

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ОСТРЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

Е. Л. ТАРУНИН, Ю. А. ШВАРЦ
Пермский государственный университет, Россия
e-mail: tarunin@psu.ru

В условиях невесомости процессы массопереноса, связанные с архимедовой силой, существенно ослаблены. Поэтому представляет практический интерес исследование возможностей управления потоком жидкости с помощью электрического поля. Лабораторные эксперименты [1] показывают, что электрическое поле может существенно интенсифицировать теплообмен. Существует много причин, которые обуславливают появление кулоновских сил, приводящих в движение слабопроводящую жидкость в электрическом поле — инжекция зарядов с электродов, зависимости электропроводности жидкости и диэлектрической проницаемости от температуры и поля. Анализ лабораторных экспериментов электрогидродинамики (ЭГД) затруднен из-за одновременного присутствия большого числа механизмов зарядообразования слабопроводящей жидкости. В этих условиях вычислительный эксперимент позволяет расчленить механизмы и исследовать по отдельности в “чистом виде”. Пользуясь этой возможностью методом вычислительного эксперимента были изучены механизм возникновения свободной конвекции, при котором электропроводность жидкости зависит от температуры и механизм, связанный с инжекцией зарядов с поверхности электродов [2–7, 10, 14, 15, 18, 19]. Конвекция моделировалась в системах плоских, коаксиальных и острых электродов.

В данной работе описываются методические вопросы моделирования неизотермических ЭГД течений в замкнутой цилиндрической области при наличии острого электрода. Эта методика в частном своем случае использовалась и для решения ЭГД задач в изотермической постановке.

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую область (рис. 1), заполненную слабопроводящей жидкостью. Между основаниями цилиндра поддерживается постоянная разность потенциалов Φ_0 электрического поля. В центре одного из оснований (катод) имеется игольчатый выступ.

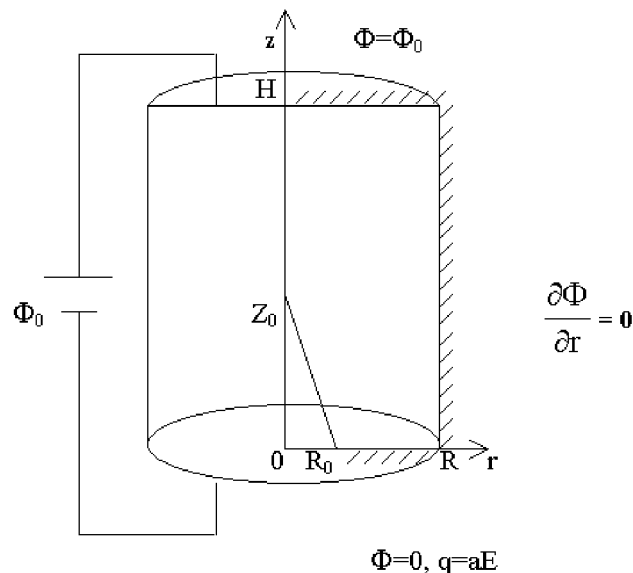


Рис. 1. Геометрия задачи.

Движение жидкости и зарядов описывается системой уравнений ЭГД. В нее входят уравнения Навье — Стокса, в которых учитывается кулоновская сила $q\vec{e}$ и уравнение непрерывности

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + q \vec{E}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

уравнения Максвелла для электрического поля в среде в ЭГД приближении

$$\operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = 4\pi q, \quad \vec{E} = -\nabla\Phi, \quad (2)$$

закон сохранения заряда, в котором полный электрический ток \vec{j} складывается из тока проводимости $\sigma \vec{E}$ и конвективного тока $q \vec{v}$, вызванного переносом зарядов движущейся жидкостью

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} + q \vec{v}, \quad (3)$$

уравнение теплопроводности с джоулевым нагревом σE^2 в качестве внутреннего источника тепла

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right] = \kappa \Delta T + \sigma E^2, \quad (4)$$

где ρ — плотность жидкости, \vec{v} — ее скорость, η — динамическая вязкость, T — температура, ϵ — диэлектрическая проницаемость, σ — электропроводность, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, κ — коэффициент теплопроводности, p — давление, q — объемная плотность зарядов, \vec{E} , Φ — напряженность и потенциал электрического поля, \vec{j} — плотность полного электрического тока. Здесь $\rho, \epsilon, \eta, c_p, \kappa$ считаются постоянными величинами, $\vec{v}, \vec{E}, \vec{j}, p, q, \Phi, T$ — неизвестные.

Полагается, что свободные заряды появляются в слабопроводящей жидкости в результате инъекции с катода. Электропроводность среды σ определяется инжектированными зарядами, подвижность которых b является линейной функцией температуры

$$\sigma = qb(T) = qb(1 + kT). \quad (5)$$

Между электродами поддерживается постоянная разница температур θ . На границе электрода-инжектора задается граничное условие для заряда, обеспечивающее появление свободных зарядов в жидкости: заряд пропорционален напряженности электрического поля (линейный закон инъекции)

$$q = aE. \quad (6)$$

Будем предполагать, что все искомые функции в системе уравнений ЭГД (1)–(5) не зависят от азимутального угла, и азимутальная компонента скорости равна нулю. Предположение осесимметричности позволяет свести задачу к двумерной и решать ее в плоскости rOz . Для решения уравнений движения жидкости (1) воспользуемся двухполюсовым методом [11, 12, 17]. Введем функцию тока ψ и вихрь скорости φ :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \varphi = \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}. \quad (7)$$

После исключения из системы уравнений ЭГД (1)–(5) напряженности электрического поля \vec{E} и плотности тока \vec{j} , обезразмеривания и перехода к переменным функция тока ψ , вихрь скорости φ система уравнений принимает вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi \right] = \Delta \varphi - \frac{\varphi}{r^2} + G_e \left[\frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \quad (8)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \left[\frac{1}{R_e} (1 + KT) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial q}{\partial r} + \left[\frac{1}{R_e} (1 + KT) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \frac{\partial q}{\partial z} = \\ = \frac{1}{R_e} (1 + KT) q^2 - \frac{K}{R_e} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] q, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta \Phi + q = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{1}{P} \Delta T + \frac{G_e}{BR_e} |q| (1 + KT) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Решение системы уравнений зависит от безразмерных параметров

$$G_e = \frac{\rho \epsilon \Phi_0^2}{4\pi\eta^2}, \quad R_e = \frac{\eta}{\rho b_0 \Phi_0}, \quad P = \frac{\eta c_p}{\kappa}, \quad B = \frac{\rho^2 c_p \theta H^2}{\eta^2}, \quad K = k\theta,$$

где G_e — электрическое число Грасгофа, R_e — электрическое число Рейнольдса, P — число Прандтля, H, b_0, θ — характерные единицы измерения расстояния, подвижности зарядов и температуры соответственно.

Система уравнений (8)–(12) решалась методом конечных разностей. Обсудим вопрос аппроксимации выступа на поверхности катода. Наиболее простой с точки зрения последующей дискретизации области является использование в качестве выступа модели стержня бесконечно малой толщины. Однако, она имеет существенный недостаток. Решение уравнение Пуассона для потенциала электрического поля в такой области имеет производную первого порядка по координате r , равную бесконечности на вершине стержня. В инжекционной модели проводимости при линейном законе инжекции (плотность зарядов на поверхности активного электрода пропорциональна абсолютной величине градиента потенциала) это приводит к бесконечному значению заряда на вершине выступа. Отметим, что в работах [8, 9] приведены расчеты ЭГД-течений именно в такой постановке (линейная инжекция, активный электрод имеет выступ бесконечно малой толщины) без учета особенности решения. Если в качестве выступа использовать конус, то производная первого порядка от потенциала электрического поля будет иметь разрыв 1-го рода на вершине выступа. В качестве модели выступа мы использовали конус со скругленной вершиной (рис. 2). В этом случае потенциал электрического поля имеет непрерывные конечные производные первого порядка во всей области, включая границу. Расчеты показали, что таким же свойством обладает и решение, к которому сходятся конечно-разностные решения уравнения для потенциала при стремлении шага сетки к нулю. В дальнейшем будем полагать, что выступ на поверхности катода имеет форму конуса со скругленной вершиной.

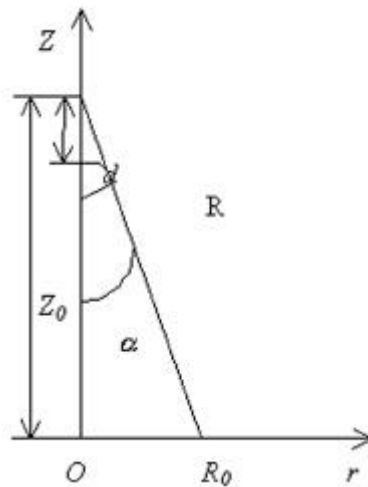


Рис. 2. Геометрия выступа на электроде.

Перейдем к дискретизации области решения задачи. Аппроксимация уравнений осуществлялась на двух видах сетки. Одна из сеток представляла собой обычную прямоугольную сетку:

$$\begin{aligned} r &= ih_r, & i &= \overline{0, N}, & h_r &= l/N_r; \\ z &= jh_z, & j &= \overline{0, N}, & h_z &= 1/N_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Введение такой сетки приводит к нестандартным шаблонам с разным расстоянием между узлами вблизи выступа. Численные эксперименты [14] показали, что решение, полученное на такой сетке, обладает сходимостью при стремлении шага сетки к нулю. Сходимость проверялась по интегральным характеристикам решения (максимальным значениям функции тока, скорости и величине полного электрического тока). Недостатком такой сетки является то, что при изменении шага сетки конечно-разностное решение меняется нерегулярно вблизи выступа. В этой области решение, вообще говоря, может не обладать сходимостью. Кроме того, при аппроксимации эволюционных уравнений в узлах такой сетки явными схемами существенно ограничивается временной шаг (расстояние между узлами сетки может быть существенно меньше шагов сетки за пределами области выступа).

Этих недостатков лишена сетка, получающаяся в результате разбиения области на равные по величине интервалы по координате z и последующего деления каждой линии сетки $z=\text{const}$ в пределах расчетной области на одно и тоже количество равных интервалов:

$$r_i = r_i(z_j) = \begin{cases} L - l_j + idr_j, & z_j < Z_0, \\ ih_r, & z_j \geq Z_0, \end{cases} \quad (14)$$

$i = \overline{0, N_r}$; $dr_j = l_j/N_r$; $h_r = l/N_r$; $l_j = L - R_0 + z_j \text{tg} \alpha$; $z_j = jh_z$; $j = \overline{0, N_z}$; $h_z = 1/N_z$; $\text{tg} \alpha = R_0/Z_0$. Эта сетка при малом количестве узлов изображена на рис. 3. Шаг сетки по координате z — постоянный, а по координате r — зависит от z .

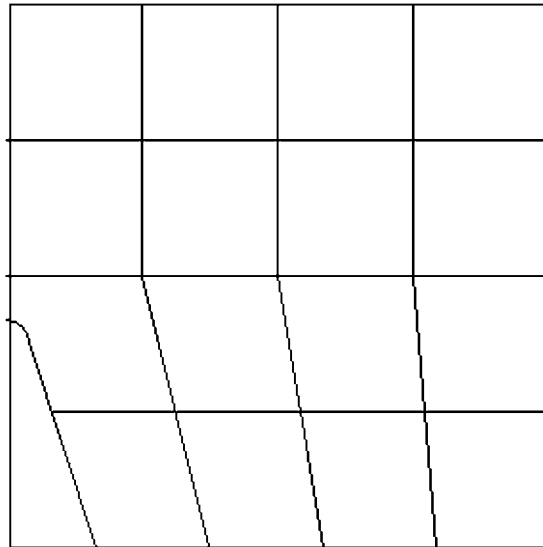


Рис. 3. Сетка при малом количестве узлов.

Расчеты течений, проведенные на двух разных сетках (13), (14) с варьированием шага сетки показали, что меньшую погрешность имеет решение, полученное на более регулярной сетке (14). Например, для максимального значения функции тока ψ_{\max} были получены следующие зависимости от шага сетки $h = \max(h_r, h_z)$ для сеток (13) и (14) соответственно

$$\psi_{\max} \approx 0,1960(1 + 5,33h),$$

$$\psi_{\max} \approx 0,1956(1 + 3,26h).$$

Эти зависимости свидетельствуют о меньшей погрешности конечно-разностного решения на сетке (14). Именно эта сетка и использовалась в расчетах ЭГД-течений при наличии острых электродов [19].

Рассмотрим аппроксимацию производных на сетке (14). Аппроксимация производных по радиусу на такой сетке является обычной. Производные по координате z можно аппроксимировать обычными способами после получения методами интерполяции значений функции в точках пересечения перпендикуляра, восстановленного в узле с индексами (i, j) до пересечения с ближайшими к этому узлу линиями сетки $z = \text{const}$ (точки А и В на рис. 4). Для вычисления значений функций в этих точках мы использовали квадратичную интерполяцию. Представим произвольную функцию u на линии сетки $z = z_j$ в окрестности узла с индексами (i, j) в виде полинома:

$$u(\bar{r}) = c_0 + c_1\bar{r} + c_2\bar{r}^2, \quad (15)$$

где \bar{r} — расстояние от узла с индексами (i, j) . Коэффициенты полинома (15) можно найти, используя значения функции u в узле (i, j) и соседних узлах $(i+1, j)$ и $(i-1, j)$. Найденные таким образом коэффициенты в обозначениях А. А. Самарского [13] имеют вид:

$$c_0 = u_{ij}, \quad c_1 = u_{\bar{r}}, \quad c_2 = 0,5u_{r\bar{r}}$$

Значения функции u в точках А и В, найденные по формуле (15), таковы:

$$u_A = u_{i,j+1} + 0,5\frac{\epsilon_i}{dr_{j+1}}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}) + 0,5\frac{\epsilon_i}{dr_{j+1}}^2(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j-1}), \quad (16)$$

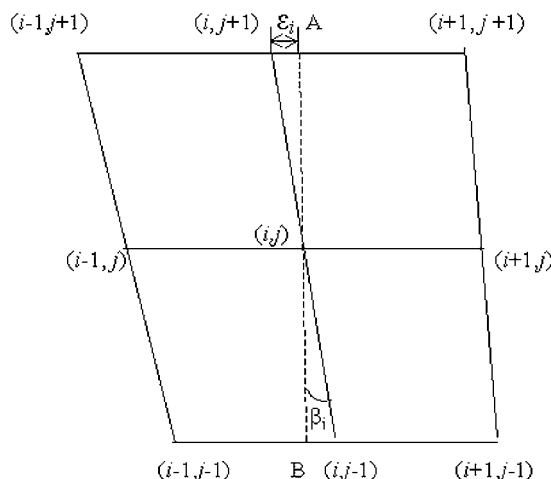


Рис. 4. Конечно-разностный шаблон для аппроксимации производных.

$$u_B = u_{i,j-1} - 0,5 \frac{\epsilon_i}{dr_{j-1}} (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}) + 0,5 \frac{\epsilon_i}{dr_{j-1}}^2 (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}), \quad (17)$$

где $\epsilon_i = h_z tq\beta_i$; $tq\beta_i = tq\alpha(1 - i/N_r)$. Зная значения функции u в точках А и В, можно аппроксимировать ее производные по координате z в узле (i, j) общепринятыми способами. Таким образом, получается, что аппроксимация уравнений осуществляется на девятиточечном разностном шаблоне.

Для аппроксимации эволюционных уравнений вихря (8) и заряда (10) использовались явные двухслойные схемы:

$$\begin{aligned} \varphi_t + \frac{V_r + |V_r|}{2} \varphi_{\bar{r}} + \frac{V_r - |V_r|}{2} \varphi_r + \frac{V_z + |V_z|}{2} \varphi_{\bar{z}} + \frac{V_z - |V_z|}{2} \varphi_z - \frac{V_r}{r} \varphi^{(n)} = \\ = \frac{1}{r} h_r [(r\varphi_{\bar{r}})_{i+0,5} - (r\varphi_r)_{i-0,5}] + \varphi_{z\bar{z}} - \frac{\varphi^{(n)}}{r^2} + G_e [q_z \Phi_{\bar{r}} - q_r \Phi_{\bar{z}}], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} q_t + \frac{U_r + |U_r|}{2} q_{\bar{r}} + \frac{U_r - |U_r|}{2} q_r + \frac{U_z + |U_z|}{2} q_{\bar{z}} + \frac{U_z - |U_z|}{2} q_z = \\ = \frac{1}{R_e} (1 + KT^{(n)}) q^{(n)} q^{(n+1)} - \frac{K}{R_e} [T_{\bar{r}}^{(n)} \Phi_{\bar{r}} + T_{\bar{z}}^{(n)} \Phi_{\bar{z}}] q^{(n)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $V_r = \frac{\psi_z}{r}$, $V_z = -\frac{\psi_r}{r}$, $U_r = V_r + \frac{1}{R_e} \Phi_{\bar{r}}(1 + KT)$, $U_z = V_z + \frac{1}{R_e} \Phi_{\bar{z}}(1 + KT)$. Конвективные слагаемые аппроксимировались разностями против потока. Как показали предварительные расчеты, аппроксимация конвективных слагаемых в уравнении вихря центральными разностями позволяет получить ЭГД-течения только при малых значениях параметра G_e (при безразмерном коэффициенте инжекции $a = 0,25$, $G_e < 4000$, $A = 4\pi Ha/\epsilon$), так как в этом случае схема имеет ограничение на счетное число Рейнольдса.

Дискретные аналоги эволюционных уравнений имеют первый порядок аппроксимации по времени и пространственным переменным. Разностные схемы (18)–(19) являются условно устойчивыми. Схема (18) для уравнения переноса и диффузии вихря имеет ограничение на временной шаг:

$$\tau < \frac{h^2}{4(1 + 0,5VH)}, \quad (20)$$

где $h = \min(h_r, h_z)$, $V = \max_{r,z}(|V_r|, |V_z|)$. Аппроксимация первого члена в правой части уравнения переноса зарядов $\frac{1 + KT}{R_e} q^{(n)} q^{(n+1)}$ повышала устойчивость схемы за счет соответствующего увеличения диагональных коэффициентов ($q < 0$, поскольку заряды инжектируются с катода). Обсудим аппроксимацию второго члена в правой части уравнения (10). В зависимости от граничных условий для температуры значение этого члена уравнения $-\frac{K}{R_e} \nabla T \nabla \Phi q$ может быть как положительным, так и отрицательным. Введем обозначение

$$\gamma = \frac{K}{R_e} \max_{r,z} |\nabla T \nabla \Phi| \text{sign}(\max_{r,z} |\nabla T \nabla \Phi|). \quad (21)$$

Если $\gamma < 0$, схема (19) устойчива при выполнении ограничения на временной шаг

$$\tau < \frac{h}{U - \gamma H}, \quad (22)$$

где $U = \max_{r,z}(|U_r|, |U_z|)$. При $\gamma > 0$ к условию устойчивости (21) добавляются еще два дополнительных условия:

$$U > \gamma H, \quad (23)$$

$$\gamma < \max_{r,z} |q| \frac{1 + K \max T}{R_e}. \quad (24)$$

Условие (23) накладывает ограничение снизу на скорость переноса зарядов, а условие (24) — на интенсивность инжекции. Как показали предварительные оценки и последующие расчеты, оба эти условия выполняются в диапазоне параметров задачи, характерных для слабопроводящей жидкости.

Уравнение теплопроводности (12) аппроксимировалось неявной двухслойной схемой

$$\begin{aligned} T_t + \frac{V_r + |V_r|}{2} T_r^{(n+1)} + \frac{V_r - |V_r|}{2} T_r^{(n+1)} + \frac{V_z + |V_z|}{2} T_z^{(n+1)} + \frac{V_z - |V_z|}{2} T_z^{(n+1)} = \\ = \frac{1}{Pr h_r} \left[(r T_r^{(n+1)})_{i+0,5} - (r T_r^{(n+1)})_{i-0,5} \right] + \frac{1}{P} T_{z\bar{z}}^{(n+1)} + \frac{G_e}{BR_e} |q| [(\Phi_r)^2 + (\Phi_z)^2] (1 + KT^{(n+1)}), \end{aligned} \quad (25)$$

При условии, что максимальный шаг пространственной сетки

$$H \leq \frac{V + \sqrt{V^2 + 4C/P}}{C}, \quad (26)$$

где $C = \frac{G_e K}{R_e B} \max_{r,z} (|q|(\nabla\Phi)^2)$, линеаризованный вариант схемы (25) устойчив при любом временном шаге. Система конечно-разностных уравнений (25) с девяти диагональной матрицей (9-ти точечный шаблон появляется из-за особенности сетки) решалась на каждом шаге методом последовательной верхней релаксации (ПВР) [17]. При этом временной шаг τ выбирался таким образом, чтобы система уравнений (25) имела диагональное преобладание. Для этого необходимо выполнение условия

$$\tau \leq \frac{1}{C}.$$

Данное условие, ограничивающее временной шаг, не является жестким. Согласно оценкам, даже при самых неблагоприятных значениях параметров из области физических значений ($R_e = 0,05$; $B = 10^{11}$; $G_e = 7 \cdot 10^2$; $K = 10$; $\max(q(\nabla\Phi)^2) = 10^2$) это ограничение на временной шаг имеет вид: $\tau \leq 10^3$.

Стационарные уравнения для ψ, φ аппроксимировались конечно-разностными аналогами

$$\frac{r}{h_r} \left[\left(\frac{1}{r} \psi_r \right)_{i+0,5} - \left(\frac{1}{r} \psi_r \right)_{i-0,5} \right] + \psi_{z\bar{z}} + r \varphi^{(n+1)} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{1}{r h_r} \left[(r \Phi_r)_{i+0,5} - (r \Phi_r)_{i-0,5} \right] + \Phi_{z\bar{z}} + q^{(n+1)} = 0. \quad (28)$$

погрешность аппроксимации которых порядка $O(h^2)$. Уравнения (27) – (28) решались на каждом временном шаге методом ПВР.

Для обеспечения сходимости конечно-разностного решения при построении аппроксимации уравнений вблизи острия выступа привлекались постулируемые параметры гладкости острия (радиус скругления вершины R). Шаг сетки по координате z всегда выбирался таким, чтобы один из узлов сетки совпадал с вершиной конуса (рис. 2). Тогда расстояние от этого узла до вершины выступа связано с радиусом скругления вершины соотношением:

$$d = R \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right).$$

Уравнения в ближайшем к острию узле, расположенном на оси симметрии $r = 0$, аппроксимировались на нестандартном шаблоне с разными расстояниями между узлами. Поскольку величина d много меньше шагов сетки h_r, h_z , для того, чтобы существенно не ограничить временной шаг, для аппроксимации эволюционного уравнения переноса зарядов в этом узле использовалась схема

$$q_t + \left[V_z + \frac{1}{R_e} \Phi_z (1 + KT) \right] q_z^{(n+1)} = \frac{1}{R_e} (1 + KT) q^{(n)} q^{(n+1)} - \frac{K}{R_e} T_z \Phi_z q^{(n+1)}, \quad (29)$$

которая абсолютно устойчива при $\delta \leq 0$ ($\delta = -\frac{K}{Re} \max_{r,z} |\nabla T \nabla \Phi|$), а при $\delta > 0$ устойчива при выполнении условия (24) при любом временном шаге.

Как известно [17], существенное влияние на устойчивость двухполюсного метода оказывает способ вычисления вихря на твердой границе. Расчеты показали, что наличие малого параметра — толщины выступа — сильно дестабилизирует процедуру двухполюсного метода. При расчете ЭГД-течений с использованием в качестве аппроксимации вихря на твердой границе формулы Тома

$$\varphi \Big|_{\Gamma} = \frac{2\psi_1}{rh^2}, \quad (30)$$

где ψ_1 — значение функции тока в приграничном узле, h — расстояние от узла до границы, была обнаружена счетная неустойчивость при малых (порядка 10^{-2} единиц высоты цилиндра) значениях радиуса основания конического выступа. С целью повышения устойчивости вычислительного алгоритма проводились исследования устойчивости двухполюсного метода при различных способах аппроксимации вихря на твердой границе: формулы Тома, Вудса, Пирсона [11, 12, 17]. Результаты исследований опубликованы в [16]. Для упрощения анализа устойчивости рассматривалась одномерная гидродинамическая задача для области между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами в предположении, что есть зависимость искомых функций только от радиуса. Выполненный анализ позволил предложить две возможности повышения устойчивости — использование формулы Вудса

$$\varphi \Big|_{\Gamma} = - \left(\frac{3\psi_1}{h^2 r} + \frac{1}{2} \varphi_1 \right) / \left(1 + \frac{h}{r} \right) \quad (31)$$

или процедуры нижней релаксации на этапе вычисления вихря скорости на границе [16, 17].

Опишем вычислительную процедуру, которая использовалась для решения неизотермических ЭГД задач. Для большинства слабопроводящих жидкостей характерны большие значения числа Прандтля. Например, для трансформаторного масла — $P = 326$, керосина — $P = 26$, бензина — $P = 9,86$. То есть характерные гидродинамическое время и время переноса тепла за счет теплопроводности существенно отличаются друг от друга. Для того, чтобы получить достаточно быстро сходящуюся вычислительную процедуру, потребовалось модифицировать стандартную процедуру двухполюсного метода решения гидродинамических задач.

Вычислительная процедура состояла из двух этапов. Сначала N -ое число шагов находились значения вихря, функции тока, а также заряда и потенциала во внутренних и граничных узлах области. Временной шаг при этом выбирался таким, чтобы обеспечить устойчивость схем эволюционных уравнений для вихря и заряда. Конечно-разностные уравнения для функции тока и потенциала электрического поля решались на каждом временном шаге методом ПВР. Значения вихря скорости на границе определялись по формуле Вудса. Поскольку уравнение переноса зарядов включает в себя производные первого порядка, задавалось одно граничное условие для заряда на поверхности активного электрода (условие инжекции). На остальных границах расчетной области заряд вычислялся из конечно-разностных аналогов уравнения переноса заряда. Последовательность действий на каждом шаге была следующей: 1) вычисление вихря и заряда во внутренних узлах; 2) решение уравнений для функции тока и потенциала электрического поля во внутренних узлах; 3) вычисление вихря и заряда на границе.

На втором этапе вычислительной процедуры для полученного приближенного решения находилось соответствующее распределение температуры в результате решения системы конечно-разностных уравнений (25) с шагом $\tau = \sum_{i=1}^N \tau_i$, где τ_i — временной шаг на i -ом шаге первого этапа. Возможность использования крупного временного шага τ обеспечивалась за счет неявности схемы для уравнения теплопроводности. Система конечно-разностных уравнений (25) решалась методом ПВР.

Описанная процедура повторялась до тех пор, пока решение с заданной точностью не выходило на стационарный режим. Выход решения на стационар определялся по интегральным характеристикам решения. Поскольку безразмерное время установления решения порядка числа Прандтля, то есть в данной задаче достаточно велико, такой алгоритм позволил существенно снизить вычислительные затраты, необходимые для получения решения.

Список литературы

- [1] БОЛОГА М.К., ГРОСУ Ф.П., КОЖУХАРЬ И.А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977.
- [2] ВЕРЕЩАГА А.Н., ТАРУНИН Е.Л. Эффективность конвективного перемешивания в замкнутой полости. Неизотермические течения вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 3–10.
- [3] ВЕРЕЩАГА А.Н., ТАРУНИН Е.Л. Устойчивость замкнутого конвективного пограничного слоя. Гидромеханика и процессы тепломассообмена. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 18–22.
- [4] ВЕРЕЩАГА А.Н., ТАРУНИН Е.Л. Надкритические режимы униполярной конвекции в замкнутой полости. Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 92–99.
- [5] ВЕРЕЩАГА А.Н. Унарная электроконвекция в плоском слое. Гидромеханика и процессы тепломассообмена. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 42–47.
- [6] ВЕРЕЩАГА А.Н., ТАРУНИН Е.Л. Надкритические режимы электро-конвекции в условиях невесомости. Известия АН БССР, серия физико-энергетических наук, № 2, 1986. С. 87–91.
- [7] ВЕРЕЩАГА А.Н., ТАРУНИН Е.Л. Численное исследование стационарных и нестационарных режимов электроконвекции в замкнутой полости. Проблемы динамики вязкой жидкости: Труды 10 Всес. семинара (Новосибирск, 1984). Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985. С. 74–78.
- [8] ЖАКИН А.И. Исследования электроконвекции и электроконвективного теплопереноса в жидких диэлектриках при униполярной инжекционной проводимости. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, № 2, 1988. С. 14–20.
- [9] ЖАКИН А.И. Развитие электроконвекции в жидких диэлектриках. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, № 1, 1989. С. 34–42.
- [10] ОКУНЕВИЧ С.Р., ТАРУНИН Е.Л. Численное исследование ЭГД-течения в кольцевом зазоре. Моделирование в механике: Сборник научных трудов. Новосибирск: СО РАН ВЦ ИТПМ, 6(23), № 1, 1988. С. 87–94.
- [11] ПОЛЕЖАЕВ В.И., БУНЭ А.В., ВЕРЕЗУБ Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987.
- [12] РОУЧ П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
- [13] САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- [14] ТАРУНИН Е.Л., ЯМШИНИНА Ю.А. Расчет электрогидродинамического течения в сильно неоднородных электрических полях. Магнитная гидродинамика, № 2, 1990. С. 142–144.
- [15] ТАРУНИН Е.Л., ЯМШИНИНА Ю.А. Ветвление стационарных решений системы уравнений электрогидродинамики при униполярной инжекции. Известия РАН. Механика жидкости и газа, № 3, 1994. С. 23–29.
- [16] ТАРУНИН Е.Л., ЯМШИНИНА Ю.А. Особенности расчета ЭГД-течений в замкнутой полости при наличии острого электрода. Моделирование в механике: Сб. научных трудов. Новосибирск: СО РАН ВЦ ИТПМ, 6(23), № 1, 1992. С. 115–122.
- [17] ТАРУНИН Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
- [18] TARUNIN E.L., YAMSHININA YU.A. Bifurcation of stationary solutions of the system of equations of electrohydrodynamics for unipolar injection. Fluid Dynamics, Vol.29, No.3, 1994. P. 319–324.
- [19] TARUNIN E.L., SCHWARZ J.A. Numerical simulation of electrohydrodynamics of dielectric liquids subjected to unipolar injection // 12th International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquids. Roma (Italy), 1996. P. 93–96.