АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. С. Якимов
Томский университет систем управления и радиоэлектроники, Россия
e-mail: fire@fire.tsu.tomsk.su

On the base of operating calculus have been obtained analytical formula for the three-dimensional single-line equation of carrying. On the test example have been shown an effectivency of suggestal if marginal conditions is given by analytical expressions from spatial coordinates and time explicit. The result of a comparision have been reduced with known analytical and numerical method.

При математическом моделировании задач тепло- и массопереноса [1, 2] возникает проблема решения уравнений сохранения массы, количества движения и энергии. Например, в зависимости от условий обтекания (невязкое, вязкое) тела это могут быть уравнения Эйлера или Навье — Стокса, решение которых представляет трудную задачу. Если для решения многомерного параболического уравнения [3] имеется ряд численных методов интегрирования (обзор в [4]), то аналитические методы их решения в трехмерном случае в доступной литературе не обнаружены.

Кроме того, практически мало численных методов [3], [5] – [7], которые обобщаются на трехмерный случай и могут одинаково эффективно решать уравнения в частных производных первого и второго порядка.

В связи с этим представляет интерес возможность аналитического решения уравнения переноса (1.1) [1, 8] в пространственном случае.

Первые публикации по операционному исчислению (ОП), например, двух переменных относятся к 30–50 годам 20–го века (Р. Эмбер, Г. Деч, В.А. Диткин и др.). При этом теория ОИ, основанного на применении неодномерного интегрального преобразования Лапласа (ИПЛ), вытекает из общей теории, как частный случай при рассмотрении операторов, преобразуемых по Лапласу.

Позднее Г. Деч [9] – [11] рекомендует для решения многомерного уравнения в частных производных последовательно применять ИПЛ столько раз, какова размерность этого уравнения. Решая последнее обратным ИПЛ и, последовательно находя оригиналы по известным таблицам [12], окончательно получаем решение исходного уравнения в частных производных.

1. Постановка задачи и алгоритм метода

Пусть требуется решить линейное уравнение переноса [1, 8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} c_m \frac{\partial u}{\partial x_m} = f(t, x), \qquad u \geq 0 \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = w(x). \tag{1.2}$$

Пусть для определенности знаки величин $c_m = \text{const}$ заранее известны, например: $c_m > 0$, $m = 1, 2, 3$ при $0 \leq t < t_k$ $(0 < t_k < \infty$). Тогда граничные условия внутри параллелепипеда $R : [x = (x_1, x_2, x_3)$, $0 \leq x_m < S_m$, $(0 < S_m < \infty$, $m = 1, 2, 3)]$ задаются в виде [1, 8]:

$$u|_{x_1=0} = g_1(t, x_2, x_3), \qquad u|_{x_2=0} = g_2(t, x_1, x_3), \qquad u|_{x_3=0} = g_3(t, x_1, x_2). \tag{1.3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00352, 99-01-00363).

© А. С. Якимов, 2001.

Рассмотрим ИПЛ [9] – [11], [13]

$$\begin{aligned} U(p,x) &= \int\limits_0^\infty \exp(-pt)u(t,x_1,x_2,x_3)dt,\\ U_1(p,q,x_2,x_3) &= \int\limits_0^\infty \exp(-qx_1)U(p,x)dx_1,\\ U_2(p,q,s,x_3) &= \int\limits_0^\infty \exp(-sx_2)U_1(p,q,x_2,x_3)dx_2,\\ U_3(p,q,s,r) &= \int\limits_0^\infty \exp(-rx_3)U_2(p,q,s,x_3)dx_3, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где p, q, s, r — комплексные параметры, а индесы 1, 2, 3 относятся к ИПЛ по пространственным переменным.

Тогда обратное ИПЛ к (1.4) дает:

$$\begin{aligned} &L_r^{-1}(U_3) = U_2(p,q,s,x_3), \quad L_s^{-1}(U_2) = U_1(p,q,x_2,x_3),\\ &L_q^{-1}(U_1) = U(p,x), \quad L_p^{-1}(U) = u(t,x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Применим ИПЛ (1.4) к уравнению (1.1) последовательно, тогда получим

$$c_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial U}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial U}{\partial x_3} + pU(p,x) = u(0,x) + F(p,x),$$

$$c_1qU_1(p,q,x_2,x_3) - c_1U(p,0,x_2,x_3) + c_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + pU_1(p,q,x_2,x_3) = U_1(0,q,x_2,x_3) + F_1(p,q,x_2,x_3),$$

$$c_2sU_2(p,q,s,x_3) - c_2U_1(p,q,0,x_3) + c_1qU_2(p,q,s,x_3) - c_1U_1(p,0,s,x_3) + c_3\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + pU_2(p,q,s,x_3) =$$
$$= U_2(0,q,s,x_3) + F_2(p,q,s,x_3),$$

$$c_3rU_3(p,q,s,r) - c_3U_2(p,q,s,0) + c_2sU_3(p,q,s,r) - c_2U_2(p,q,0,r) + c_1qU_3(p,q,s,r) - c_1U_2(p,0,s,r) +$$
$$+pU_3(p,q,s,r) = U_3(0,q,s,r) + F_3(p,q,s,r). \tag{1.6}$$

Преобразуем уравнение (1.6), собирая подобные слагаемые при $U_3(p,q,s,r)$. В результате получим

$$\begin{aligned} &U_3(p,q,s,r) = [c_3U_2(p,q,s,0) + c_2U_2(p,q,0,r) + c_1U_2(p,0,s,r) + F_3(p,q,s,r)]/(p+a),\\ &a = c_1q + c_2s + c_3r. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для нахождения оригиналов в (1.7) воспользуемся таблицей [12] и формулой из [13, стр. 151] :

$$\eta(t)\exp(-p\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau \ge 0,\\ \eta(t-\tau), & t \ge \tau; \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} L_p^{-1}\left[\frac{U(p)}{p+a}\right] &= \int\limits_0^t \exp(-a\tau)u(t-\tau)d\tau,\\ L_p^{-1}[\exp(-p\tau)U(p)] &= u(t-\tau), \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Применяя обратное ИПЛ (1.5) последовательно к первому слагаемому правой части уравнения (1.7) и используя (1.9), получим

$$\frac{U_2(p,q,s,0)}{p+a} = \int\limits_0^t \exp(-a\tau)U_1(t-\tau,q,s,0)d\tau = \int\limits_0^t \exp[-\tau(c_2s+c_3r)]U(t-\tau,x_1-\tau c_1,s,0)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \exp(-\tau c_3r)g_3(t-\tau,x_1-\tau c_1,x_2-\tau c_2,0)d\tau = I_3, \tag{1.10}$$

где

$$I_3 = \int\limits_0^t g_3(t-\tau, x_1-\tau c_1, x_2-\tau c_2, 0-\tau c_3)d\tau, \quad \tau c_3 \le 0,$$
$$I_3 = 0, \quad \tau c_3 > 0.$$

Отметим, что порядок восстановления оригиналов в (1.7), (1.10) по параметрам q, s, r задан операторами (1.5). Для получения последнего выражения (I_3) в цепочке (1.10) используется функциональная зависимость (1.8).

Аналогично восстанавливаются через (1.5), (1.8), (1.9) оригиналы для остальных слагаемых в правой части (1.7). В результате искомое решение уравнения (1.1) окончательно записывается:

$$u(t,x) = w(0, x_1-tc_1, x_2-tc_2, x_3-tc_3) + \int\limits_0^t f(t-\tau, x_1-\tau c_1, x_2-\tau c_2, x_3-\tau c_3)d\tau + \sum_{m=1}^{3} I_m c_m, \quad (1.11)$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^t g_1(t-\tau, 0-\tau c_1, x_2-\tau c_2, x_3-\tau c_3)d\tau, \quad \tau c_1 \le 0,$$
$$I_1 = 0, \quad \tau c_1 > 0;$$
$$I_2 = \int\limits_0^t g_2(t-\tau, x_1-\tau c_1, 0-\tau c_2, x_3-\tau c_3)d\tau, \quad \tau c_2 \le 0,$$
$$I_2 = 0, \quad \tau c_2 > 0;$$

Очевидно, что расчет по формулам (1.11) возможен, если w, g_m, $m = 1, 2, 3$ из (1.2), (1.3) и f из (1.1) заданы аналитическими выражениями от пространственных координат и времени явно.

При нахождении интегралов, входящих в формулы (1.10), (1.11) используем формулу Симпсона [14], которая имеет четвертый порядок точности. Она позволяет получать высокую точность, если четвертая производная подынтегральной функции не очень велика. Так как последняя задана аналитически (в отличии от конечных разностей, где искомая функция заранее неизвестна), то ее можно оценить. При небольшом числе узлов (~ 9) можно воспользоваться, например, формулой Ньютона — Котеса [14], которая имеет десятый порядок точности.

2. Пример тестового расчета

Точность полученного аналитического выражения (1.11) и правильность алгоритма расчета в пространственном случае установим при решении трехмерной дифференциальной задачи (2.1) из [7] с краевыми условиями (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} c_m \frac{\partial u}{\partial x_m} = f(t,x), \qquad u \ge 0 \quad (2.1)$$
$$h = 1 + x_1^Z + x_2^Z + x_3^Z, \qquad f = 4ht^3 + z(1+t^4)(c_1 x_1^{Z-1} + c_2 x_2^{Z-1} + c_3 x_3^{Z-1});$$
$$u|_{x_1=0} = (1+t^4)(1+x_2^Z+x_3^Z), \qquad u|_{x_2=0} = (1+t^4)(1+x_1^Z+x_3^Z),$$
$$u|_{x_3=0} = (1+t^4)(1+x_1^Z+x_2^Z), \qquad u|_{t=0} = h. \quad (2.2)$$

Точное решение краевой задачи (2.1), (2.2) заранее известно: $u = h(x_1, x_2, x_3)(1+t^4)$ при $0 \le t \le t_k$. Сначала рассматривалось решение задачи (2.1), (2.2) в одномерной постановке. В этом случае удается сравнить точность полученных формул (1.11) (в дальнейшем подход 1) с известным аналитическим решением (2.3) (далее подход 2), найденного в [13] ОИ на основе двумерного ИПЛ:

$$u(t, x_1) = \begin{cases} w(y_1 - t) + \int\limits_0^t f(t-\tau, y_1-\tau)d\tau, & y_1 > t \\ g(t-y_1) + \int\limits_0^{y_1} f(t-\xi/c_1, x_1-\xi)d\xi, & t > y_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $y_1 = x_1/c_1$.

Были взяты следующие значения входных данных: $S_1 = 1$, $c_1 = 1$, $M = 51$, $z = 4$, $N_1 = 11$, $\Delta t = t/(M-1)$, N_1 — число расчетных узлов по пространству, Δt — шаг по времени при расчете интегралов в уравнениях (1.11), (2.3) по формуле Симпсона. Программа составлена на Фортран – 77, расчет производился на ПЭВМ Pentium 2 (130 Мгерц, Транслятор PS 4) с двойной точностью.

В таблице 1 дается максимальная относительная погрешность $\varepsilon = (u - \bar{u})100\%/u$ (u — точное, $\bar{u}$ — аналитическое решение) от времени; ε_1 — отвечает результату решения одномерной ($m = 1$) краевой задачи (2.1), (2.2) подходом 1, а ε_2 — подходом 2.

Т а б л и ц а 1

N	ε \ t	0,1	0,5	1	2	5
1	ε_1	0,067	0,33	0,66	1,33	3,33
2	ε_2	0,02	0,51	1,567	1,23	0,75

Как видно из таблицы 1 точность расчета по обоим подходам практически совпадает. Надо сказать, что по подходу 1 можно асимптотически улучшать точность решения задачи, уменьшая Δt (увеличивая M). В то же время в подходе 2 для получения хорошей точности необходимо уменьшать также шаг по пространственной переменной, так как второй интеграл в (2.3) с переменным верхним пределом по x. Кроме того, в этом случае для четных узлов по пространству надо использовать формулу трапеций для его расчета. И наконец формулу (2.3) проблематично употреблять в предельном случае при $c_1 = 0$, так как получим деление на ноль.

Теперь сравним подход 1 в трехмерном случае с численным расчетом задачи (2.1), (2.2) по технологии из [7] при $S_m = 1$, $c_m = 1$, $N_m = 11$, $m = 1, 2, 3$, $z = 4$. Для достижения практически равной точности, например, в конечный момент времени $t_k = 5$ в методе [7] (подход 3) полагалось $\Delta t = 0,005$. В таблице 2 ε_3 — отвечает результату решения задачи подходом 3, а ε_1 — подходом 1 при $\Delta t = 0,025$ ($M = 201$).

При этом время расчета (t_p) для подхода 1 составило $t_p = 21$ с , тогда как для подхода 3 — $t_p = 5,5$ мин (в 15 раз дольше).

Т а б л и ц а 2

N	ε \ t	0,1	0,5	1	2	5
1	ε_1	0,05	0,25	0,5	1,0	2,5
3	ε_3	0,44	1,38	5,66	6,04	2,6

Выводы

1. Для решения трехмерного линейного уравнения переноса получена аналитическая формула на основе ОИ.

2. На пробной функции показана эффективность предлагаемой технологии, если краевые условия заданы аналитическими выражениями от пространственных координат и времени явно.

Список литературы

[1] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.

[2] Гришин А. М., Фомин В. М. Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред. Новосибирск: Наука, 1984.

[3] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

[4] Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.

[5] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

[6] Гришин А.М., Якимов А.С. Обобщение итерационно-интерполяционного метода для решения трехмерного параболического уравнения общего вида // Вычислит. технологии. 1999. Т. 4, № 2. С. 26–41.

[7] Гришин А.М., Якимов А.С. Об одном методе решения некоторых трехмерных уравнений в частных производных // Вычислит. технологии. 2000. Т. 5, № 5. С. 38–52.

[8] Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.

[9] Doetch G. Handbuch der Laplace–Trasformation. bd. 1 – IV. Birkauser Verlag, Basel, 1950 – 1956.

[10] Voelker D., Doetch G. Die Zweidimesional Laplace–Trasformation, Bazel, 1950.

[11] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.

[12] Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.

[13] Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966.

[14] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.