АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПАРАМЕТРАХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Е. В. Губкина
ГАГУ, Горно-Алтайск, Россия
e-mail: root@gasu.gorny.ru

В. Н. Монахов
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьвеа СО РАН, Новосибирск, Россия

The flat stationary fluid filtration problems in domains, which boundary consists of given line segments (polygon) and unknown curve (free boundary), are reduced in searching numerical parameters of conformal mappings from a system of the nonlinear equations, generalizing equation for a unknown quantity of parameters in wellknown Christoffel - Schwarz formula of polygons map.

In work the numerical solution algorithm of such nonlinear equationses system is offered, it convergence is proved and evaluation of convergence velocity is established.

1^0. **Однозначная разрешимость функционального уравнения.** Пусть фильтрация жидкости происходит в области D, ограниченной неизвестной кривой L и заданным полигоном P с вершинами и концами в точках $z_k,\ k=\overline{0,n+1}$ ($\overline{0,n+1}$ — множество целых чисел $k,\ 0<k<n+1$), внутренними углами $\alpha_k\pi$ при z_k и длинами сторон $l_k=|z_k-z_{k-1}|$. Производная конформного отображения $z: E\to D$ верхней полуплоскости $E:\ \mathrm{Im}\,\zeta>0$ на область фильтрации D представляется в виде [1-3]:

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{\Pi(\zeta)}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{\Pi_0(t)dt}{\Pi(t)(t-\zeta)}\equiv\Pi(\zeta)M(\zeta);\ \ \Pi=\prod_{k=0}^{n+1}(\zeta-t_k)^{\alpha_k-1},\ \ \Pi_0=\prod_{kj}|t-t_{kj}|^{\gamma_{kj}-1},\tag{1}$$

где t_k — прообразы вершин $z_k=z(t_k)$ ($t_{n+1}=0,t_0=1<t_1<...<t_n<\infty$), $t_{kj}\in\{t_k\}$ ($kj\in\overline{0,n+1}$), γ_{kj} принимают одно из значений $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},2\right)$. При произвольно фиксированном векторе $T=(t_1,...,t_n)$, определенное с помощью (1) конформное отображение

$$z=\int\limits_0^\zeta\Pi(\zeta)M(\zeta)d\zeta\equiv F(\zeta,T),\ F:E\to D(T)\ (z_0=0)$$

переводит E в область $D(T)$, граница которой включает некоторый полигон $P(T)$ с вершинами $z_k(T)$ и заданными углами $\alpha_k\pi,\ k=\overline{0,n+1}$. Для совпадения полученного при этом полигона $P(T)$ с заданным P необходимо выполнение функционального уравнения для вектора T:

$$g(T,\alpha)=l;\ g=(g_1,...,g_n),\ g_k=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|\Pi(t)M(t)|dt,\tag{2}$$

где $l=(l_1,...,l_n)$ — вектор длин сторон полигона P, $\alpha\pi=(\alpha_0,..,\alpha_{n+1})\pi$ — вектор внутренних углов P.

Замечание 1. Уравнение, соответствующее последней стороне $l_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|$ полигона P является следствием уравнений (2) и выполняется автоматически [2].

Вектор $p=(l,\alpha)$ назовем *геометрической характеристикой* полигона P, так как он полностью определяет геометрию P и подчиним его условиям *простого полигона* [2, 3]

$$|\ln l_{k+1}|\le\delta^{-1},\quad 0<\delta\le\alpha_k\le 2,\quad k=\overline{0,n+1};\quad \delta-1\le\gamma_k-\alpha_k,\ k=0,n+1\tag{3}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99–01–00622 и гранта МО РФ № Е00–4.0–65.

Факт принадлежности полигона P множеству простых полигонов обозначается: $P \subset G = G(\delta)$, $p \in G$.

В работах [1–3] для решения T уравнения (2), отвечающего простому полигону P, доказано включение (*априорная оценка*):

$$T \in \Omega = \{u | u_k = t_k - t_{k-1} > \varepsilon(\delta) > 0, k = \overline{1,n}\}, \tag{4}$$

где, очевидно, $u = (u_1, ..., u_n)$ однозначно выражается через T и наоборот.

На множестве Ω в [1–3] установлены также следующие свойства оператора $g(u,\alpha) \equiv g[T(u),\alpha]$:

$$g \in C^2[\Omega \times G]; \ \left|\frac{Dg}{Du}\right| \geq d(\delta) > 0, \ \frac{Dg}{Du} = \left\{\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\right\} \tag{5}$$

Согдасно методу непрерывности Вайнштейна А. [1, стр. 121–123] из справедливости соотношений (4), (5) вытекает следующее утверждение

Лемма 1. *Функциональное уравнение (2), отвечающее полигону $P \subset G(\delta)$, имеет по крайней мере одно решение $T \subset \Omega$. Если среди простых полигонов найдется $P^0 \subset G(\delta)$, для которого (2) разрешимо однозначно, то решение $T = (t_1, ..., t_n)$ уравнения (2) единственно для любого $P \subset G(\delta)$.*

Замечание 2. В качестве полигона P^0 можно взять отрезок прямой, соединяющий точки z_0^0 и z_{n+1}^0, и на нем произвольно фиксировать "вершины" z_k^0, $k = \overline{1,n}$ с углами $\alpha_k^0\pi = \pi$ [1–3]. Поскольку при этом подынтегральные функции в (2) не зависят от T, то уравнение (2), очевидно, однозначно разрешимо.

2^0. **Деформация простых полигонов.** Рассмотрим указанный в замечании 2 полигон P^0 с углами $\alpha_k^0\pi = \pi$ и построим семейство полигонов $\{P^\mu\}$, $\mu = (\mu_0, ..., \mu_{n+1})$, $\mu_k \in [0,1]$, включающее в себя P^0 и исходный полигон $P = P^e$, $e = (1, ..., 1)$.

Пусть P^μ и P^λ, $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k \leq 1$ два различных ($|\mu - \lambda| > 0$) полигона из семейства $\{P^\mu\}$ таких, что их характеристики p^μ и p^λ и соответствующие им мультииндексы μ и λ являются близкими:

$$0 \leq |p^\lambda - p^\mu| = q \ll 1, \quad 0 < |\lambda - \mu| \leq \rho(q) \ll 1, \tag{6}$$

где постоянная $q > 0$ — мера деформации $P^\mu \to P^\lambda$ будет выбрана ниже.

Произведем непрерывную деформацию $P^\mu \to P^\lambda$ с помощью следующего линейного преобразования вершин $z_k^\mu \in P^\mu$, $z_k^\lambda \in P^\lambda$, $k = \overline{0, n+1}$:

$$z_k^\nu = \varepsilon_k z_k^\lambda + (1 - \varepsilon_k) z_k^\mu, \quad \varepsilon_k \in [0,1], \quad \mu_k \leq \nu_k \leq \lambda_k, \tag{7}$$

где $\varepsilon_k = (\nu_k - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)^{-1}$ при $\lambda_k > \mu_k$ и $\varepsilon_k = 0$ при $\lambda_k = \mu_k$. Преобразование (7) вершин $z_k^\mu \to z_k^\lambda$, удовлетворяющее условию (6) близости P^μ и P^λ, будем называть *циклом деформаций.* Очевидно, при каждом фиксированном $q > 0$ в (5) за конечное число таких циклов деформаций начальный полигон P^0 преобразуется в заданный $P = P^e$, $e = (1, ..., 1)$, при этом $P^\mu \in G(\delta)$, $\delta = \delta(q) > 0$.

В силу леммы 1 уравнение (2), соответствующее любому полигону $P^\mu \subset G(\delta)$, однозначно разрешимо.

3^0. **Сходимость метода циклической итерации.** С помощью подстановки $t = \tau_k(s) = su_k + t_{k-1}$, $u_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$ перейдем к переменной s в интегралах, определяющих $g_k(T,\alpha)$ в (2):

$$l_k = \int_0^1 \Pi_k[\tau_k(s)] M[\tau_k(s)] ds, \ k = \overline{1,n}$$

Здесь $\Pi_k(\tau_k) = u_k^{\rho_k} s^{\beta_{k-1}} (1-s)^{\beta_k} \prod\limits_{i \neq k, k-1} |\tau_k(s) - t_i|^{\beta_i}$, $\rho_k = \alpha_k + \alpha_{k-1} - 1$, $\beta_k = \alpha_k - 1$, $k = \overline{0, n+1}$. С учетом этих преобразований представим (2) в форме:

$$u = f(u,p); \ f = (f_1, ..., f_n), \ f_k = \int_0^1 \int_0^1 \Lambda_k(t,s) dt ds, \tag{8}$$

$$\Lambda_k = \frac{H_k(t) s^{\beta_{k-1}} (1-s)^{\beta_k} \Pi_k[\tau_k(s)]}{|\Pi(t)|(su_k + t_{k-1} - t)}, \ \ H_k = (l_k \pi)^{-1} u_k \Pi_0(t)$$

Для оператора $f(u,p)$ справедливы соотношения аналогичные (5) для $g(u,\alpha)$ [2]:

$$f \in C^2[\Omega \times G]; \ \left|\left|\left(I - \frac{Df}{Du}\right)^{-1}\right|\right| \leq d(\delta) < \infty \ \left(\frac{Df}{Du} = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial g_j}\right\}\right), \tag{9}$$

где I — единичная матрица, $||A|| = \sup\limits_{|v|=1} |Av|,\ A = \{a_{ij}\}$.

Рассмотрим один цикл деформаций $P^\mu \to P^\lambda$ при условии (6) и пусть $u = u^\lambda$, $\overline{u} = u^\mu$ решения уравнения (8), соответствующие характеристикам $p = p^\lambda$, $\overline{p} = p^\mu$:

$$u = f(u,p),\ \overline{u} = f(\overline{u},\overline{p}).$$

Вычтем обе части этих уравнений друг из друга и представим результат в виде [2]:

$$v - \frac{D\overline{f}(u)}{Du} \cdot v = A(v) + \Delta_p f,\ v = \overline{u} - u, \tag{10}$$

где $\overline{f}(u) = f(u,\overline{p}),\ A = \left[\frac{D\overline{f}(u+\Theta v)}{Du} - \frac{D\overline{f}(u)}{Du}\right] v, \Theta v = (\Theta_1 v_1, ..., \Theta_n v_n),\ |\Theta_k| \le 1,\ \Delta_p f = f(u,p) - f(u,\overline{p})$. Учитывая оценку (9), уравнению (10) можно придать форму

$$v = B(v),\ B = \left(I - \frac{D\overline{f}(u)}{Du}\right)^{-1} (A + \Delta_p f) \tag{11}$$

Выбирая $q = |p - \overline{p}| = (2dM)^{-1},\ M = ||f||_{C^2(Q)},\ Q = \Omega \times G$, получим, что на множестве $\Omega_q = \{v \Big| |v| < q\}$ оператор $P : \Omega_q \to \Omega_q$ является сжимающим [2]: $|B(v_1) - B(v_2)| \le \frac{1}{2}|v_1 - v_2|$. Пусть в (6) $\rho = \rho(q) > 0$ отвечает выбранному $q = (2Md)^{-1}$ и $N = N(q)$ целое число, подчиненное неравенствам $1 \le N\rho < 1 + \rho$. Рассмотрим последовательность мультииндексов $\mu_k,\ k = \overline{1,N}$

$$\{\mu_k\} = (\mu_0 = 0,\ |\mu_{k+1} - \mu_k| = \rho,\ k = \overline{1, N-1},\ |\mu_N - e| < \rho \tag{12}$$

Соответствующие (12) циклы малых деформаций $P^{\mu_k} \to P^{\mu_{k+1}}$ подчиним условию (6).

По построению на каждом шаге таких циклов, отвечающее ему уравнение (11) может быть решено методом простой итерации:

$$v^{(m+1)} = B(v^{(m)}),\ m = 0, 1, ..., v^{(0)} \in \Omega_q \tag{13}$$

Процесс построения решения уравнения (8) для заданного полигона $P = P^e,\ e = (1, .., 1)$ последовательным решением (11) для циклов деформаций $P^{\mu_k} \to P^{\mu_{k+1}}$ по схеме (13) назовем *методом циклической итерации.*

Лемма 2. *Метод циклической итерации за конечное число циклов деформаций $P^{\mu_k} \to P^{\mu_{k+1}},\ k = \overline{1,N}$, начиная с P^0, сходится к единственному решению уравнения (8) для заданного полигона $P = P^e,\ e = (1, .., 1)$.*

При этом на каждом цикле деформаций возмущения $v = (u^{\mu_{k+1}} - u^{\mu_k})$ могут быть построены по схеме (13) простой итерации.

4^0. **Аппроксимация оператора.** Построим квадратурные формулы вычисления двойных несобственных интегралов $f_k(u,p)$ в (8) при произвольно фиксированных $(u,p) \in \overline{\Omega} \times \overline{G}$. Для этого в квадрате $S = (0,1) \times (0,1)$ (область интегрирования) выделим окрестности S_{mr} его вершин (m,r), в которых имеются особенности подынтегральных функций $\Lambda_k(t,s)$:

$$S_{mr} = \{t, s \Big| |t - m| < \varepsilon_0, |s - r| < \varepsilon_0\} \subset S, \quad \varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

где m и r принимают значения 0 или 1. Отметим, что при $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{1}{2}$ множество $S_{22} = (S \setminus \bigcup S_{mr})$ не пусто. Положим

$$\Lambda_{k\nu}(t,s) = \Lambda_k(t,s) \ \text{ при } \ (t,s) \in S_\nu \ \text{ и } \ \Lambda_k(t,s) = 0 \ \text{ при } \ (t,s) \overline{\in} S_\nu,$$

где $\nu = mr$ или $\nu = \nu_{22}$ $(m = r = 2)$. Соответственно, введем аналогичные обозначения и для интегралов по S_{mr} и S_{22} :

$$f_{k\nu} = \iint\limits_S \Lambda_{k\nu}(t,s) dt ds,\ f_k = \sum_\nu f_{k\nu},\ \nu = mr.$$

Покроем квадрат S равномерной сеткой E с шагом $h = 1/N$ и положим $E_{ij} = \{t, s \big| 0 < t - t^i < h,\ 0 < s - s^j < h\},\ \sigma_{ij} = (t^i, s^j)$. Аппроксимируем функции $\Lambda_{k\nu}(t,s) \in C^\infty(S),\ \nu = 22$ при $(u,p) \in (\overline{\Omega} \times \overline{G})$

кусочно-постоянными, полагая $\Lambda_{k\nu}(t,s) = \Lambda_{k\nu}(\sigma_{ij})$ при $(t,s) \in E_{ij}$ и вычислим приближенные значения f_k^h по следующей квадратурной формуле:

$$f_{k\nu}^h = \sum_{i,j} \Lambda_{k\nu}(\sigma_{ij})h^2, \quad \nu = 22. \tag{14}$$

Рассмотрим множество J всех мультииндексов æ $= (k\,m\,r)$ $(m = 0,1; r = 0,1; k = \overline{1,n})$ и положим $J_* = [J \backslash (1,1,0)]$. В интегралах $f_{k\nu}$, $(k\,m\,r) \in J_*$ выделим особенности подынтегральных функций

$$\Lambda_{k\nu} = |t-m|^{a_m}|s-r|^{b_r}\Phi_{k\nu}(t,s), \quad \Phi_{k\nu} \in C^\infty(S_\nu) \tag{15}$$

Здесь $a_m = \min(\overline{a}_m, 0)$, $b_m = \min(\overline{b}_m, 0)$; $\overline{a}_0 = \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}$, $\overline{a}_1 = \gamma_0 - \alpha_0$, $\overline{b}_r = \beta_{k+r-1}$, $r = 0,1$; $(\overline{a}_m, \overline{b}_r) \in (-1,1]$.

Вычислим приближенные значения $f_{k\nu}^h$, $(k\,m\,r) \in J_*$ по квадратурным формулам

$$f_{k\nu}^h = \sum_{i,j} \Delta_m^i \Delta_r^j \Phi_{k\nu}(\sigma_{ij}), \tag{16}$$

где $\Delta_m^i = \dfrac{1}{1+a_m}|\Delta_t|t-m|^{a_m+1}|$, $\Delta_r^j = \dfrac{1}{1+b_r}|\Delta_s|s-r|^{b_r+1}|$, $\Delta_t f = f(t^{i+1}) - f(t^i)$, $\Delta_s g = g(s^{j+1}) - g(s^j)$ $(\Delta_m^j = h$ при $r_m = 0$, $\Delta_r^j = h$ при $\delta_r = 0)$. При вычислении последнего интеграла $f_{1\nu}$ заметим, что подынтегральная функция $\Lambda_{1\nu}(t,s)$, $\nu = 10$ имеет дополнительную подвижную особенность и представляется в виде

$$\Lambda_{1\nu}(t,s) = (1-t)^{a_1}s^{b_0}(u_1 s + 1 - t)^{-1}\Phi_{1\nu}, \quad \Phi_{1\nu} \in C^\infty(S_{10}), \quad \nu = 10,$$

где $(u_1 s + 1 - t) \to 0$ при $(t,s) \to (1,0)$. Наличие подвижной особенности у $\Lambda_{1\nu}$ не позволяет вычислить $f_{1\nu}$ аналогично $f_{k\nu}$, $k\nu \neq 110$ как повторный интеграл, так как при этом порядок особенности по t и по s в точке $(1,0)$ может быть большим единицы.

Поэтому перейдем в интеграле $f_1\nu$, $\nu = 10$ к полярным координатам (ρ,θ),полагая $1 - t = \rho\cos\theta$, $s = \rho\sin\theta$:

$$f_1\nu = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\rho_0(\theta)} \sin^{b_0}\theta\cos^{a_1}\theta\rho^{b_0+a_1}\Phi_0(t,s)d\rho d\theta, \quad |\Phi_0| \le M < \infty$$

Здесь $\rho_0(\theta) = (1-\varepsilon_0)\cos^{-1}\theta$, при $\theta \in [0,\pi/4]$ и $\rho_0 = \varepsilon_0\sin^{-1}\theta$, при $\theta \in [\pi/4,\pi/2]$.

Представим интеграл в $f_1\nu$, $\nu = 10$ в виде суммы интегралов N_1 и N_2 по областям $(0,\pi/4) \times (0,\rho_0)$ и $(\pi/4,\pi/2) \times (0,\rho_0)$, полагая $f_1\nu = N_1 + N_2$. В интеграле N_1 сделаем замену переменных $\eta = \sqrt{2}\sin\theta$, $\xi = \rho\rho_0^{-1}(\theta)$, а в N_2–$\eta = \sqrt{2}\cos\theta$, $\xi = \rho\rho_0^{-1}(\theta)$. Тогда полученный интеграл

$$N_1 = \int_0^1\int_0^1 \eta^{b_0}\xi^{b_0+a_1}\Phi_1(s,t)d\xi d\eta; \quad |\Phi_1| \le M < \infty, \quad (b_0, b_0 + a_1) \in (-1,0]$$

можно вычислять с помощью квадратурной формулы (16). Аналогично вычисляется и интеграл N_2.

Таким образом окончательно

$$f_1^h = f_{122}^h + N_1^h + N_2^h,$$

Индексом h отмечается приближенное значение итнтеграла.

Замечание 3. Вместо приближения функций $\Phi_{k\nu}(t,s)$ в (16) кусочно - постоянными $\Phi_{k\nu}^h = \Phi_{k\nu}(\sigma_{ij})$ можно взять для них линейную аппроксимацию:

$$\Phi_{k\nu}^h(t,s) = \Phi_{k\nu}(\sigma_{ij}) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{k\nu}(\sigma_{ij})(t-t^i) + \frac{\partial}{\partial s}\Phi_{k\nu}(\sigma_{ij})(s-s^j), \quad (t,s) \in E_{ij}.$$

5^0. **Оценка погрешности аппроксимации.** Рассмотрим произвольную функцию $F(\sigma,\omega) \in C^2(S \times Q)$, $\sigma = (t,s) \in S$, $\omega = (u,l,\alpha) \in Q = \Omega \times G$, где $u = (u_0,...,u_{n+1})$ — вектор параметров конформного отображения, $p = (l,\alpha)$ — геометрическая характеристика полигона P. Положим $||F||_s^{(k)} = ||F||_{C^k(R)}$, $R \subset S$, $||F||_\omega^{(k)} = ||F||_{C^k(Q)}, k = 0,1,2$. Введем также векторы первых и вторых производных: $D^{(1)}F = \nabla_\omega F = (\nabla_u F, \nabla_l F, \nabla_\alpha F)$, $\nabla_u F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial u_0},...,\dfrac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\right)$, $D^{(2)}F = (\nabla_\omega F_{u_0},...;\nabla_\omega F_{l_0},...;\nabla_\omega F_{\alpha_0},...)$, $F_{u_i} = \dfrac{\partial F}{\partial u_i}$,... Чтобы не различать квадратурные формулы (14) и (16) будем в (16) полагать $a_m = b_r = 0$ при $(t,s) \in T_{22}$. Соответственно этому соглашению представим квадратурные формулы (16) в ячейке $E_{ij} \in S$ в виде:

$$f^h_{k\mu} = \iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{a_m}|s-r|^{b_r}\Phi^h_k(t,s)dsdt,\ \mu = ij\ (i,j=\overline{0,N})$$

и вычислим погрешность аппроксимации $\partial_h f_{k\mu} = f_{k\mu} - f^h_{k\mu}$:

$$\partial_h f_{k\mu} = \iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{a_m}|s-r|^{b_r}\partial_h\Phi_k(t,s)dsdt,\quad \mu = ij.$$

Поскольку $f_{k\mu}(\omega) \in C^2(Q)$, то аналогичные формулы имеют место и для вектора $D^{(æ)}f_{k\mu}$:

$$\partial_h(D^{(æ)}f_{k\mu}) = D^{(æ)}\iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{a_m}|s-r|^{b_r}\partial_h\Phi_k dsdt,\quad æ = 0,1,2. \tag{17}$$

Учитывая, что $\Phi_k(t,s) \in C^2(E_{ij})$ $(a_m = b_r = 0,\ (t,s) \in S_{22})$ при произвольных $(u,p) \in (\Omega \times G)$ из (17) находим

$$||\partial_h f_{k\mu}||^{(2)}_\omega \le Mh,\quad \mu = ij\ \Big((i,j) \in \overline{0,N}\Big), \tag{18}$$

где $M = \sup\limits_{k,æ} ||D^{(æ)}\Phi_k||^{(1)}_\sigma$ $(k = \overline{1,N}, æ = 0,1,2)$. Аналогично в каждой ячейке $E_{ij} \subset S$ имеем

$$\iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{a_m}|s-r|^{b_r}dsdt = \Delta^i_m\Delta^j_r \le M_0h^{2-a}. \tag{19}$$

Здесь $a = 0$ при $a_m \ge 0,\ b_r \ge 0$; $0 \le a < 1$, когда только одно из a_m и b_r отрицательно; $0 \le a < 2$, если $a_m \le 0,\ b_r \le 0$.

Чтобы оценить величину погрешности вычисления интегралов f_k по $S = \Sigma E_{ij}$ при выбранной аппроксимации $\Phi_k(t,s)$ кусочно-постоянными $\Phi_k(\sigma_{ij})$, $(t,s) \in E_{ij}$, необходимо сделать дополнительные предположения о геометрии полигона P:

$$\alpha_k + \gamma_m - \alpha_m > 0,\quad k = \overline{1,n},\quad m = 0, n+1. \tag{20}$$

Поскольку в силу (3), $\alpha_k \ge \delta > 0$, то неравенства (20) выполняются при $\gamma_m - \alpha_m > -\delta,\ m = 0, n+1$, что соответсвует условиям на углы стыка свободной границы и полигона P.

Отметим, что при выполнении (20), постоянная a в (19) подчиняется неравенствам: $0 \le a < 1$.

Учитывая (18), (19) при условии (20), приходим к следующей оценке погрешности аппроксимации f_k :

$$||\partial_h f_k||^{(2)}_\omega \le M_1h^{1-a},\quad 0 \le a < 1\ \ (k = \overline{1,n}). \tag{21}$$

Замечание 4. Если произвести аппроксимацию $\Phi_k(t,s)$ кусочно-линейными функциями (замечание 3), то неравенства (18) примут вид

$$||\partial_h f_{k\mu}||^{(2)}_\omega \le Mh^2,\quad M = \sup_{k,æ} ||D^{(æ)}\Phi_k||^{(2)}_\sigma\ \ (\mu = ij).$$

Тогда оценка (21) усилится следующим образом

$$||\partial_h f_k||^{(2)}_\omega \le M_1h^{2-a}$$

и поскольку, в силу (3), всегда $0 \le a < 2$, то необходимость в дополнительных предположениях (20) отпадает.

6^0. **Сходимость численного метода циклической итерации.** Рассмотрим уравнение (11) для определения возмущения $v = u^{\mu_{k+1}} - u^{\mu_k}$ одного цикла метода итераций (см. 3^0). Построим аппроксимацию, входящих в коэффициенты $\dfrac{Df}{Du}$ этого уравнения интегральных операторов $f = (f_1, ..., f_n)$ по формулам предыдущего пункта. Зафиксируем шаг h сетки E так, чтобы

$$|(I - \frac{Df^h}{Du})| \ge \varepsilon_1(\delta,h) > 0 \quad \text{и} \quad ||(I - \frac{Df^h}{Du})^{-1}|| \le d_1(\delta,h) < \infty.$$

В силу оценок (21) такой выбор h возможен. Обратим оператор $\left(I - \dfrac{Df^h}{Du}\right)$ и составим аппроксимационный аналог оператора $B(v)$ в (11):

$$v = \left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)^{-1} (A^h + \Delta_p f) \equiv B^h(v), \quad v \in \Omega_q. \tag{22}$$

Выбором шага деформации $|\Delta p| \leq q \ll 1$ (неравенства (6)) добьемся того, чтобы аналогично $B(v)$ оператор B^h был сжимающим.

Теорема 1. *Аппроксимационный аналог метода циклической итерации сходится за конечное число деформаций полигона $\{P^\mu\}$ к решению уравнения (8) для заданого полигона P. На каждом цикле деформаций $P^{\mu_{k+1}} \to P^{\mu_k}$ решение соответствующего приближенного уравнения (22) может быть найдено методом итераций: $v^{(m+1)} = B^h(v^{(m)})$, $m = 0, 1, ..., v^{(0)} \in \Omega_q$.*

Список литературы

[1] Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 420 с.

[2] Монахов В. Н. Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // СМЖ. 2000. Т. 41, №5. С. 106–121.

[3] Губкина Е. В., Монахов В. Н. Фильтрация жидкости со свободными границами в неограниченных областях // ПМТФ. 2000. Т. 41, №5, С. 188–197.