

КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ КАПЛИ

С.В. СМЕТАНИН, Г.Р. ШРАГЕР, В.А. ЯКУТЕНОК

Томский государственный университет, Россия

e-mail: smetanin@mail2000.ru

Рассмотрен процесс колебаний капли вязкой жидкости в невесомости под действием сил поверхностного натяжения. Течение внутри капли описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением Пуассона для давления. На свободной поверхности жидкости, соприкасающейся с неподвижной средой, используются динамическое и кинематическое условия. Задача решена конечно-разностным методом. Проведено исследование колебаний капли в широком диапазоне определяющих параметров. Результаты сопоставлены с известными данными.

Рассматривается процесс колебания капли вязкой несжимаемой жидкости в невесомости под действием сил поверхностного натяжения с учетом инерционных эффектов, в предположении, что течение имеет осевую симметрию. В начальный момент времени капля является эллипсоидом вращения с задаваемыми полуосями и находится в состоянии покоя.

1. Используется сферическая система координат, связанная с каплей так, что начало координат находится в центре капли, а полярная ось направлена по оси симметрии. Течение описывается полными уравнениями Навье-Стокса, которые в безразмерном виде представляются как

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - v_\theta \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (1.2)$$

Здесь r - радиальная координата; θ - полярный угол; v_r , v_θ - компоненты скорости; p - давление.

Безразмерный параметр, играющий роль числа Рейнольдса, определяется как

$$\operatorname{Re} = \frac{\sqrt{d\rho\sigma}}{\mu},$$

где μ - коэффициент динамической вязкости; d - диаметр каплей; ρ - плотность; σ - коэффициент поверхностного натяжения.

К уравнениям движения присоединяется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{2v_r}{r} = 0. \quad (1.3)$$

На свободной поверхности жидкости, граничащей с неподвижной средой, используются условия

$$p_{nn} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.4)$$

$$p_{ns} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь p_{nn} , p_{ns} - нормальное и касательное напряжения на свободной поверхности; R_1 , R_2 - радиусы главных кривизн границы капли. Граница капли изменяется в соответствии с кинематическим условием

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad (1.6)$$

где $F(r, \theta, t) = r - \delta(\theta, t) = 0$ - уравнение, описывающее свободную поверхность. На осях симметрии ($\theta=0$, $\theta=\pi/2$) используются условия симметрии.

Из уравнений (1.1), (1.2) с учетом (1.3) получается уравнение Пуассона для давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2 \operatorname{Re}}{r} \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{r} \right) - v_r \left(\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) \right]. \quad (1.7)$$

Вместо уравнений (1.1) - (1.3) решается система уравнений (1.1), (1.2) и (1.7). Для эквивалентности их решений необходимо выполнение уравнения неразрывности на границах, что требует соленоидальности поля вектора скорости [1].

Условия (1.4), (1.5) записываются в локальной декартовой системе координат (n, s) , связанной со свободной границей капли

$$-p + 2 \frac{\partial v_n}{\partial n} = p_\sigma \operatorname{Re}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0, \quad (1.9)$$

где p_σ - капиллярное давление; v_n, v_s - нормальная и касательная составляющие скорости.

Уравнение неразрывности в системе координат (n, s) на границе капли представляется как

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{v_n}{r} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{v_s}{r} = 0, \quad (1.10)$$

где ϕ - угол между нормалью к границе капли и полярной осью.

С использованием функций $Q = v_s + v_n, R = v_s - v_n$ условия (1.9), (1.10) представляются в удобном для последующей разностной аппроксимации виде

$$\frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{v_n}{r} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{v_s}{r} = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial n} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{v_n}{r} + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{v_s}{r} = 0. \quad (1.12)$$

С целью построения регулярной разностной сетки проводится преобразование координат, которое переводит границу области в окружность единичного радиуса

$$\theta = \theta, \quad \xi = \frac{r}{\delta(\theta, t)},$$

где $\delta(\theta, t)$ - функция, описывающая границу капли. Уравнения (1.1), (1.2), (1.7), (1.11) и (1.12) используются в новых координатах.

2. Поставленная задача решается разностным методом. Расчетная сетка внутри области определяется как

$$\xi_i = i h_\xi, \quad i=0, \dots, k, \quad h_\xi = 1/k, \quad \theta_j = j h_\theta, \quad j=0, \dots, m, \quad h_\theta = \frac{\pi}{2m}$$

где k, m - количество узлов, а h_ξ, h_θ - шаги по координатам ξ и θ .

Для расчета скоростей из уравнений движения применяются схемы переменных направлений. Давление

вычисляется из уравнения Пуассона методом установления, который также основан на схемах переменных направлений. Разностные уравнения на каждом полушаге по времени решаются методом прогонки.

Из уравнений (1.11), (1.12) определяются функции Q и R по схемам бегущего счета [1]. Эти схемы позволяют устойчивым образом вести расчет Q в направлении возрастания индекса j , R - в направлении убывания индекса j .

Общий порядок расчета следующий.

- 1) Из разностных аналогов уравнения Пуассона и уравнения (1.8) рассчитывается давление внутри и на границе расчетной области.
- 2) С использованием разностных аналогов уравнений движения, а также уравнений (1.11) и (1.12) рассчитываются скорости внутри и на границе области. Для согласования на каждом шаге по времени решения уравнений движения с условиями (1.11), (1.12) организуется итерационный процесс.
- 3) Из кинематического условия (1.6) находится новая форма капли. Для этого применяется разностная схема с разностями против потока.

3. Для случая малых колебаний невязкой жидкости имеет место известное решение Релея [2]. Начальные возмущения сферической поверхности задаются в виде сферических функций порядка n . В соответствии с этим решением выражение для периода колебаний имеет вид $T=2\pi(n(n-1)(n+1))^{-1/2}$. Так для $n=2$ период $T=2,221$.

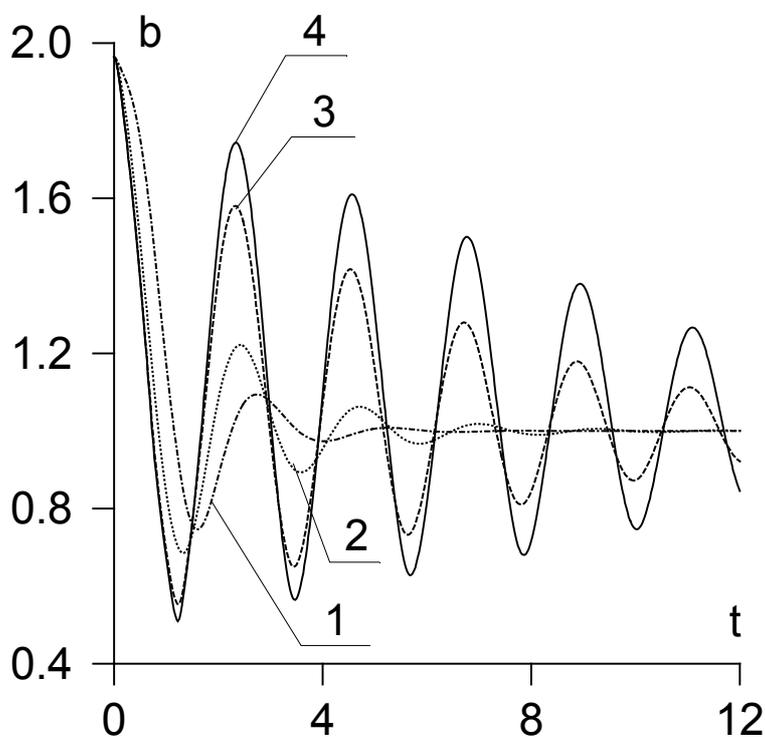


Рис. 1. Зависимости b от t при различных Re .

На рис. 1 показаны зависимости отношения полуосей эллипсоида b от времени (начальное $b_0 = 2$) для различных чисел Рейнольдса: 1-4 – $Re=5, 10, 40, 100$. Результаты, представленные на рис. 1, показывают универсальность решения Релея для случая существования периодических колебаний капли (по крайней мере для $Re>5$) при оценке длительности первого периода колебаний.

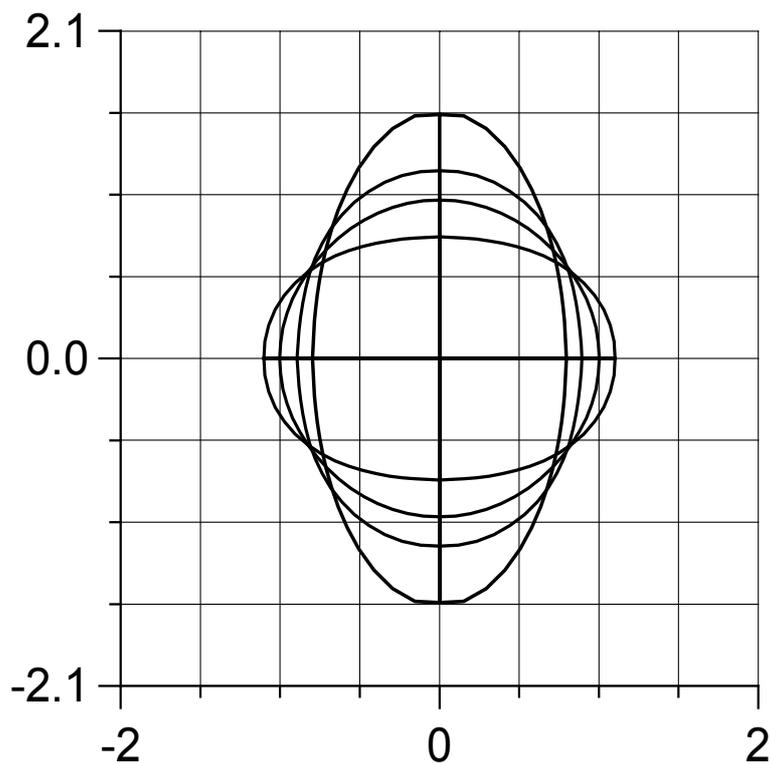


Рис. 2. Формы капли при $b_0 = 2$ для $Re=10$.

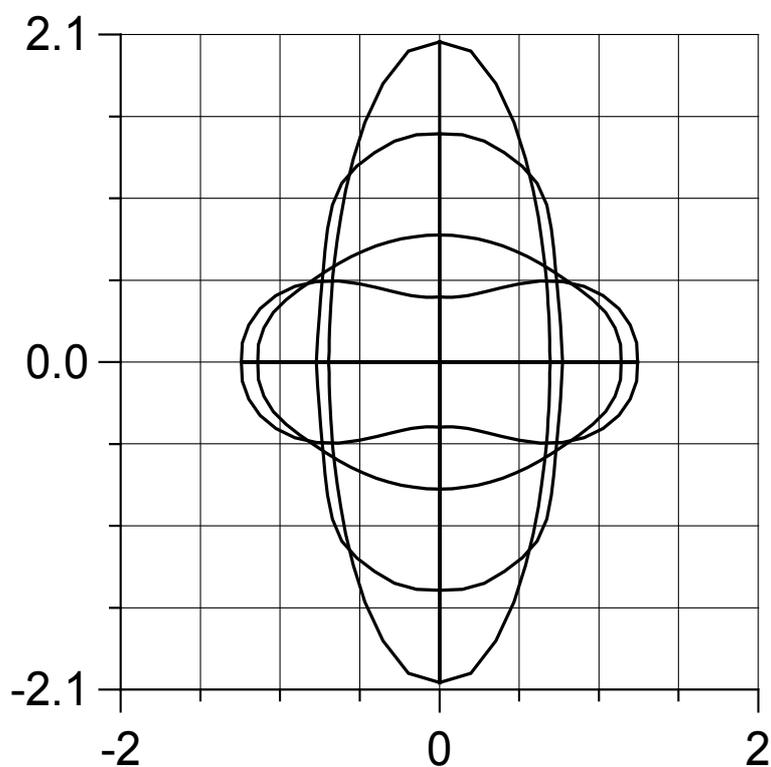


Рис. 3. Формы капли при $b_0 = 3$ для $Re=100$.

Формы свободной поверхности, которые принимает капля, начиная с начальной и заканчивая формой, соответствующей $1/2$ периода колебаний, при начальной деформации $b_0 = 2$ для $Re=10$, представлены на рис. 2. На рис. 3 можно видеть, что при $b_0 = 3$ и $Re=100$ капля принимает гантелеобразную форму, в отличие от

предыдущего случая, когда свободная граница всюду выпуклая.

Результаты показывают универсальность решения Рэлея для случая существования периодических колебаний капли при оценке длительности первого периода колебаний. Хорошее согласование с этим решением и результатами работы [3] подтверждают достоверность полученных результатов.

Заключение. Сформулированная математическая постановка задачи о колебаниях капли вязкой жидкости в условиях невесомости решена конечно-разностным методом. Получены зависимости от времени отношения полуосей эллипсоида при различных числах Рейнольдса и формы капли в случаях отсутствия и наличия гантелеобразных конфигураций свободной поверхности. Результаты сопоставлены с известными данными.

Литература

- [1] Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью. Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, №2. С. 295-298.
- [2] Релей Д. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат.
- [3] Basaran O. A. Nonlinear oscillations of viscous liquid drops. J. Fluid Mech. 1992. Т. 241. P. 169-198.