ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Ю. Н. Григорьев
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: grigor@adm.ict.nsc.ru
С. В. Мелешко
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: grigor@adm.ict.nsc.ru

Fourier-transformation (FT)of the full Boltzmann equation (BE) with power interaction potentials with respect to velocity variables is used for studying of it invariant (H-)solutions. The Fourier-transformation gives an integro-differential equation for Fourier density of distribution function. The 9-parametric Lie group (algebra) admitted by this equation was obtained. Their optimal system of subalgebras was calculated and representations of classes of H-solutions with one and two independent invariant variables were found. In a class of H-solutions with one independent invariant variable for some potentials factor-equations were constructed in explicit form.

1. Введение

Интегродифференциальное кинетическое уравнение Больцмана (УБ) занимает центральное место в математическом аппарате кинетической теории газов. Среди классических кинетических уравнений УБ является наиболее сложным из-за большого числа входящих в него переменных и многомерного интегрального оператора (интеграла столкновений). Это до недавнего времени затрудняло изучение его групповых свойств и инвариантных решений (H-решений). На основе различных подходов в работах [1] – [3] для общего случая молекулярного взаимодействия была найдена 11-параметрическая группа Ли G_{11} точечных преобразований, допускаемых уравнением Больцмана. В [1] группа G_{11} была получена прямой проверкой допустимости преобразований из группы, построенной для кинетического уравнения Бхатнагара-Гросса - Крука [4], в котором итегральный оператор отсутствует. В работах [2, 3] вид допустимых преобразований постулировался. Поэтому вопрос о полноте группы G_{11} и ее известных расширений остается открытым. Значительным продвижением в дальнейших исследованиях групповых свойств полного УБ стал результат [5] об изоморфизме группы G_{11} и ее частных расширений, допустимых УБ, соответствующим группам, допускаемым системой уравнений газовой динамики при различных уравнениях состояния. Это позволило использовать для классификации инвариантных решений УБ оптимальные системы подгрупп, известные для уравнений газовой динамики [6] – [8], построение которых потребовало большого объема рутинных вычислений. На этой основе в [5, 9] были найдены представления H-решений полного УБ с произвольным сечением столкновений, зависящих от одной и двух инвариантных переменных. Следующим шагом здесь должен быть вывод фактор-уравнений и поиск их решений в явной форме. Однако сложная структура интеграла столкновений пока не дает возможности это сделать.

Вместе с тем известные инвариантные решения типа Бобылева-Крука-Ву (БКВ) [10, 11], были построены на основе Фурье-представления УБ, в котором для частного случая максвелловских молекул интеграл столкновений сильно упрощается. Для общего случая степенных потенциалов взаимодействия Фурье-представление УБ, найденное в работе [12], не приводит к таким упрощениям, хотя получающаяся структура интегрального оператора более удобна для вычислений. Это побудило нас обратиться к исследованию групповых свойств полного УБ на основе его Фурье-представления.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке интеграционного гранта СО РАН 2000, проект № 43.

2. Допустимая группа Ли полного уравнения Больцмана в Фурье-представлении

Для степенных потенциалов межмолекулярного взаимодействия Фурье-представление полного кинетического уравнения Больцмана имеет вид [12]

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{w},\mathbf{x},t)}{\partial t}+i\frac{\partial^2\phi(\mathbf{w},\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{w}}=\hat{J}(\phi,\phi), \tag{1}$$

$$\hat{J}(\phi,\phi)=C(\gamma)\int d\mathbf{w_1}\hat{B}(\mathbf{w},\mathbf{w_1})\phi(\frac{\mathbf{w}}{2}+\mathbf{w_1})\phi(\frac{\mathbf{w}}{2}-\mathbf{w_1}),$$

$$\hat{B}(\mathbf{w},\mathbf{w_1})=\int d\mathbf{n}\, g_\gamma(\frac{\mathbf{un}}{|\mathbf{u}|})[|\mathbf{w}_1-\frac{|\mathbf{w}|}{2}\mathbf{n}|^{-(\gamma+3)}-|\mathbf{w}_1-\frac{\mathbf{w}}{2}|^{-(\gamma+3)}],$$

$$\phi(\mathbf{w},\mathbf{x},t)=\int d\mathbf{v}e^{i\mathbf{wv}}f(\mathbf{v},\mathbf{x},t),\quad \hat{J}(\phi,\phi)=\int d\mathbf{v}e^{i\mathbf{wv}}J(f,f).$$

Здесь $f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)$ — функция распределения газовых молекул по скоростям, определенная в прямом произведении пространств $R^1_+\times R^3_\mathbf{x}\times R^3_\mathbf{v}$; $J(f,f)$-больцмановский интеграл столкновений [4]; $t\in R^1_+$ — время, $\mathbf{x}=(x,y,z)\in R^3_\mathbf{x}$ — пространственные координаты, $\mathbf{v}\in R^3_\mathbf{v}$ — молекулярные скорости; $\mathbf{w}=(u,v,w)\in R^3_\mathbf{w}$ — волновые векторы в пространстве, двойственном $R^3_\mathbf{v}$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор направлений;

$\hat{B}(\mathbf{w},\mathbf{w_1})$ — обобщенная функция рассеяния; $g_\gamma(\theta)$ — индикатрисса рассеяния; $\mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{w_1}$;

$$C(\gamma)=\frac{2^\gamma\pi^{-3/2}\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(-\gamma/2)}.$$

Для степенных потенциалов межмолекулярного взаимодействия $U(r)\propto r^{-(\nu-1)}(\nu>2)$ $\gamma=(\nu-5)/(\nu-1)$. Значение $\nu=5$ $(\gamma=0)$ соответствует максвелловским молекулам, а предел $\nu\to\infty$ — молекулам-твердым сферам.

Группа Ли $G(T_a)$ точечных преобразований T_a, допускаемых уравнением (1), строилась в виде

$$\phi=\psi(t,\mathbf{x},\mathbf{w};a)\phi',\ t'=\tau(t,\mathbf{x};a),\ \mathbf{x}'=\mathbf{h}(t,\mathbf{x};a),\quad \mathbf{w}'=A(t,\mathbf{x};a)\mathbf{v}+\mathbf{b}(t,\mathbf{x};a), \tag{2}$$

где a — групповой параметр, A — некоторая 3×3 -матрица. Дополнительно предполагалось, что групповое преобразование Фурье-плотности интеграла столкновений обладает следующим “скейлинговым”свойством:

$$\hat{J}(\phi',\phi')=\delta(t',\mathbf{x}',\mathbf{v}')\hat{J}(\phi,\phi).$$

Это требование является прямым обобщением свойства симметрии, найденном в [10] для частного случая максвелловских молекул.

Неизвестные функции в (2) находились с использованием основного свойства допустимой группы Ли: для каждого значения параметра a преобразование T_a переводит произвольное решение данного уравнения вновь в некоторое его решение. Подстановка (2) в уравнение (1) и использование метода расщепления [13] позволили вычислить допустимую 9-параметрическую группу $G_9(T_a)$ в явном виде. Найденной группе соответствует алгебра Ли инфинитезимальных операторов $L_9(Y)$ с базисом операторов:

$$Y_1=\partial_x,\ Y_2=\partial_y,\ Y_3=\partial_z,$$

$$Y_4=y\partial_z-z\partial_y+v\partial_w-w\partial_v,\ Y_5=z\partial_x-x\partial_z+w\partial_u-u\partial_w,$$

$$Y_6=x\partial_y-y\partial_x+u\partial_v-v\partial_u,\ Y_7=\partial_t,\ Y_8=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z-\varphi\partial_\varphi,$$

$$Y_9=t\partial_t+u\partial_u+v\partial_v+w\partial_w+(\gamma-1)\varphi\partial_\varphi.$$

Здесь ∂_r обозначает оператор дифференцирования по переменной r. Действие производной ∂_f а операторах Y_8 и Y_9 надо рассматривать как дифференцирование по Фреше.

Проведенные вычисления были выполнены *ad hoc* методом, и найденная группа $G_9(T_a)$, вообще говоря, не является полной. Доказательство полноты допустимой группы возможно только путем построения общего решения определяющих уравнений, как это было сделано, например, в цитированных выше работах [6] – [8].

3. Классификация допустимых подалгебр и вид инвариантных решений

Для классификации множества H-решений, определяемых найденной группой $G_9(T_a)$, или, что то же самое, алгеброй Ли $L_9(Y)$, необходимо построить ее оптимальную систему подалгебр Θ_L [13]. Определяемая ей классификация подалгебр позволяет разделить множество H-решений (2), инвариантных относительно группы G_{11}, на классы эквивалентности. Два H-решения ϕ_1 и ϕ_2 принадлежат одному классу эквивалентности, если существует преобразование $T_a \in G$ такое, что $\phi_2 = T_a\phi_1$. В противном случае ϕ_1, ϕ_2 принадлежат разным классам и называются существенно различными H-решениями. Список всех существенно различных H-решений (по одному представителю от каждого класса) образует оптимальную систему инвариантных решений, дающих искомую классификацию.

Меньшая, по сравнению с алгебрами [1]–[3], размерность найденной алгебры $L_9(Y)$ позволила непосредственно вычислить оптимальную систему подалгебр, применяя развитый для этого в [6] двухшаговый алгоритм. Вычисления велись по следующей схеме. Исходная алгебра представлялась в виде $L_9 = J^1 \oplus N^1$, где $J^1 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\}$ есть идеал и $N^1 = \{Y_8, Y_9\}$ подалгебра. Затем конструировалась оптимальнаая система для выделенной подалгебры, которая, в свою очередь, записывалась как $N^1 = J^2 \oplus N^2$ с идеалом $J^2 = \{Y_7\}$ и подалгеброй $N^2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$. Далее процесс повторялся: $N^2 = J^3 \oplus N^3$ с идеалом $J^3 = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ и подалгеброй $N^3 = \{Y_4, Y_5, Y_6\}$. При построении использовалась программа для символьных вычислений на языке REDUCE. Окончательный результат в виде части оптимальной системы подалгебр для алгебры $L_9(Y)$ приведен в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

r=9		
1	1,2,3; 4,5,6;7,8,9	=(9,1)
r=8		
1	1,2,3; 4,5,6; 8,9	=(8,1)
2	1,2,3; 4,5,6, 7,9+α 8	(9,1)
3	1,2,3; 4,5,6; 7,8	(9,1)
r=7		
1	1,2,3; 4; 7, 8,9	=(7,1)
2	1,2,3; 4,5,6;9+α 8 $(\alpha \neq -1)$	(8,1)
3	1,2,3; 4,5,6; 9-8	(9,1)
4	1,2,3; 4,5,6;9-8+β 7 $(\beta \neq 0)$	(8,2) $(\alpha = -1)$
5	1,2,3; 4,5,6; 8	(8,1)
6	1,2,3; 4,5,6;7	(9,1)
r=6		
1	2,3; 4; 7, 8, 9	=(6,1)
2	4,5,6;7, 8, 9	=6,2
3	1,2,3; 4; 8, 9	=(6,3)
4	1,2,3; 4;7,9+α 8	(7,1)
5	1,2,3; 4; 7, 8	(7,1)
6	1,2,3; 4,5,6	(9,1)

Система обозначений в табл. 1 заимствована из [6]. Каждая подалгебра характеризуется двойным индексом (r, i), где r есть размерность подалгебры, а i обозначает порядковый номер подалгебры данной размерности, стоящий в первом столбце таблицы. Второй столбец таблицы содержит базисы подалгебр, представленные номерами базисных операторов Y_i алгебры $L_9(Y)$. В третьем столбце двойным индексом (r', i') обозначены подалгебры- нормализаторы, которые содержатся в этой же таблице. Дополнительный знак равенства = означает, что данная подалгебра самонормализована. Здесь приведены подалгебры до размерности $r = 6$. Начиная с размерности $r = 5$ таблица становится громоздкой и ее оставшаяся часть поэтому не приводится.

Оптимальная система подалгебр позволила найти представление всех существенно различных инвариантных решений, зависящих от одной и двух инвариантных переменных, изучение которых представляет наибольший интерес. Вид этих решений дан в табл. 2. В табл. 2 двойной индекс в последнем столбце идентифицирует соответствующую подалгебру из табл. 1 и ее продолжения, которое здесь не приводится.

В ней использованы обозначения:

$$Q=\sqrt{u^2+v^2+w^2},\quad \beta\neq 0, q=\sqrt{v^2+w^2},\quad r=\sqrt{y^2+z^2},\quad k=ux+vy+w,\quad \lambda=\beta(x-\theta).$$

Дополнительный индекс S указывает, что данное решение рассматривается в сферической системе координат. При этом

$$q=\sqrt{V^2+W^2},\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Во всех решениях α и β обозначают произвольные константы.

Т а б л и ц а 2

No	Представление H-решения	Индекс
1	$t^{\gamma\beta-1}\psi(Qt^{-\beta})$	(7,2)
2	$Q^{\gamma}\psi(t)$	(7,3)
3	$Q^{\gamma}\psi(Qe^{-t})$	(7,4)
4	$t^{-1}\psi(Q)$	(7,5)
5	$\psi(Q)$	(7,6)
6	$u^{\gamma-1}x^{-1}\psi(q/u)$	(6,1)
7	$k^{\gamma-1}r^{-\gamma}\psi(rQ/k)$	(6,2)
8	$u^{\gamma}t^{-1}\psi(q/u)$	(6,3)
9	$u^{-\alpha}\psi(q/u)$	(6,4)
1	$\psi(t,Q)$	(6,6)
2	$\frac{u^{\gamma-1}}{r}\psi(\frac{vy+wz}{ru},\frac{-vz+wy}{ru})$	(5,1)
3	$u^{\gamma-1+\delta}e^{-\beta\theta}\psi(xu^{\delta}e^{-\beta\theta},q/u)$	(5,2)
4	$x^{-1}e^{(\gamma-\beta)\theta}\psi(qe^{-\beta\theta},ue^{-\beta\theta})$	(5,2)
5	$x^{-1}u^{(\gamma-1)}\psi(\theta,q/u)$	(5,2)
6	$x^{-1}u^{(\gamma-1)}\psi(xu/t,q/u)$	(5,3)
7	$x^{-1}u^{(\gamma-1)}\psi(q/u,ux^{\beta})$	(5,5)
8	$e^{(\gamma-1)\lambda}\psi(ue^{\lambda},qe^{\lambda})$	(5,6)
9	$e^{(\gamma-1)x}\psi(ue^{-x},qe^{-x})$	(5,7)
10	$u^{\gamma-1}\psi(x,q/u)$	(5,8)
11	$x^{-1}\psi(u,q)$	(5,10)
12	$(x-t)^{-1}\psi(u,q)$	(5,11)
13	$t^{\gamma\beta-1}\psi(ut^{-\beta},qt^{-\beta})$	(5,13)
14	$u^{\gamma}\psi(t,q/u)$	(5,14)
15	$e^{\gamma t}\psi(ue^{-t},qe^{-t})$	(5,15)
16	$t^{-1}\psi(u,q)$	(5,16)
17	$\psi(u,q)$	(5,17)
18	$t^{\gamma-1}r^{-\gamma}\psi(RU/t,Rq/t)$	S (5,4)
19	$U^{\gamma-1-\alpha}\psi(RU^{-\alpha},q/U)$	S (5,9)
20	$R^{-1}\psi(U,q)$	S (5,12)

4. Примеры фактор-уравнений

В качестве примера для H-решений от одной инвариантной переменной приведем вывод фактор-уравнения для класса (7,4) из табл. 2, обобщающего хорошо известное БКВ-решение для простого газа [10] на произвольные степенные потенциалы. Собственно БКВ-решению для максвелловских молекул соответствует случай при $\gamma=0$.

Для изотропного случая в пространстве волновых векторов $R^3_{\mathbf{w}}$ обобщенная функция рассеяния преобразуется к виду

$$\hat{B}(|\mathbf{w}|,|\mathbf{w_1}|,\cos\alpha)=\mathbf{2}\pi\int_{\mathbf{0}}^{\pi}\mathbf{d}\theta\sin\theta\mathbf{g}_{\gamma}(\theta)\Big[(|\mathbf{w}|^{\mathbf{2}}+|\mathbf{w_1}|^{\mathbf{2}}-|\mathbf{w}||\mathbf{w_1}|\cos\theta)^{-(\gamma+\mathbf{3})/\mathbf{2}} \tag{3}$$

$$-(|\mathbf{w}|^{\mathbf{2}}+|\mathbf{w_1}|^{\mathbf{2}}-|\mathbf{w}||\mathbf{w_1}|\cos\alpha)^{-(\gamma+\mathbf{3})/\mathbf{2}}\Big].$$

Для инвариантного решения данного класса $\phi(t, \mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^\gamma \psi(y), \quad y = |\mathbf{w}| \exp(ct)$. При этом из уравнений (1), (3) можно получить

$$cy^{(\gamma+1)} \frac{d\psi}{dy} = C(\gamma) \int_{-1}^{1} ds \int_0^\infty dz z^2 \hat{B}(y, z, s) \times \tag{4}$$

$$\times (y^2/4 + z^2 - y^2 z^2 s^2)^{\gamma/2} \psi(\sqrt{y^2/4 + z^2 + yzs}) \psi(\sqrt{y^2/4 + z^2 - yzs}).$$

При $\gamma = -1 \quad (\nu = 3)$ обобщенная функция рассеяния (3) вычисляется в явной форме. Из решения задачи рассеяния молекул [4] индикатрисса рассеяния получается в виде

$$g_\gamma(\theta) = \frac{2\pi\kappa}{m} \frac{\pi - \theta}{\theta \sin\theta (2\pi - \theta)^2}.$$

Чтобы исключить логарифмическую расходимость, интеграл в (3) был рассчитан в приближении транспортного сечения рассеяния. При этом необходимая регуляризация достигалась добавлением в подынтегральное выражение множителя $1 - \cos\theta$. В результате функция рассеяния выразилась как

$$\hat{B}(y, z, s) = \frac{\pi\kappa}{m} \Big[r_1 (z - y/2)^{-2} - r_2 (z^2 + y^2/4 - yzs)^{-1} \Big],$$

где r_1, r_2 — некоторые числовые константы.

Соответственно, для молекул-твердых сфер при $\gamma = 1$ индикатрисса имеет простой вид $g_\gamma(\theta) = d^2/4$ и обобщенная функция рассеяния дается формулой

$$\hat{B}(y, z, s) = d^2 \Big[(z^2 - y^2/4)^{-2} - (z^2 + y^2/4 - yzs)^{-2} \Big].$$

Можно заметить, что в обоих случаях “мягкого” и “твердого” потенциалов подинтегральные выражения в уравнении (4) имеют полюс в точке $z = y/2$. Чтобы придать смысл интегралу, можно воспользоваться процедурой регуляризации из теории обобщенных функций. Регуляризация подобных функционалов определяется формулой

$$\Big(\frac{1}{(x-c)^2}, \varphi(x) \Big) = \int_0^\infty dx \frac{1}{(x-c)^2} \varphi(x) =: \int_0^\infty dx \frac{1}{(x-c)^2} (\varphi(x) - \varphi(c)).$$

Заключение

Найденная оптимальная система подалгебр может служить для полного уравнения Больцмана со степенными потенциалами взаимодействия отправным пунктом программы, аналогичной той, которая была заявлена в [6] для системы уравнений газовой динамики. Естественно продолжить исследование инвариантных решений с одной и двумя независимыми инвариантными переменными, для которых уже получены функциональные представления. В частности, начать систематический вывод фактор-уравнений для найденных представлений инвариантных решений. Однако здесь в отличие от дифференциальных уравнений, где это в общем случае сводится к замене переменных в уравнениях в произвольных криволинейных координатах, процедура вывода в части преобразования интеграла столкновений не алгоритмизуется.

Тем не менее вывод фактор-уравнений и поиск их решений в явном виде для характеристических функций (Фурье-преобразований ФР) не представляется совершенно безнадежным делом. Хотя реальное продвижение потребует энтузиазма и усилий многих исследователей. Остается также открытым вопрос о полноте найденной группы $G_9(T_a)$ и ее возможных расширениях.

Список литературы

[1] Бунимович А. И, Краснослободцев А. В. Инвариантно-групповые решения кинетических уравнений // Механика жидкости и газа. 1982. № 4. С. 135–140.

[2] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Исследование инвариантных решений кинетического уравнения Больцмана и его моделей. Препринт № 18–86. ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1986. 41 с.

[3] Bobylev A. V. Boltzmann equation and group transformation // Math. Models Methods Appl. Sci. 1993. Vol. 3. P. 443–476.

[4] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.

[5] Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V., Sattayatham P. Classification of the Invariant Solutions of the Boltzmann Equation // Physics A: Mathematical and General. 1999. Vol. 32. P. L337–L343.

[6] Овсянников Л. В. Программа "ПОДМОДЕЛИ". Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. 58. P. 30–55.

[7] Головин С. В. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допустимых уравнениями газовой динамики политропного газа. Препринт института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. Новосибирск, 1996.

[8] Черевко А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допустимых уравнениями газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$. Препринт института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. Новосибирск, 1996.

[9] Grigoryev Y. N., Meleshko S. V. Classification of invariant solutions of the full Boltzmann equation // Proc. of the X-th Intern. Conf. on Waves and Stability in Continuous Media (WASCOM 99), 7-12th June, 1999, Italy.

[10] Бобылев А. В. О точных решениях уравнения Больцмана. Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 5. С. 1296–1299.

[11] Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V. Bobylev-Krook-Wu-modes for multicomponent gas mixtures // Physical Rev. Letters. 1998. Т. 81, № 1. С. 93–95.

[12] Григорьев Ю. Н., Михалицын А. Н. Спектральный метод численного решения кинетического уравнения Больцмана // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1983. Т. 23, № 6. С. 1454–1463.

[13] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[14] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Наука, 1959.