие соотношения для определения коэффициентов (19):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_0=\mathbf{\Phi}_0,\ \ \mathbf{a}_1=2\mathbf{\Phi}_0+\mathbf{\Phi}_0',\ \ \mathbf{b}_0=\mathbf{\Phi}_1,\ \ \mathbf{b}_1=2\mathbf{\Phi}_1-\mathbf{\Phi}_1',\\
&\mathbf{c}_{1/2}=16\mathbf{\Phi}_{1/2}-8(\mathbf{\Phi}_0+\mathbf{\Phi}_1)+2(\mathbf{\Phi}_1'-\mathbf{\Phi}_0'),\\
&\mathbf{c}_*=\frac{(3-2\Delta)(\mathbf{\Phi}_1-\mathbf{\Phi}_0)+(\Delta-2)\mathbf{\Phi}_1'}{(1-\Delta)^2}-\frac{\mathbf{\Phi}_0'}{(1-\Delta)}+\frac{\mathbf{\Phi}_*-\mathbf{\Phi}_1+\Delta\mathbf{\Phi}_1'}{\Delta^2}.
\end{aligned}\tag{20}$$

Поскольку $\mathbf{\Phi}_*(1-)=\mathbf{\Phi}_1-\mathbf{\Phi}_1'\,\Delta+0.5\,\mathbf{\Phi}_1^{(2)}\,\Delta^2+o(\Delta^2)$,

$$\lim_{\Delta\to 0}\mathbf{c}_*=3(\mathbf{\Phi}_1-\mathbf{\Phi}_0)-\mathbf{\Phi}_0'-2\mathbf{\Phi}_1'+\mathbf{\Phi}_1^{(2)}/2.$$

Проинтегрируем систему (9) с функциями правых частей (19) в пределах от 0 до 1/2, от 0 до 1 и от 0 до 1–Δ. Получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}}(x_0+h/2)&=\mathbf{y}_0+(7/24)\mathbf{a}_0+(11/192)\mathbf{a}_1+(1/24)\mathbf{b}_0+(5/192)\mathbf{b}_1+\\
&+\frac{5-16\Delta}{1920(1-2\Delta)}\mathbf{c}+\frac{7}{960(1-2\Delta)}\mathbf{c}_*,\\
\tilde{\mathbf{y}}(x_{0|}+h)&=\mathbf{y}_0+(1/3)(\mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0)+(1/12)(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)+(1/30)\,\mathbf{c},\\
\tilde{\mathbf{y}}(x_0+h-\Delta)&=\mathbf{y}_0+\alpha_{02}(\xi_*)\mathbf{a}_0+\alpha_{12}(\xi_*)\mathbf{a}_1+\alpha_{20}(\xi_*)\mathbf{b}_0+\alpha_{21}(\xi_*)\mathbf{b}_1+\\
&+\alpha_{22}(\xi_*)\mathbf{c}+(\alpha_{32}(\xi_*)-\alpha_{22}(\xi_*)/2)(\mathbf{c}_*-\mathbf{c})/(\xi_*-1/2).
\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь обозначения те же, что в (12).

Для решения системы алгебраических уравнений (20), (21) применяется метод простых итераций, сходимость которого обеспечивается выбором значения шага интегрирования h [4]. Для определения первого приближения к решению воспользуемся *LRM*-методом со значениями параметров $L=R=0$. Система уравнений (12) при этом будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{1/2}) &= \mathbf{y_0} + (5/24)\cdot\mathbf{\Phi}_0 + (1/3)\cdot\mathbf{\Phi}_{1/2} + (-1/24)\cdot\mathbf{\Phi}_1,\\ \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{1}) &= \mathbf{y_0} + (1/6)\cdot\mathbf{\Phi}_0 + (2/3)\cdot\mathbf{\Phi}_{1/2} + (1/6)\cdot\mathbf{\Phi}_1.\end{aligned} \qquad (22)$$

Система уравнений (22) решается методом Ньютона; получаемое решение, согласно (15), имеет погрешность 5-го порядка, что является достаточно хорошим приближением к решению $\tilde{\mathbf{y}}(\xi)$. Локальная и глобальная ошибки вычисляется так же, как в [2]

Показано, что по сравнению с вариантом *LRM*-метода [2] *LRMD*-метод обладает также *L*-устойчивостью.

Для тестовых расчетов были взяты пять систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенных в [2]. Результаты расчетов приведены в таблице. Расчеты проводились следующими методами:

— стандартный метод Рунге – Кутты (Ст. Р – К), взятый для демонстрации преимуществ неявных схем и для сравнения решений слабо жестких систем (пример 4);

— разновидность LRM-метода, опубликованная в [2] (LRM);

— LRMD-метод (LRMD);

— программный пакет, реализующий метод Гира (Gear);

— неявный метод Рунге – Кутты 5-го порядка (Rk5).

Задача	Метод	$H_{\min}$	$h_{\max}$	$K_{общ}$	$K_{усп}$	$K_{яправ}$	$K_{якоб}$	E_{lock}	E_{glob}
1	Ст. Р—К	0.00011	0.002	6441	3147	64116	—	1.00E–06	3.91E–09
	LRM	0.0008	1.147	11	10	35	33	1.00E–06	2.06E–08
	LRMD	0.0008	1.616	10	10	31	31	1.00E–06	1.67E–09
	Gear	—	—	—	—	339	90	1.00E–07	1.00E–06
	Rk5	0.00017	1.27	11	11	53	1	1.00E–07	1.00E–09
2	Ст. Р—К	0.00003	0.003	8839	6538	88864	—	1.00E–06	5.75E–10
	LRM	0.001	0.592	39	24	754	751	1.00E–06	6.66E–06
	LRMD	0.001	2.147	22	15	103	103	1.00E–07	3.14E–09
	Gear	—	—	—	—	1166	180	1.00E–07	1.00E–08
	Rk5	0.0001	0.1	70	64	86	51	1.00E–07	1.00E–07
3	Ст. Р—К	0.00175	0.19	12600	7526	130904	—	1.00E–07	4.70E–07
	LRM	0.014	68.85	40	27	882	879	1.00E–05	3.40E–07
	LRMD	0.00982	84.84	39	30	221	221	1.00E–05	2.06E–08
	Gear	—	—	—	—	3011	3011	1.00E–10	—
	Rk5	0.001	11.65	345	202	2405	2405	1.00E–07	1.00E–07
4	Ст. Р—К	0.00021	0.180	226	172	2496	—	1.00E–07	7.30E–04
	LRM	0.001	1.054	77	49	1087	1085	1.00E–06	1.05E–04
	LRMD	0.00071	1.057	87	69	202	202	1.00E–05	1.00E–07
	Gear	—	—	—	—	3294	512	1.00E–09	—
	Rk5	0.00014	0.22	254	254	2405	252	1.00E–07	1.00E–04
5	Ст. Р—К	0.00033	0.072	491	440	5688	—	1.00E–05	2.21E–07
	LRM	0.009	4.541	8	8	202	199	1.00E–05	6.47E–09
	LRMD	0.009	4.995	9	9	192	192	1.00E–04	2.07E–09
	Gear		—	—	—	4227	708	1.00E–08	5.56E–06
	Rk5	0.00035	29.90	23	13	130	17	1.00E–08	1.01E–07

В колонках таблицы представлены соответственно номер задачи, метод, полученные в процессе решения минимальный и максимальный шаг интегрирования, число шагов интегрирования, число шагов интегрирования, удовлетворивших требованию точности (успешных шагов), число вычислений правых частей системы, число вычислений якобианов правых частей системы, задаваемая локальная точность и получаемая глобальная (относительная) точность, которая рассчитывалась по известному точному решению.

Список литературы

[1] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. М.: Наука, 1970.

[2] **Аульченко С.М., Латыпов А.Ф. Никуличев Ю.В.** Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1665-1670.

[3] **Dahlquist G.** A special stability problem for linear multistep methods // BIT. 1963. V. 3. P. 27-43.

[4] **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.

[5] **Никуличев Ю.**В. Численный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе аналитического дифференцирования функций на ЭВМ // Числ. методы механики сплошной среды. 1980. Т. 11, № 1.