ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Л. И. Шкутин
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: shkutin@icm.krasn.ru

Методом стрельбы численно решаются нелинейные краевые задачи осесимметричного выпучивания конических куполов под равномерным нормальным давлением. Задачи сформулированы для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с независящим от перемещений полем конечных поворотов. Рассмотрены два варианта граничных условий: шарнирное опирание и жесткое защемление. В зависимости от параметра давления и геометрических параметров куполов прослежено разветвление решений краевых задач, получены многозначные и разрывные кривые состояний равновесия, свидетельствующие о возможности катастрофы — потери устойчивости хлопком. В случае шарнирного опирания установлено наличие областей многозначности решений не только при внешнем, но и при внутреннем давлении. Для защемленного тонкостенного купола дано сопоставление теоретических и экспериментальных результатов.

Под влиянием работ [1, 2] было выполнено большое число исследований по экспериментальному и теоретическому анализу нелинейных деформаций пологих сферических куполов. Рассматривались варианты нагружения центральной сосредоточенной силой и нормальным давлением, распределенным по всей поверхности купола или по ее части. Краткое обсуждение этих исследований имеется в [3]. Численный анализ задач во всех работах выполнен в рамках нелинейной модели для пологих оболочек [4, 5]. Применялся пошаговый (по параметру нагрузки) метод решения нелинейных краевых задач осесимметричной деформации купола. Исключение составляет работа [6], в которой нелинейная задача деформации защемленного сферического купола под равномерным давлением была решена методом стрельбы. В данной работе метод стрельбы применяется для численного анализа осесимметричных деформаций конического купола — объекта, наиболее трудного для анализа из-за наличия остроконечной вершины. Нелинейная краевая задача формулируется в рамках более строгой математической модели деформации оболочек [7, 8].

Система уравнений. Рассмотрим куполообразную оболочку с осевой базовой поверхностью A. На поверхности введем криволинейную систему координат t_J с локальным ортонормированным базисом $\mathbf{a}_J(t_1, t_2)$, $J = 1, 2, 3$. Параметр $t_1 \equiv t \in [0, 1]$ отсчитывается вдоль меридиана, $t_2 \in [0, 2\pi]$ — вдоль параллели, $t_3 \in [-h, h]$ — вдоль нормали к поверхности ($2h$ — толщина купола). Введем также цилиндрическую систему координат (r, t_2, z) с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_J(t_2)$. Поверхностный базис отличается от цилиндрического поворотом на угол $\theta_2(t)$ относительно вектора $\mathbf{e}_2$, при этом $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$, а положительное направление $\mathbf{e}_2$ и положительное значение угла определяется по правилу правого винта. Соответствующее преобразование поворота выражается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

В исходном (недеформированном) состоянии базовая поверхность купола задается параметрическими уравнениями

$$r = r(t), \quad z = z(t), \quad \theta_2 = \theta_2(t) \quad \forall\, t \in [0, 1]. \tag{1}$$

По определению справедливы равенства $dr/ds_1 = \cos\theta_2$, $dz/ds_1 = -\sin\theta_2$, $ds_1 = l\,dt$, $ds_2 = r\,dt_2$, где ds_1 и ds_2 — элементы длины меридиана и параллели, l — длина образующего меридиана.

Изучается осесимметричная деформация купола, в процессе которой базовая поверхность остается осевой и представляется подобными (1) зависимостями

$$r \to z_1(t)\,, \quad z \to z_3(t)\,, \quad \theta_2 \to \theta(t) \quad \forall\, t \in [0, 1]\,,$$

где z_1 и z_2 — искомые координаты точки в цилиндрической системе, θ — искомый угол поворота локального базиса относительно цилиндрического. Матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

преобразует цилиндрический базис $\mathbf{e}_J$ в повернутый базис $\mathbf{a}_J^0 = \Theta \cdot \mathbf{e}_J$.

Для анализа осесимметричной деформации купола используются уравнения нелинейной модели произвольной оболочки с независящим от перемещений полем поворотов [7, 8]. Материал, из которого изготовлен купол, считается изотропным и линейно-упругим.

Исходная система уравнений включает моментные определяющие соотношения (следующие из (2.9) в 8])

$$\begin{aligned} &U_{11} = (1-\nu^2)F^{-1}X_{11} - \nu U_{22}\,, \quad V_{11} = (1-\nu^2)H^{-1}Y_{11} - \nu V_{22}\,, \\ &U_{13} = \gamma F^{-1}X_{13}\,, \quad X_{22} = \nu X_{11} + FU_{22}\,, \quad Y_{22} = \nu Y_{11} + HV_{22}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

кинематические зависимости (следующие из (1.6) в [8])

$$\begin{aligned} &V_{11} = (\theta - \theta_2)', \quad V_{22} = r^{-1}(\sin\theta - \sin\theta_2), \quad U_{22} = r^{-1}(z_1 - r) \\ &z_1' = (1+U_{11})\cos\theta + U_{13}\sin\theta, \quad z_3' = -(1+U_{11})\sin\theta + U_{13}\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

и статические уравнения (следующие из (1.7) в [8])

$$\begin{aligned} &(rX_1)' - X_{22} + rP_1 = 0, \quad (rX_3)' + rP_3 = 0, \\ &(rY_{11})' - Y_{22}\cos\theta - rX_{13} + rQ_2 = 0, \\ &X_{11} = X_1\cos\theta - X_3\sin\theta, \quad X_{13} = X_1\sin\theta + X_3\cos\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

В (2) – (4) $F = 2hE, 3H = 2h^3E, \gamma = 2(1+\nu)$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $U_{iJ}(t)$, $V_{ii}(t)$, $X_{iJ}(t)$, $Y_{ii}(t)$ — компоненты метрических и изгибных деформаций, усилий и моментов в повернутом базисе; $X_1(t)$, $X_3(t)$, $P_1(t)$, $P_3(t)$, $Q_2(t)$ — компоненты усилий, поверхностных сил и моментов в цилиндрическом базисе; штрих обозначает производную по s_1; $i = 1, 2$. Уравнения (2) и первые три из (3) сформулированы в повернутом базисе, (4) и последние два из (3) — в цилиндрическом.

Система уравнений (2) – (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &y_0' = \theta_2' + x^{-1}[(1-\nu^2)y_1 - \nu(\sin y_0 - \sin\theta_2)]\,, \\ &y_1' = x^{-1}(\nu y_1 + \sin y_0 - \sin\theta_2)\cos y_0 + \varepsilon^{-1}y_7\,, \\ &y_2' = \varepsilon\gamma x^{-1}y_7\sin y_0 + (1+y_8)\cos y_0\,, \\ &y_3' = \varepsilon\gamma x^{-1}y_7\cos y_0 - (1+y_8)\sin y_0\,, \\ &y_4' = x^{-1}[\nu y_6 + \varepsilon^{-1}(y_2 - x)] - xp_1, \\ &y_5' = -xp_3\,, \ y_8 = x^{-1}[(1-\nu^2)\varepsilon y_6 - \nu(y_2 - x)]\,, \\ &y_6 = y_4\cos y_0 - y_5\sin y_0\,, \ y_7 = y_4\sin y_0 + y_5\cos y_0\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где введены неизвестные функции $y_0 = \theta$, $y_1 = rY_{11}/H$, $y_2 = z_1/l$, $y_3 = z_3/l$, $y_4 = rX_1/(Cl)$, $y_5 = rX_3/(Cl)$ и параметры $p_J = P_J l/C$, $q_2 = Q_2 l^2/H$, $x = r/l$, $\varepsilon^2 = H/(l^2F) = h^2/(3l^2)$, $C = \varepsilon F$; штрих обозначает производную по независимой переменной t. Система (5) описывает нелинейный осесимметричный изгиб куполообразной оболочки при заданных значениях параметров нагрузки p_1 , p_3 , q_2 , параметров жесткости ε, γ, ν и заданных условиях закрепления опорного контура. Численному анализу были подвергнуты две нелинейные краевые задачи, моделирующие осесимметричный изгиб шарнирных и защемленных конических куполов.

Шарнирный конический купол под нормальным давлением. Исходная форма купола задается постоянными параметрами h, l и α — углом наклона меридиана к плоскости основания. Двумя последними определяются высота купола $a = l\sin\alpha$ и радиус опорного контура $b = l\cos\alpha$. Функции (1) имеют вид $r = b\,t, z = a\,(1-t), \theta_2 = \alpha$ и, следовательно, $x = t\cos\alpha$.

Изучается деформация купола под действием равномерного нормального давления интенсивности P на единицу площади исходной базовой поверхности. Компоненты поверхностной нагрузки в системе (5) задаются функциями $p_1 = -p \sin y_0$, $p_3 = -p \cos y_0$, $q_2 = 0$, где $p = Pl/C$ — нормированный параметр давления, положительный при нагружении купола извне. Рассматривается купол, шарнирно закрепленный по опорному контуру, так что в граничной точке $t = 1$ выполняются условия отсутствия момента и перемещений

$$y_1(1) = 0\,, \quad y_2(1) = \cos\alpha\,, \quad y_3(1) = 0\,. \tag{6}$$

В полюсе $t = 0$ должны быть выполнены условия симметрии

$$y_0(0) = \alpha\,, \quad y_2(0) = 0\,, \quad y_5(0) = 0\,. \tag{7}$$

Нелинейная краевая задача (5) – (7) решалась методом стрельбы: в точке $t = 1$ задавались кроме (6) еще три условия

$$y_0(1) = k_1\,, \quad y_4(1) = k_2\,, \quad y_5(1) = k_3 \tag{8}$$

и при варьировании параметров k_J численно строилось трехпараметрическое семейство решений $\mathbf{y}(t, k_J)$ одноточечной задачи (5), (6), (8) ($\mathbf{y}$ — вектор искомых функций); значения варьируемых параметров, соответствующее решению исходной краевой задачи, итерациями находились из трех условий (7), заданных в точке $t = 0$. На практике такой строгий алгоритм решения задачи оказался не эффективным из-за неустойчивости, обусловленной наличием полюсных особенностей в системе (5). Достаточная устойчивость решения по отношению к малым возмущениям граничных параметров была достигнута в модифицированном алгоритме, в котором в близкой к полюсу точке $t = \delta$ использовались приближенные равенства $X_{22} \approx X_{11}$, $Y_{22} \approx Y_{11}$, $y_5 \approx \frac{1}{2} p\, \delta^2 \cos^2\alpha$. Первые два из них становятся точными в полюсе, третье получено интегрированием на отрезке $[0\,, \delta]$ последнего уравнения из (5) при $y_0 = \alpha$. При численной реализации алгоритма использовался пакет программ Mathcad–7.

Для куполов с параметрами жесткости $\gamma = 2{,}5$, $\nu = 0{,}25$ на рис. 1 представлены кривые равновесных состояний — графики зависимости $p(w/b)$, где w — осевое перемещение вершины купола. Под рисунком указаны значения геометрических параметров α , ε куполов. Пунктирная кривая относится к шарнирной круговой пластине. При $\varepsilon = 0,025$, $0 \le \alpha \le \pi/36$ кривые состояний монотонны, при $\alpha > \pi/36$ кривые (см. *2*, *3*) имеют точки экстремума, что свидетельствует о многозначности решений краевой задачи (5) – (7) в конечном интервале $p^- \le p \le p^+$, где p^-, p^+ — минимальное и максимальное значение функции $p(w/b)$. Состояния (формы, моды) равновесия, соответствующие возрастающим от начала координат участкам кривых, условимся называть основными, а все другие — выпученными. Для неограниченно упругих куполов основные формы существуют в полубесконечном интервале $-\infty < p \le p^+$ (участки кривых для значений $p < 0$, соответствующих внутреннему давлению, не показаны на рис. 1). Кривая *3* свидетельствует о том, что при уменьшении толщины купола появляются выпученные формы в области отрицательных значений параметра нагрузки.

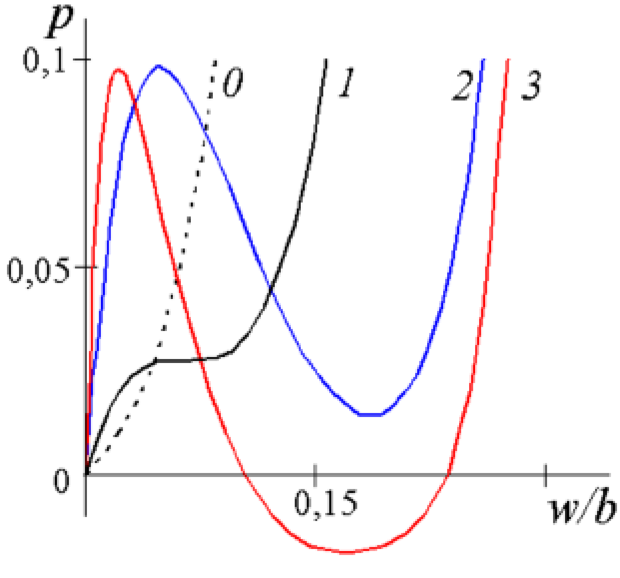

Рис. 1. Кривые равновесных состояний для шарнирных оболочек: 0 — $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0,025$; 1 — $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,025$; 2 — $\varepsilon = \pi/18$, $\varepsilon = 0,025$; 3 — $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$.

Для купола с параметрами $\alpha = \pi/18\,, \varepsilon = 0{,}013$ на рис. 2 показаны в координатах $(y/b\,, z/a)$ равновесные конфигурации (a) и радиальные усилия ($б$), соответствующие нескольким значениям пар $(p\,; w/a)$. Пунктирная линия — начальная конфигурация, *1* — основная мода для значения p, близкого к критическому значению $p^{+} \approx 0{,}098\,$, *2–6* — выпученные моды. Следует отметить, что мода *4* соответствует отрицательному значению p, а моды *2* и *5*, соответствующие значению $p = 0$, являются напряженными (в отличие от начального состояния купола) и поддерживаются радиальным опорным усилием $X_1(1)$.

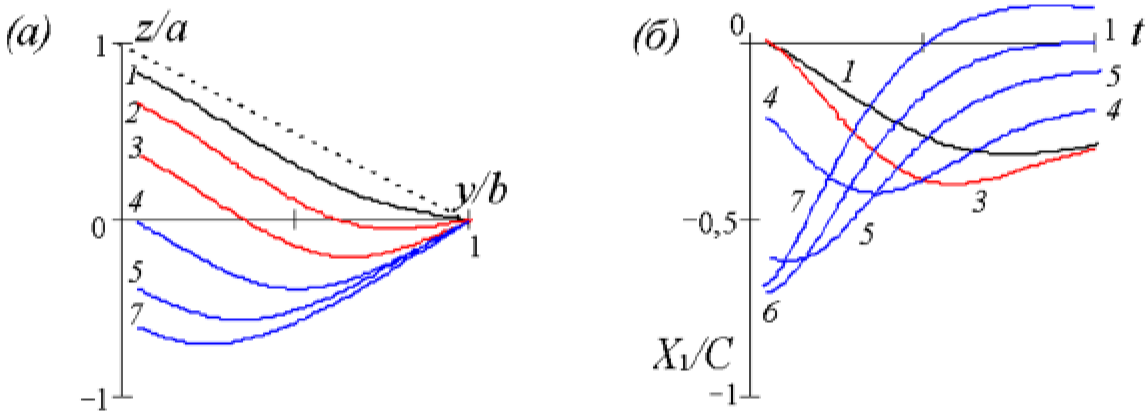

Рис. 2. Формы изгиба (a) и радиальные усилия ($б$) шарнирного купола с параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$ для значений $(p\,; w/a)$: 1 — (0,09; 0,0786); 2 — (0,06; 0,293); 3 — (0; 0,590); 4 — ($-0,02$; 0,968); 5 — (0; 1,338); 6 — (0,04; 1,469); 7 — (0,1; 1,557).

Защемленный конический купол под нормальным давлением. В отличие от (6) условия защемления купола по опорному контуру (отсутствие поворотов и перемещений) формулируются равенствами

$$y_0(1) = \alpha\,, \quad y_2(1) = \cos\alpha\,, \quad y_3(1) = 0\,. \tag{9}$$

Для защемленных куполов с теми же параметрами, что и у шарнирных, результаты численного решения нелинейной краевой задачи (5), (7), (9) методом стрельбы представлены на рис. 3, 4.

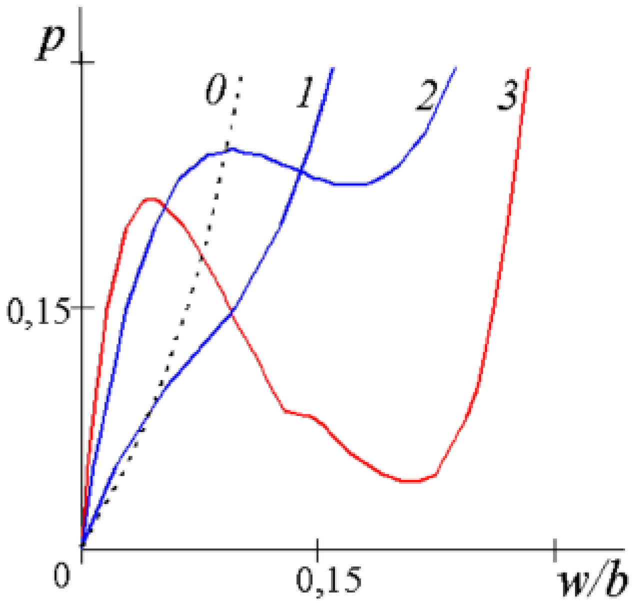

Рис. 3. Кривые равновесных состояний для защемленных оболочек: 0 — $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0,025$; 1 — $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,025$; 2 — $\varepsilon = \pi/18$, $\varepsilon = 0,025$; 3 — $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$.

Кривые равновесных состояний куполов показаны на рис. 3. Пунктирная кривая относится к защемленной круговой пластине. Вид кривых *2, 3* свидетельствует о том, что выпученные формы равновесия

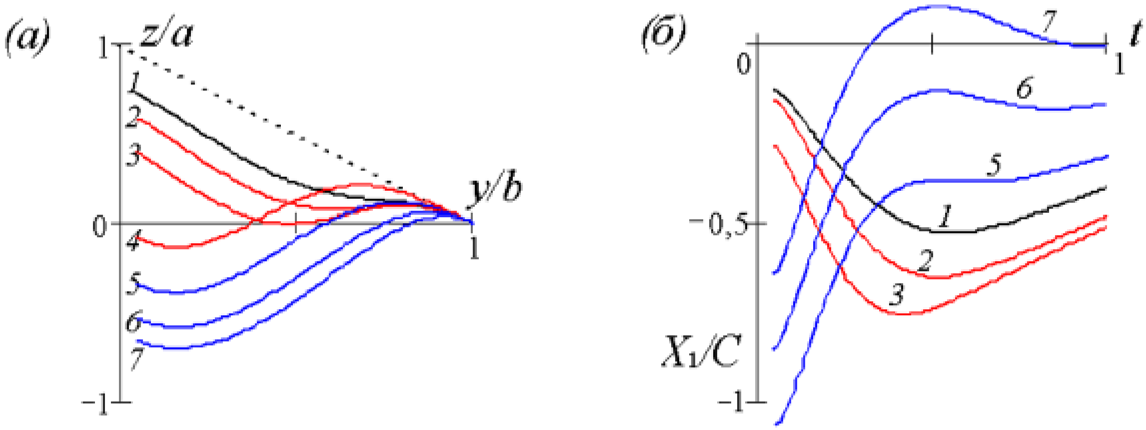

Рис. 4. Формы изгиба (*а*) и радиальные усилия (*б*) защемленного купола с параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$ для значений $(p\,; w/a)$: 1 — (0,217; 0,230); 2 — (0,2; 0,366); 3 — (0,14; 0,558); 4 — (0,05; 1,034); 5 — (0,05; 1,296); 6 — (0,15; 1,484); 7 — (0,3; 1,604).

имеются лишь в области положительных значений параметра p, а при $p = 0$ имеется только ненапряженное состояние равновесия. Для купола с параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0{,}013$ на рис. 4 показаны равновесные конфигурации (*а*) и радиальные усилия (*б*), соответствующие нескольким значениям пар $(p\,; w/a)$: *1* — основная мода для значения p, близкого к критическому значению $p^{+} \approx 0{,}0408$; *2–6* — выпученные моды.

Для сравнения с экспериментальными данными, полученными в работе [9], был выполнен расчет защемленного конического купола с параметрами $\alpha = \pi/36$, $\gamma = 2{,}7$, $\varepsilon = 0{,}0025$, $\nu = 0{,}35$. В эксперименте этим параметрам соответствовала медная коническая оболочка с толщиной $2h = 0{,}6$ мм, с диаметром основания $2b = 138$ мм, с модулем Юнга $E \approx 10^5$ МПа. Экспериментальные и расчетные результаты представлены на рис. 5 в координатах $(q\,, P)$, где q — параметр состояния, определяемый как отношение объема, заключенного между деформированной и недеформированной поверхностями купола, к начальному объему купола. Экспериментальная зависимость $P(q)$ показана на рис. 5 кривой *0*, расчетная — кривыми *1* и *2*. Как видно, расчетная кривая состояний является разветвленной. Пересечением линий *1* и *2* определяется расчетная точка бифуркации осесимметричных состояний равновесия купола.

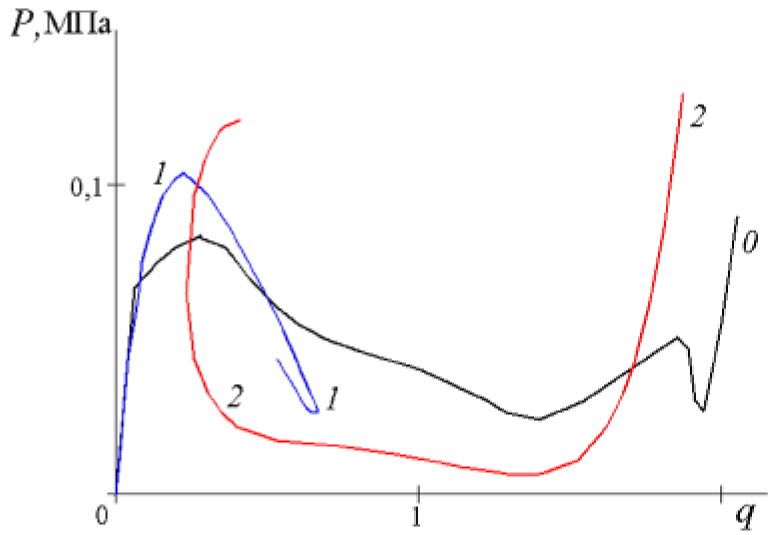

Рис. 5. Экспериментальная (*0*) и теоретические (*1*, *2*) кривые равновесных состояний купола с параметрами $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,0025$.

Заметное расхождение экспериментальных и расчетных результатов объясняется тремя существенными факторами: 1) деформация экспериментальной оболочки была близка к осесимметричной до значения $P \approx 0{,}068$ МПа, при котором началось интенсивное волнообразование (три волны) в окружном направлении (на кривой *0* это отразилось резким изменением углового коэффициента касательной ниже точки максимума) и далее продолжалось несимметричное выпучивание; 2) деформация экспериментальной оболочки не была вполне упругой: при снятии нагрузки оболочка осталась в вывернутом состоянии с явными следами пластических деформаций вдоль опорного контура и в гребнях окружных волн; 3) экспериментальную кривую состояний нельзя считать непрерывной, поскольку на ней имеются участки скачкообразного изменения давления при малом изменении объема (в окрестности точки $q = 2$); эти участки являются отображением динамических скачков из одного равновесного состояния в другое. Первым фактором объясняется отличие экспериментальной и расчетной кривых в окрестности точки максимума и на участке убывания функции $P(q)$. Двумя последними факторами можно объяснить отличие восходящих участков этих кривых в окрестности точки $q = 2$.

Следовательно, начиная с точки $q \approx 0{,}083$, экспериментальная и расчетная кривые на рис. 5 отображают разные состояния купола: первая — упруго-пластические, осциллирующие по окружной координате, вторая — упругие, осесимметричные. Совпадение этих кривых на участках возрастания от начала координат, подтверждает высокую точность постановки осесимметричной задачи и ее численного анализа.

Список литературы

[1] Biezeno C. B. Über die Bestimmung der “Durchschlagkraft” einer schwachgekrümmten, kreisformigen Platte// ZAMM. 1935. B. 15, No 1–2. S. 10–22.

[2] **Karman T., Tsien H. S.** The buckling of spherical shells on external pressure // J. Aeron. Sci. 1939. Vol. 7. P. 43–50.

[3] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.

[4] Marguerre K. Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung // Proc. 5-th Intern. Congr. Appl. Mech. N.J.: J. Willey & Son, 1939. P. 93–101.

[5] Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // ПММ. 1944. Т. 8, №2. С. 109–140.

[6] Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // ПММ. 1963. Т. 27, №2. С. 265–274.

[7] Шкутин Л. И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37, №3. С. 120–132.

[8] Шкутин Л. И. Инкрементальная модель деформации оболочки // ПМТФ. 1999. Т. 40, №5. С. 202–207.

[9] Шкутин Л. И., Шубин И. А. Экспериментальное исследование устойчивости пологих конических оболочек при статическом нагружении давлением // Прикл. механика. АН УССР, 1966. Т. 2, №6. С. 63–70.