

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ СДВИГОВ

О. П. БУШМАНОВА

*Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия*

e-mail: bush@math.dcn-asu.ru

A finite element method for the numerical simulation of shear bands is used. Shear bands by a set of curvilinear slits on the finite element mesh are represented. The strong discontinuity approach by means of various conditions is possible.

Образование поверхностей или линий локализации сдвигов при определенных условиях можно наблюдать в металлах, горных породах, грунтах и сыпучих средах. При изучении данной проблемы используются различные подходы (см., например, [8, 7, 11, 13]).

Исследование процесса локализации сдвигов на различных масштабных уровнях предполагает рассмотрение систем, содержащих большое число линий сдвига. В свою очередь, экспериментальные данные позволяют предполагать, что ширина линий сдвига достаточно мала для того, чтобы их моделировать сдвиговыми трещинами [6, 9]. Для численного решения в этом случае удобно использовать метод конечных элементов [5, 1, 3, 12].

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в плоской области с системой разрезов, представляющих собой линии сдвига. Предположим, что разрезы расположены вдоль линий сетки конечных элементов. Основные возможности и особенности предлагаемого алгоритма состоят в следующем.

1. Первоначальное разбиение области на конечные элементы осуществляется автоматически, на основе существующих экспериментальных данных и аналитических исследований о расположении линий локализации для каждой конкретной задачи. Одно из семейств линий сетки конечных элементов строится максимально приближенным по форме и направлению к семейству линий локализации. При решении задачи с учетом критерия распространения линий и условий на линиях сетка может корректироваться.

2. Существенной особенностью начальной сетки конечных элементов является то, что все ее узлы — двойные. Это позволяет располагать на ней разрезы не только вдоль любого семейства, но и одновременно вдоль нескольких семейств линий сетки. Нумерация узлов на сетке оптимизируется с целью уменьшения объема используемых в программе структур данных, при этом учитывается расположение разрезов. Расстояния между разрезами ограничивается снизу только размерами элементов. Поэтому, как число линий сдвига, так и расстояние между ними в системе может быть произвольным.

3. Краевые задачи решаются в приращениях, методом последовательных нагружений. Локализация сдвигов на рассматриваемой системе линий реализуется посредством различных условий на линиях. Поведение материала вне линий может описываться также различными моделями. Это позволяет на основе численного анализа обосновать применение тех или иных моделей, критериев возникновения линий локализации и условий вдоль самих линий для каждой конкретной задачи.

4. Существующие стандартные пакеты программ на основе метода конечных элементов не позволяют решать задачи с большим числом криволинейных линий сильного разрыва перемещений. Поэтому, для численного решения разработан пакет программ на языке Fortran. Пакет включает в себя программы генерации сеток, обладающих указанными свойствами, построения матриц жесткости для различных моделей, реализации условий на разрезах, благодаря которым внутри непрерывной области могут возникать разрывы, а также программы получения полей перемещений и напряжений и визуализации картины деформирования.

Предположим, что в исследуемой области определено положение линии локализации сдвига для данного этапа нагружения. Будем считать, что линия принадлежит сетке конечных элементов и имеет два берега, то есть каждая точка является двойной. Пусть  $u_n^+$ ,  $u_n^-$ ,  $u_\tau^+$ ,  $u_\tau^-$  — приращения нормальных и касательных перемещений на линии в двойной точке с декартовыми координатами  $x_1$ ,  $x_2$ , а  $F_n^+$ ,  $F_\tau^+$ ,  $F_n^-$ ,  $F_\tau^-$  — нормальные и касательные компоненты векторов приращений напряжений, действующих на соответствующие касательные к линии в данной точке площадки, с внешними нормальными к каждому берегу,

$$[u_n] = u_n^+ - u_n^-, \quad [u_\tau] = u_\tau^+ - u_\tau^-$$

— разрывы приращений перемещений. Вектор напряжений на площадке поверхности касательного разрыва перемещений непрерывен, поэтому должны выполняться условия:

$$F_n^+ + F_n^- = 0, \quad F_\tau^+ + F_\tau^- = 0. \quad (1)$$

Нормальный разрыв перемещений на линиях сдвигов отсутствует, то есть

$$[u_n] = 0. \quad (2)$$

Возможность касательного разрыва перемещений вдоль линии определяется одним из условий:

$$F_\tau = g_1(F_n, x_1, x_2), \quad (3)$$

или

$$[u_\tau] = g_2(F_\tau, x_1, x_2), \quad (4)$$

где  $F_n, F_\tau$  — нормальная и касательная компоненты вектора приращений напряжений на соответствующей площадке,  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ) — заданные функции своих аргументов. В сплошной среде без разрывов в каждой двойной точке должны выполняться условия (1), (2) и (4) при  $g_2 = 0$ .

Рассмотрим вопрос функционирования линий локализации сдвигов на примере задач, в которых их расположение известно из экспериментов. Это позволит продемонстрировать возможности численного алгоритма для реализации сильного разрыва перемещений вдоль системы большого числа линий сдвигов. Вне линий предположим упругое поведение материала [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)u_{1,1} + \nu u_{2,2}), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)u_{2,2} + \nu u_{1,1}), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{1,2} + u_{2,1}), \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора приращений напряжений в декартовой системе координат,  $u_{i,j}$  — компоненты градиента приращений перемещений, ( $i, j = 1, 2$ ),  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

В монографии [8] описаны эксперименты, при которых в сыпучем материале возникают замкнутые линии скольжения. При определенных условиях формируются две внутренние области, ограниченные линиями скольжения близкими по форме к овалам Кассини. Рассмотрим соответствующую область (рис. 1). Разбиение области на треугольные конечные элементы с линейными функциями формы производится так, чтобы одно из семейств линий сетки состояло из замкнутых линий. Координаты узлов на части линий этого семейства находятся из уравнений, определяющих овалы Кассини:

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2b^2(x_1^2 - x_2^2) - (a^4 - b^4) = 0.$$

Точка лежит на данной кривой, если произведение ее расстояний до двух фиксированных точек с координатами  $(b, 0)$  и  $(-b, 0)$ , постоянно и равно  $a^2$ . При построении сетки использовались кривые при  $a \leq b$  и внутренняя область ограничивалась лемниской Бернулли  $a = b$ . Граница исследуемой области и часть линий сетки конечных элементов вне лемнискаты аппроксимировались двумя полуокружностями, соединенными отрезками параллельных прямых. Половина области заштрихована для обеспечения наглядности при сравнении картин деформирования в ходе решения задачи. Семейство описанных замкнутых кривых на сетке конечных элементов близко к полученным в эксперименте линиям локализации сдвигов. Поэтому часть линий данного семейства будем рассматривать как разрезы с условиями, допускающими проскальзывание берегов разрезов друг относительно друга. Количество разрезов, как окружающих фокусы, так и повторяющих форму границы, может быть различным.

При нагружении в экспериментах граница области не изменялась. При численном решении процесс нагружения производился по шагам. На каждом шаге в каждом граничном узле задано постоянное приращение перемещения, направленное вдоль границы. На основе полученных на данном шаге приращений перемещений сетка конечных элементов перестраивается. На рис. 2 приведено изменение сетки конечных элементов после 20 шагов нагружения. Система замкнутых линий сдвига содержит по две линии, окружающих фокусы и две линии, повторяющие форму границы. На разрезах задан разрыв приращений касательных перемещений. Хорошо заметно разделение материала указанной системой линий на слои и смещение этих слоев друг относительно друга. Особенностью этой задачи является возможность неограниченных сдвигов вдоль линий в системе.

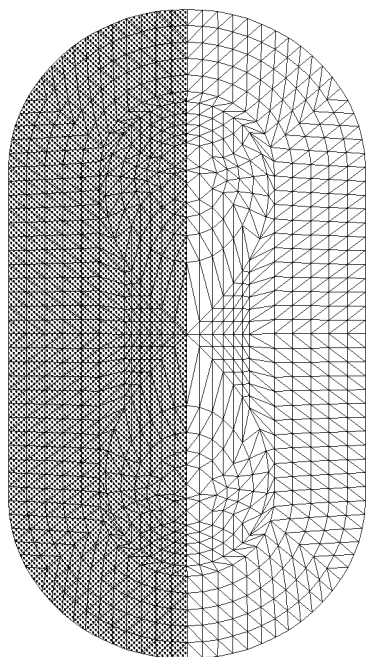


Рис. 1. Первоначальная сетка конечных элементов.

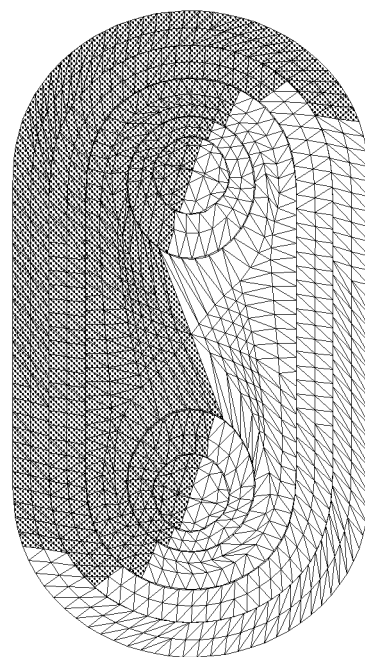


Рис. 2. Изменение сетки конечных элементов.

Рассмотрим еще одну задачу. Хорошо известен факт образования линий локализации в окрестности круглого отверстия (см., например, [2]). В связи с этим, рассмотрим круговое кольцо. Все величины предполагаются безразмерными. В качестве характерного линейного размера выбран радиус внутреннего отверстия, в качестве характерного напряжения —  $E$ . Внешний радиус кольца —  $R$ . На внутреннем контуре задано нормальное радиальное напряжение  $\sigma_r = 0$ , на внешнем контуре — радиальное перемещение  $u_r = -u$ ,  $u = \text{const} > 0$ . Касательное напряжение на границах области равно нулю. В аналитических решениях для идеально пластического материала и материала Мора-Кулона получены системы линий скольжения в виде логарифмических спиралей [2, 4].

Зададим в рассматриваемой области сетку конечных элементов. В качестве определяющих семейств линий сетки выберем окружности и логарифмические спирали, наклоненные под углом  $\beta$  к радиальному направлению. Будем считать, что вдоль некоторых линий на одном из семейств логарифмических спиралей расположены разрезы, которые берут свое начало на внутреннем контуре границы и могут заканчиваться внутри области. На каждом шаге нагружения на берегах разрезов должны быть заданы обязательные условия (1) и (2). Вид функции  $g1$  в условии (3) определяет возможность возникновения разрыва приращений касательных перемещений вдоль разреза. Пусть, например, приращение касательного напряжения вдоль линии разреза совпадает с соответствующим приращением для известного [10] точного решения упругой задачи. Возможность разрыва не реализуется, так как граничные условия и условия на разрезе определяют непрерывное поведение материала. Материал деформируется точно так же, как и при отсутствии разрезов. Этот пример полезен при тестировании программ численного счета, учитывающих криволинейные разрезы внутри непрерывной области. С другой стороны, если  $g1$  постоянна или является линейной функцией  $F_n$ , вдоль разреза возникают разрывы касательных перемещений.

Для иллюстрации скольжения вдоль линий на рис. 3 приведена сетка конечных элементов, построенная с учетом перемещений узлов, полученных при решении задачи со следующими параметрами:  $u = 0,1$ ,  $R = 4,81$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $g1 = 0,59$ ,  $\beta = \pi/4$ . До решения задачи соответствующие узлы сетки на берегах разрезов совпадали.

В классическом упругопластическом решении данной задачи, при условии, что максимальное касательное напряжение в пластической зоне равно  $k$ , можно установить связь между радиусом пластической зоны и  $k$ . При численном решении радиус окружности, ограничивающей область расположения разрезов задавался равным  $s$ , а касательное напряжение на разрезах —  $k$ . Проведенный анализ напряженно-деформированного состояния в кольце с различным числом разрезов показывает, что уменьшение расстояния между разрезами приводит к тому, что численное решение приближается к указанному классическому решению.

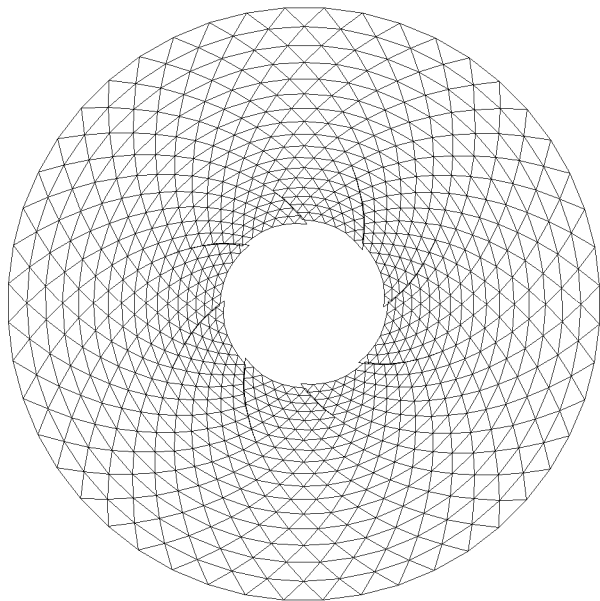


Рис. 3. Сетка конечных элементов.

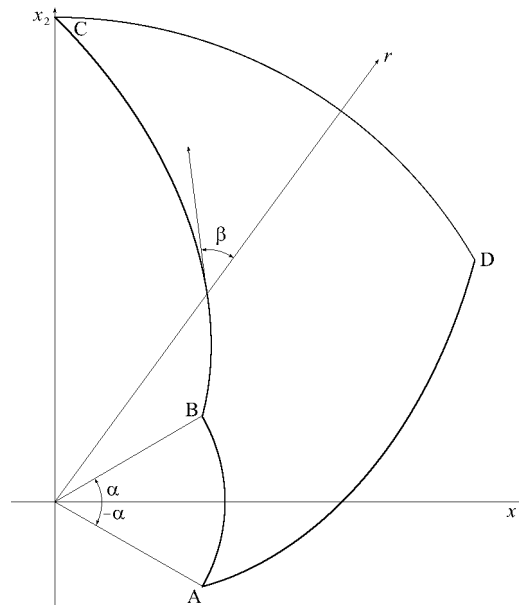


Рис. 4. Исследуемая область.

Рассмотрим также другой подход к решению задачи о кольце с  $n$  трещинами сдвига в виде логарифмических спиралей. Предположим, что упругая область ABCD ограничена двумя кривыми  $\theta - \ln r = \pm\alpha$  и двумя дугами окружностей  $r = 1$  и  $r =$  (рис. 4). Здесь  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты,  $\alpha = \pi/n$ ,  $\beta = \pi/4$ . Так, при  $n = 1$  имеем кольцо с одним разрезом. Представляет интерес существование периодического решения в кольце, с периодом  $2\alpha$ . Для такого решения при повороте рассматриваемой области на угол  $2\alpha$  получим соседнюю область в кольце с таким же напряженно-деформированным состоянием. Таким образом, два берега одного разреза можно рассматривать как границы  $\theta - \ln r = \pm\alpha$  области ABCD. Выберем функцию напряжений  $\varphi(r, \theta)$ , в виде:

$$\varphi = r^2(a_1\theta + a_2 \ln r + a_5) + re^\theta(a_3 \sin(\theta - \ln r) + a_4 \cos(\theta - \ln r)) + re^{-\theta}(b_3 \sin(\theta - \ln r) + b_4 \cos(\theta - \ln r)) + b_1\theta + b_2 \ln r,$$

где  $a_i, b_j$  ( $i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 4$ ) — константы, которые определяются из граничных условий.

Функция напряжений удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0.$$

Соответствующие компоненты напряжения, согласно формулам:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta},$$

имеют вид:

$$\sigma_r = 2a_1\theta + a_2 + 2a_2 \ln r + 2a_5 + r^{-1}e^\theta((a_3 - a_4) \sin(\theta - \ln r) + (a_3 + a_4) \cos(\theta - \ln r)) + r^{-1}e^{-\theta}((b_3 + 3b_4) \sin(\theta - \ln r) + (b_4 - 3b_3) \cos(\theta - \ln r)) + b_2r^{-2},$$

$$\sigma_\theta = 2a_1\theta + 3a_2 + 2a_2 \ln r + 2a_5 - r^{-1}e^\theta((a_3 - a_4) \sin(\theta - \ln r) + (a_3 + a_4) \cos(\theta - \ln r)) + r^{-1}e^{-\theta}((b_4 - b_3) \sin(\theta - \ln r) - (b_3 + b_4) \cos(\theta - \ln r)) - b_2r^{-2},$$

$$\sigma_{r\theta} = -a_1 - r^{-1}e^\theta((a_3 + a_4) \sin(\theta - \ln r) - (a_3 - a_4) \cos(\theta - \ln r)) - r^{-1}e^{-\theta}((b_3 - b_4) \sin(\theta - \ln r) + (b_3 + b_4) \cos(\theta - \ln r)) + b_1r^{-2}.$$

Компоненты перемещения в радиальном и окружном направлениях определяются по формулам:

$$u_r = (1 + \nu) \left( 2(1 - 2\nu)(a_1\theta + a_2 \ln r + a_5)r - a_2r - e^\theta((a_3 + a_4) \sin(\theta - \ln r) - (a_3 - a_4) \cos(\theta - \ln r)) - e^{-\theta}((b_4 - (3 - 4\nu)b_3) \sin(\theta - \ln r) - (b_3 + (3 - 4\nu)b_4) \cos(\theta - \ln r)) - b_2r^{-1} \right) E^{-1},$$

$$u_\theta = (1 + \nu) \left( 4(1 - \nu)(a_2\theta - a_1 \ln r)r + dr - e^\theta((a_3 - a_4) \sin(\theta - \ln r) + (a_3 + a_4) \cos(\theta - \ln r)) + \right. \\ \left. + e^{-\theta}((b_3 - (3 - 4\nu)b_4) \sin(\theta - \ln r) + (b_4 + (3 - 4\nu)b_3) \cos(\theta - \ln r)) - b_1 r^{-1} \right) E^{-1},$$

где  $d$  — постоянная интегрирования.

На берегах сдвиговых трещин должны быть непрерывны нормальное перемещение и вектор напряжений, действующий на площадку, касательную к трещине в данной точке. Следовательно, на границах  $BC$  и  $AD$  при фиксированном  $r$  должны, соответственно, совпадать нормальные компоненты перемещений и компоненты указанного вектора напряжений. Кроме того, необходимо задать условие, допускающее проскальзывание берегов друг относительно друга. Будем считать, что касательная компонента напряжения на берегах трещины постоянна и равна  $k$ . Выполнение указанных граничных условий позволяет получить зависимость между константами, входящими в определение напряжений и перемещений. Решение во всем кольце строится на основе периодичности. Устремив расстояние между трещинами к нулю, получим, что в пределе, при  $\alpha$  стремящемся к нулю, напряжения определяют идеально-пластическое поведение материала. Таким образом, построено точное решение задачи об упругом кольце с произвольным числом сдвиговых трещин с трением.

Приведенные в данной работе картины деформирования являются иллюстрациями предложенного алгоритма и разработанного пакета программ. Большое число построенных в этом пакете численных решений указывает на согласование с экспериментами для широкого диапазона задач.

## Список литературы

- [1] Бушманова О. П. Применение метода конечных элементов для моделирования линий разрыва в упругопластических задачах. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, 1999 С. 46–50.
- [2] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
- [3] Мишнаевский Л. (младший), Шмаудер З. Современные конечно-разностные методы анализа влияния микроструктуры на механические свойства неоднородных материалов: обзор. Физическая мезомеханика. 1999. Т. 2, № 3. С. 5–22.
- [4] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969.
- [5] Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
- [6] РАЗРУШЕНИЕ. Т. 7. М.: Мир, 1976.
- [7] Райс Дж. Р. Локализация пластической деформации. Теоретическая и прикладная механика. Тр. III Международного конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 439–471.
- [8] Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 2000.
- [9] Роско К. Значение деформаций в механике грунтов. В Механика: Сб. переводов. Т. 3. 1971.
- [10] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
- [11] Larsson J., Larsson R. Computational strategy for capturing localization in undrained soil // Computational Mechanics. 1999. Vol. 24. P. 293–303.
- [12] Mackerle Jaroslav Finite element and boundary element technology in rock and mining mechanics A bibliography (1995 – 1998). Finite Elements in Analysis and Design. 1999. Vol. 31. P. 317–325.
- [13] Requeiro Richard A., Borja Ronaldo I. A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach. Finite Elements in Analysis and Design. 1999. Vol. 33. P. 289–315.