ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

О. В. Капцов
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

В работе рассматривается метод нахождения дифференциальных связей, совместных с эволюционными уравнениями. С этой целью предлагается использовать некоторые линейные определяющие уравнения с параметрами. Новые уравнения обобщают классические определяющие уравнения, применяемые для нахождения допускаемых операторов Ли.

Использование дифференциальных связей для интегрирования уравнений с частными производными восходит к Лагранжу. Как хорошо известно, метод Лагранжа-Шарпи и метод Якоби [1] основаны на нахождении дополнительных уравнений с частными производными первого порядка, совместными с исходными уравнениями. Основные результаты по исследованию переопределенных систем первого порядка для одной неизвестной функции были получены в 19 веке [2]. Изучение произвольных систем начатое в работах Рикье [3], Томаса [4], Картана [5], Ритта [6], продолжается в настоящее время.

Н. Н. Яненко предложил использовать дифференциальные связи для построения решений уравнений механики сплошной среды [7]. Приложения метода дифференциальных связей к задачам газовой динамики изложены в монографии [8]. Данный метод на практике часто встречается с большими трудностями, поэтому он не нашел еще широкого применения. Следует также отметить, некоторые неклассические подходы типа метода условных симметрий [9] являются частными случаями метода дифференциальных связей и по сложности фактически не отличается от него [10].

Большое число работ по применению группового анализа дифференциальных уравнений [11] объясняется, в значительной степени, простотой метода. Однако, теоретико-групповой метод не всегда позволяет находить решения, полученные с помощью дифференциальных связей. Для нахождения допускаемых инфинитезимальных операторов необходимо решать определяющие уравнения. Как показано в [12], можно обобщить и использовать их для нахождения дифференциальных связей.

Рассмотрим систему уравнений с частными производными

$$F^1 = 0, \cdots, F^m = 0 \tag{1}$$

и набор векторных полей

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} \xi_s^i(x)\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta_s^j(x,u)\partial_{u^j}, \quad s = 1, \dots, p. \tag{2}$$

Предположим, что набор является инволютивным, то есть

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k(x) X_k, \quad \forall\ 1 \le i, j \le p,$$

где c_{ij}^k — гладкие функции. Распределение, порожденное набором (2) обозначается D_p.

Для построения решений уравнений с частными производными можно использовать инволютивные распределения. Это связано с тем, что многие результаты, доказанные для алгебр Ли, допускаемых операторов, переносятся на распределения. В книге Л.В.Овсянникова [11] используется термин полная система, вместо слов инволютивное распределение.

Будем говорить, что решение

$$u^1 = \varphi^1(x_1, \dots, x_n), \cdots, u^m = \varphi^m(x_1, \dots, x_n) \tag{3}$$

системы (1) инвариантно относительно инволютивного распределения D_p, если для каждого $k = 1, \dots, p$ многообразие (3) инвариантно относительно однопараметрической группы G_k^1, порожденной векторным полем X_k.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00850), Министерства образования РФ (грант по естественным наукам Е00–1.0–57) и интеграционной программы СО РАН (проект 1).

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$u_t = \Delta \ln u - u^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Некоторые его точные решения можно найти в работе [13].

Мы приведем решение этого уравнения, инвариантное относительно пары коммутирующих операторов

$$X_1 = \partial_x - (u^2 + (tu^2 - xu^2 + u)tg(t))\partial_u,$$

$$X_2 = \partial_y - (tu^2 + u - xu^2)\partial_u.$$

Данным векторным полям соответствует многообразие

$$u_x + u^2 + (tu^2 - xu^2 + u)tg(t) = 0, \tag{5}$$

$$u_y + tu^2 + u - xu^2 = 0. \tag{6}$$

Заметим, что векторные поля X_1, X_2 не принадлежат алгебре симметрий уравнения (4).

Общее решение уравнений (4) – (6) имеет вид

$$u = \frac{1}{x + a\cos^2(t)\exp(y + x\ tg(t))}, \quad a \in R.$$

Принципиальным вопросом, который мы пока не обсуждали, является проблема нахождения распределений, позволяющих строить решения уравнений в частных производных.

В недавней работе [14] рассматривались эволюционные уравнения с двумя независимыми переменными. В ней введены линейные определяющие уравнения, позволяющие находить дифференциальные связи, совместные с эволюционными уравнениями. Описанную в [14] конструкцию можно обобщить на системы уравнений с несколькими переменными.

Линейными определяющими уравнениями (или ЛОУ), соответствующими системе (1), будем называть уравнения вида

$$\sum_{\alpha,\beta,j} b^{i,j}_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta}(F^i_{u^j_\alpha}) D^\beta h^j = 0, \quad i = 1, ..., m, \tag{7}$$

где $b^{i,j}_{\alpha,\beta} \in R$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ — мультииндексы, $D^\alpha = D^{\alpha_1}_{x_1} \cdots D^{\alpha_n}_{x_n}$, D_{x_i} — полная производная по x_i ; суммирование ведется по мультииндексам α, β, удовлетворяющим неравенству $|\alpha| \geq |\beta|$ и $j = 1, ..., m$. Уравнения (7) должны выполняться на решениях системы (1), h^j могут зависеть от x, функций u и их производных.

Функции $h^1, ..., h^m$, являющимися решениями системы (7), порождают векторное поле $h = (h^1, ..., h^m)$ в некотором пространстве джетов $J^s(U, R^m)$. Приравнивая векторное поле h к нулю, получаем дифференциальные связи. В общем случае, гарантировать совместность этих связей с исходными уравнениями (1) нельзя. Примеры несовместности легко строятся уже для случая классических определяющих уравнений.

Следуя идеям работы [14], можно выводить определяющие уравнения и для распределений. Рассмотрим, для примера, уравнение второго порядка с тремя независимыми переменными

$$u_t = G \equiv F^1 u_{xx} + F^2 u_{yy} + F^3 u_x^2 + F^4 u_y^2 + F^5, \tag{8}$$

где F^i некоторые функции, зависящие от u. Предположим, что многообразие

$$h_1 \equiv u_x + g_1(t, x, y, u) = 0, \ h_2 \equiv u_y + g_2(t, x, y, u) = 0 \tag{9}$$

инвариантно относительно уравнения (8) [12]. Для того, чтобы получить систему определяющих уравнений типа (7) выразим производные $D_t h_1$ и $D_t h_2$ через $h_i, D_x h_i, D_y h_i, D_x^2 h_i, D_x D_y h_i, D_y^2 h_i$ $(i = 1, 2)$. В силу уравнения (8) имеет место равенство

$$D_t h_1 = D_x G + \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial u} G.$$

Несложно проверить, что правая часть последнего равенства представляется в виде

$$m_{11}(h_1, h_2) = G_{u_{xx}} D_x^2 h_1 + G_{u_{yy}} D_y^2 h_1 + [G_{u_x} + D_x(G_{u_{xx}})] D_x h_1 + G_{u_y} D_y h_1 +$$

$$+D_x(G_{u_{yy}})D_y h_2 + r_1 h_1 + s_1 h_2 + \gamma_1, \qquad (10)$$

где r_1, s_1, γ_1 — функции, зависящие от h_1, h_2, G. Поскольку, (9) — инвариантное многообразие, то функция γ_1 равна 0. Следовательно, первое определяющее уравнение имеет вид

$$D_t h_1 = m_{11}(h_1, h_2). \qquad (11)$$

Чтобы получить второе определяющее уравнение

$$D_t h_2 = m_{12}(h_1, h_2), \qquad (12)$$

необходимо в (10) заменить h_1 на h_2, x на y, r_1 на r_2, s_1 на s_2.

Следующая лемма утверждает, что решения уравнений типа (11) – (12), при выполнении некоторых условий, позволяют строить дифференциальные связи, совместные с системой эволюционных уравнений. Важно отметить, что вид операторов m_{ij} не имеет значения, лишь бы выполнялись условия $m_{ij}(0) = 0$.

Рассмотрим систему эволюционных уравнений E:

$$u_i^t = F^i(t, x, u, u_\alpha), \quad i = 1, ..., m, \qquad (13)$$

здесь $t, x = (x_1, ..., x_n)$ — независимые переменные, $u^1, ..., u^m$ — искомые функции, $u = (u^1, ..., u^m)$, а через u_α обозначены различные частные производные по переменным $x_1, ..., x_n$.

Лемма. *Пусть функции*

$$h_j^i = \sum_{s=1}^{n} \xi_j^s(t, x, u) u_{x_s}^i - g_j^i(t, x, u)$$

удовлетворяет системе

$$D_t h_j^i + m_{ij}(h) = 0, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n$$

на $[E]$, *где* $m_{ij}(0) = 0$. *Если векторные поля*

$$X_j = \sum_{s=1}^{n} \xi_j^s \partial_{x_s} + \sum_{i=1}^{m} g_j^i \partial_{u_i}, \ j = 1, ..., n$$

порождают инволютивное распределение и $\det(\xi_j^s) \ne 0$, *то существует решение уравнений, состоящих из системы (13) и*

$$h_j^i = 0, \quad i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n.$$

Список литературы

[1] Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, Т. IV, 1984.

[2] Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Hermann. 1921.

[3] Riquier C. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris. 1910.

[4] Thomas J. M. Differential systems, Amer. Math. Soc. Colloqium Public. Vol. 21, 1937.

[5] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: МГУ, 1962.

[6] Ritt J. F. Differential algebra. Providence. Amer. Math. Soc. Colloqium Public. Vol. 33, 1950.

[7] Яненко Н. Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. IV Всесоюзного мат. съезда. Т. 2. Л.: Наука, 1964. С. 613–621.

[8] Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

[9] Ames W. F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. Academic Press, N. Y., 1972.

[10] Olver P. J. Direct reduction and differential constraints // Proc. R. Soc. Lond. A, 1994. Vol. 444, No. 10. P. 509–523

[11] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[12] Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

[13] Galaktionov V. A., Posashkov S. A. Examples of Nonsymmetric Extinction and Blow-up for Quasilinear Heat Equations//Differential and Intergal Equations. 1995. V.8, No. 1, P.87-103

[14] Капцов О. В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 12. С. 103–118.