

# ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОГО НЕВЯЗКОГО ГАЗА

С. П. БАУТИН, А. Е. БЕРДНИКОВ, Ю. Ю. ЧЕРНЫШОВ

*Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия*

e-mail: SBautin@math.usart.ru

It is proved that in heat-conducting non-viscous gas flows there are characteristic surfaces of three types: 1) two sound characteristics, which distribution velocity is  $c/\sqrt{\gamma}$ , where  $c$  is a sound velocity in a non-heat-conducting gas,  $\gamma$  is an isentropic exponent; 2) contact characteristic; 3) thermal compression wave, spreading in a given cold gas flow. It is shown that in heat-conducting non-viscous gas flows it may appear gradient disaster effect. There are proved theorems of existence and uniqueness in class of analytic functions of problems solutions about piston and about obtaining prescribed distributions. By means of special infinitely convergent series it is described one heat-conducting non-viscous gas flow, analogous to centred Riemann wave and transmitting strong compression of one-dimensional gas layers, taking into account balanced emission and Compton mechanism of photons dispersion. There is the algorithm of a calculation for flows, using a presence of sound characteristics.

## 1. Характеристики теплопроводного невязкого газа

Как известно, система уравнений газовой динамики (для невязкой нетеплопроводной сжимаемой сплошной среды) имеет гиперболический тип, и поэтому, в частности, возможны течения газа со слабыми разрывами на звуковых или контактных характеристиках [1]. Это свойство позволяет решать сложные и важные задачи (см., например, [2]). Полная система уравнений Навье — Стокса [3], описывающая течения теплопроводного вязкого газа, имеет смешанный тип, тоже возможны течения со слабыми разрывами либо на фронте тепловой волны [4], либо на контактной поверхности [5]. Исследование течений теплопроводного невязкого газа [6, 7] представляет интерес в связи с проблемой получения больших плотностей энергии [8].

Для описания течений термодинамически совершенного газа, уравнения состояния которого

$$p = R\rho T, \quad e = c_{vo}T; \quad R, c_{vo} = \text{const} > 0 \quad (1.1)$$

( $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $e$  — внутренняя энергия), в качестве независимых термодинамических переменных могут быть взяты  $\rho$  и  $T$ . Тогда, в частности, квадрат скорости звука  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)|_{S=\text{const}} = R\gamma T$ , где  $\gamma = 1 + R/c_{vo} > 1$  — показатель адиабаты газа,  $S$  — энтропия. Для течений газа с уравнениями состояния (1.1) далее в форме, приведенной ранее [9], рассматривается полная система уравнений Навье — Стокса для случая теплопроводного невязкого газа: коэффициенты динамической и объемной вязкости  $\mu$  и  $\mu'$  положены равными нулю. Тогда система уравнений, описывающая течение, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T}{\rho} \nabla \rho + \nabla T \right) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + (\gamma - 1)T \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} (\kappa \Delta T + \nabla \kappa \cdot \nabla T). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $t$  — время,  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$  — вектор скорости газа,  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  — коэффициент теплопроводности,  $\mathbf{U} = \{\rho, u_1, u_2, u_3, T\}$  — вектор искомых функций.

Далее определяется, когда поверхность  $C$  в пространстве переменных  $t, x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) будет характеристической поверхностью системы (1.2). С этой целью предполагается, что поверхность  $C$  задана в виде:  $x_1 = \psi(t, x_2, x_3)$  — и делается соответствующая замена переменных, при которой поверхность  $C$  становится новой координатной плоскостью  $\theta = 0$ . Определитель матрицы  $A_o$ , стоящей перед вектором  $\partial \mathbf{U} / \partial \theta$  не только достаточно просто считается, но и раскладывается на сомножители

$$\det A_o = \frac{1}{\rho} \Phi \kappa (D\varphi)^2 \left[ (D\varphi)^2 - \frac{1}{\gamma} T \Phi \right],$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2, \quad D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Таким образом, наличие характеристик в течениях теплопроводного невязкого газа возможно только при равенстве нулю одного из трех сомножителей

$$\kappa = 0, \quad D\varphi = 0, \quad (D\varphi)^2 - \frac{1}{\gamma} T\Phi = 0.$$

Первая возможность для наличия слабого разрыва в течениях невязкого теплопроводного газа: непрерывная состыковка холодного фона (в котором  $T = \kappa = 0$ ) с тепловой волной (у которой  $T > 0$  и  $\kappa > 0$ ).

**Теорема 1.1.** Пусть коэффициент теплопроводности  $\kappa(\rho, T)$  удовлетворяет условиям

$$\kappa(\rho, T)|_{T=0} = 0, \quad \kappa_\rho(\rho, T)|_{T=0} = 0, \quad \kappa_T(\rho, T)|_{T=0} > 0.$$

и имеется решение системы (1.2)

$$\rho = \rho_{00} = \text{const} > 0, \quad \mathbf{u} \equiv 0, \quad T \equiv 0 \quad (1.3)$$

называемое далее холодным однородным фоном. Если заданная функция  $x_1 = \psi(t, x_2, x_3)$  такова, что

$$\psi'(0, 0, 0) \neq 0$$

то при аналитичности всех входных данных поставленная задача в некоторой окрестности точки  $t = 0, x_1 = \psi(0, 0, 0)$  помимо решения (1.3) имеет еще одно аналитическое решение, непрерывно примыкающее к нему на линии  $\theta = 0$ , т. е. при  $x_1 = \psi(t, x_2, x_3)$ .

Равенство нулю сомножителя  $D\varphi = 0$  задает контактную поверхность кратности два. Транспортное уравнение (уравнение для выводящей с поверхности  $C^0$  производной  $u_1$ ) является линейным.

Равенство нулю третьего сомножителя определяет два дифференциальных уравнения, различающихся только в одном знаке и поэтому записывающихся единообразно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{T\Phi} = 0.$$

Таким образом, в течениях теплопроводного невязкого газа имеются две характеристики, обозначаемые далее  $C_\kappa^\pm$  и тоже называемые звуковыми. При этом скорость распространения (относительно рассматриваемого течения) таких характеристик в теплопроводном газе равна

$$c_\kappa = \sqrt{T}/\sqrt{\gamma} = c/\sqrt{\gamma}$$

и не зависит от коэффициента теплопроводности. Здесь  $c$  — скорость распространения звуковых характеристик нетеплопроводного невязкого газа. Следовательно, скорость звука в теплопроводном газе строго меньше скорости звука в нетеплопроводном газе.

Далее во избежания громоздкости рассматривается случай одномерных плоско-симметричных течений. В этом случае транспортное уравнение на характеристике  $C_\kappa^\pm$  для  $u_1(t)$  имеет вид

$$u_1' + u_1^2 + A(t)u_1 + B(t) = 0. \quad (1.4)$$

Из-за нелинейности уравнения (1.4) некоторые его частные решения обращаются в бесконечность при конечных значениях  $t$  — в течениях теплопроводного невязкого газа имеет место явление градиентной катастрофы.

**Теорема 1.2.** Пусть для системы (1.2) на одной из характеристик  $C_\kappa^\pm$  заданы начальные данные, удовлетворяющие соответствующим необходимым условиям разрешимости поставленной характеристической задачи Коши [12]. А также задано либо условие

$$\rho(t, \theta)|_{t=0} = \rho^0(\theta), \quad \rho^0(\theta)|_{\theta=0} = \rho_0(t)|_{t=0}$$

либо условие

$$u(t, \theta)|_{t=0} = u^0(\theta), \quad u^0(\theta)|_{\theta=0} = u_0(t)|_{t=0}.$$

Тогда при условии аналитичности всех входных данных в некоторой окрестности точки  $(t = 0, \theta = 0)$  каждая из поставленных задач имеет свое единственное аналитическое решение.

Поставленные в этой теореме задачи заключаются в получении в момент  $t = 0$  наперед заданных распределений либо плотности  $\rho = \rho^0$ , либо скорости газа  $u = u^0$ , непрерывно примыкающих к фоновому течению через слабый разрыв  $C_\kappa^\pm$ .

**Теорема 1.3.** Пусть для системы (1.2) на одной из характеристик  $C_\kappa^\pm$  заданы начальные данные, удовлетворяющие соответствующим необходимым условиям разрешимости поставленной характеристической задачи Коши. А также задано условие

$$u(t, \theta)|_{\theta=x_p(t)-\psi(t)} = x'_p(t), \quad x_p(0) = \psi(0), \quad u_0(0) = x'_p(0).$$

Тогда при условии аналитичности всех входных данных в некоторой окрестности точки  $(t=0, \theta=0)$  существует единственное аналитическое решение поставленной задачи.

Приведенное в теореме 1.3 условие есть условие непротекания на поршне, который в момент времени  $t = 0$  из точки  $x = \psi(0)$  начинает плавное движение в газе по закону  $x = x_p(t)$ : скорость поршня в момент  $t = 0$  равна скорости газа на поршне.

## 2. Аналог центрированной волны в теплопроводном газе

В задачах о сильном сжатии газа для более адекватного описания возникающих течений необходимо учитывать равновесное излучение и комптоновский механизм рассеивания фотонов [6, 7]. Далее рассматривается идеальный газ при учете равновесного излучения, т. е. в качестве уравнений состояния берутся следующие соотношения

$$p = R\rho T + \frac{\sigma}{3}T^4, \quad e = c_{vo}T + \sigma\frac{T^4}{\rho}; \quad R, \sigma, c_{vo} = \text{const} > 0. \quad (2.1)$$

В уравнениях состояния (2.1)  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана. Коэффициент теплопроводности  $\kappa$  принимается в соответствии с комптоновским механизмом рассеивания фотонов

$$\kappa = \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma c_*\alpha\frac{T^3}{\rho}; \quad \gamma - 1 = \frac{R}{c_v} > 0, \quad (2.2)$$

где  $c_*$  — скорость света,  $\alpha$  — положительная константа, зависящая от выбора системы единиц.

В случае одномерных течений ( $\nu = 0, 1, 2$  соответствует случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрий) и при введении вместо плотности в качестве искомой функции  $\vartheta = \ln \rho$  система (1.2) в случае (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta_t + u\vartheta_r + u_r + \nu\frac{u}{r} &= 0, \\ u_t + uu_r + \frac{T}{\gamma}\vartheta_r + a(\vartheta, T)T_r &= 0, \\ T_t + uT_r + b(\vartheta, T)(u_r + \nu\frac{u}{r}) &= \kappa_*c(\vartheta, T)\left(T_{rr} + \frac{\nu}{r}T_r - \vartheta_rT_r + \frac{3}{T}T_r^2\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$a(\vartheta, T) = \frac{1}{\gamma}(1 + \kappa_*k_1e^{-\vartheta}T^3); \quad b(\vartheta, T) = (\gamma-1)T\frac{(1 + \kappa_*k_1e^{-\vartheta}T^3)}{(1 + \kappa_*k_2e^{-\vartheta}T^3)},$$

$$c(\vartheta, T) = \frac{e^{-2\vartheta}T^3}{(1 + \kappa_*k_2e^{-\vartheta}T^3)}.$$

Для описания особенности, возникающей в течении газа в момент сильного сжатия, как и в случае нетеплопроводного газа [2] меняются ролями переменные  $\vartheta$  и  $r$ . Переменная  $\vartheta$  (вместе с  $t$ ) считается независимой переменной, а  $r$  становится искомой функцией от  $t$  и  $\vartheta$ . При указанной замене система (2.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} r(u - r_t) + ru_\vartheta + \nu ur_\vartheta &= 0, \\ r_\vartheta u_t + (u - r_t)u_\vartheta + \frac{T}{\gamma} + a(\vartheta, T)T_\vartheta &= 0, \\ r_\vartheta^2 [r_\vartheta T_t + (u - r_t)T_\vartheta + b(\vartheta, T)(u_\vartheta + \nu\frac{u}{r}r_\vartheta)] &= \kappa_*c(\vartheta, T)\left(r_\vartheta T_{\vartheta\vartheta} - r_{\vartheta\vartheta}T_\vartheta + \frac{\nu}{r}r_\vartheta^2 T_\vartheta - r_\vartheta T_\vartheta + \frac{3}{T}r_\vartheta T_\vartheta^2\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение системы (2.4) строится в виде ряда

$$\mathbf{U}(t, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\vartheta)\frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{U}_k(\vartheta) = \left.\frac{\partial^k \mathbf{U}(t, \vartheta)}{\partial t^k}\right|_{t=0}. \quad (2.5)$$

Чтобы искомое течение в точке  $(t = 0, r = 1)$  обладало особенностью, аналогичной особенности у центрированной волны Римана, график функции  $\vartheta = \vartheta(t, r)|_{t=\text{const}}$  при  $t \rightarrow -0$  должен переходить в вертикальную прямую [2]

$$r|_{t=0} = 1. \quad (2.6)$$

Решение системы (2.4) в виде ряда (2.5) строится при условии (2.6).

В качестве функции  $T_0(\vartheta)$  берется константа

$$T_0(\vartheta) = T_{00} = \text{const} > 0.$$

Именно это свойство температуры: отсутствие скачка у функции  $T$  в момент  $t = 0$  — наблюдается при численных расчетах соответствующей волны сжатия в теплопроводном газе в плоскосимметричном случае [7]. Тогда

$$u_0(\vartheta) = \pm \sqrt{\frac{T_{00}}{\gamma}} \vartheta + u_{00}, \quad r_1(\vartheta) = \pm \sqrt{\frac{T_{00}}{\gamma}} \vartheta + u_{00} \pm \sqrt{\frac{T_{00}}{\gamma}}.$$

В последних соотношениях в результате интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений появились две произвольные постоянные  $T_{00}$  и  $u_{00}$ , а функция  $r_1(\vartheta)$  определилась однозначно.

Чтобы получить коэффициенты  $r_{k+1}$ ,  $u_k$ ,  $T_k$  при  $k \geq 1$  необходимо первые два уравнения системы (1.4) проинтегрировать  $k$  раз по  $t$  и  $(k+1)$  раз — третье уравнение из (1.4), а затем положить  $t = 0$ . Из полученных соотношений (два из которых являются дифференциальными уравнениями) определяются

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= u'_k + u_k - F_k, \\ u_k &= u_{k0} e^{k\vartheta/2} + \frac{e^{k\vartheta/2}}{2} \int \left[ \mp \sqrt{\frac{\gamma}{T_{00}}} G_k - F_k \right] e^{-k\vartheta/2} d\vartheta, \\ T_k &= T_{k0} + T_{k1} e^\vartheta - a_k \int H_k d\vartheta + a_k e^\vartheta \int H_k e^{-\vartheta} d\vartheta, \end{aligned}$$

где  $a_k$  — некоторые константы, а функции  $F_k$ ,  $G_k$ ,  $H_k$  зависят от  $r_{\ell+1}$ ,  $u_\ell$ ,  $T_\ell$  ( $0 \leq \ell \leq k-1$ ) и их производных.

Возникший при построении ряда (2.5) произвол равносильен заданию условий

$$u(t, \vartheta)|_{\vartheta=0} = u^0(t), \quad T(t, \vartheta)|_{\vartheta=0} = T^0(t), \quad T_\vartheta(t, \vartheta)|_{\vartheta=0} = T^1(t) \quad (2.7)$$

с произвольными функциями в правых частях, но при этом

$$u^0(0) = u_{00}, \quad T^0(0) = T_{00}, \quad T^1(0) = 0.$$

**Теорема 2.1.** Если функции  $u^0(t)$ ,  $T^0(t)$ ,  $T^1(t)$ , входящие в условия (2.7) являются аналитическими в некоторой окрестности точки  $t = 0$ , то в некоторой окрестности точки  $(t = 0, \vartheta = 0)$  ряд (2.5) сходится.

Для уточнения области сходимости ряда (и прежде всего при  $\vartheta \geq 0$  в случае описания сжатия газа) детально анализируются функции  $r_{k+1}$ ,  $u_k$ ,  $T_k$  и доказывається, что область сходимости ряда (2.5), решающего задачу (2.4), (2.6), (2.7), задается формулой

$$M e^{2\vartheta} |t| < 1, \quad M = \text{const} > 0 \quad (2.8)$$

т. е. эта область является неограниченной по переменной  $\vartheta$ .

С учетом доказанных формул ряд (2.5) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \vartheta &= \left( \mp \sqrt{\frac{\gamma}{T_{00}}} u_{00} - 1 \right) \pm \sqrt{\frac{\gamma}{T_{00}}} \frac{(r-1)}{t} + t \cdot f(t, \vartheta), \\ u &= \left( \pm \sqrt{\frac{T_{00}}{\gamma}} \vartheta + u_{00} \right) + t \cdot g(t, \vartheta), \\ T &= T_{00} + t \cdot h(t, \vartheta), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функции  $f(t, \vartheta)$ ,  $g(t, \vartheta)$ ,  $h(t, \vartheta)$  являются аналитическими в области (2.8). По теореме о существовании неявно заданной функции первое из соотношений (2.9) определяет  $\vartheta$  как функцию, зависящую от переменных  $(r-1)/t$  и  $t$ . Следовательно, и другие два газодинамические параметра:  $u$ ,  $T$  — можно считать функциями от переменных  $(r-1)/t$  и  $t$ .

Известным способом [2] можно определить асимптотическое поведение при  $t \rightarrow -0$  параметров газа на поршне, который создает волну сжатия, описываемую с помощью ряда (2.5):

$$\rho|_{r=R(t)} \approx \frac{\rho_{01}}{(-t)}, \quad t < 0. \quad (2.10)$$

Здесь функция  $r = R(t)$  задает траекторию движения непроницаемого поршня.

### 3. Один алгоритм расчета течений теплопроводного невязкого газа

Как и в предыдущем параграфе рассматривается идеальный газ при учете равновесного излучения, т. е. в качестве уравнений состояния берутся соотношения (2.1), а коэффициент теплопроводности  $\kappa$  принимается в соответствии с комptonовским механизмом рассеивания фотонов, т. е. в виде (2.2). Системой уравнений с частными производными, описывающей нестационарные одномерные течения такого газа, является система (2.3). Она имеет смешанный тип — гиперболически-параболический — и обладает двумя семействами звуковых характеристик  $C_\kappa^\pm$ , траектории движения которых в плоскости переменных  $t$ ,  $r$  задаются в виде  $r = \psi(t)$  и описываются с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = \left[ u(t, r) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{T(t, r)} \right] \Big|_{r=\psi(t)}. \quad (3.1)$$

Благодаря этому свойству строится разностная схема, аппроксимирующая первые два уравнения вдоль звуковых характеристик. Третье уравнение разрешается относительно производной  $T_{rr}$  и для полученного уравнения строится соответствующий разностный аналог.

Звуковую характеристику  $C_\kappa^\pm$  будем брать в виде  $r = \psi(t)$ . В результате вместо системы (2.3) будет рассматриваться эквивалентная ей система

$$\begin{cases} \left( \frac{du}{dt} \Big|_{C_\kappa^+} \right) + \sqrt{\frac{T}{\gamma}} \left( \frac{d\theta}{dt} \Big|_{C_\kappa^+} \right) + \sqrt{\frac{T}{\gamma}} \nu \frac{u}{r} + a(\theta, T) T_r = 0, \\ \left( \frac{du}{dt} \Big|_{C_\kappa^-} \right) - \sqrt{\frac{T}{\gamma}} \left( \frac{d\theta}{dt} \Big|_{C_\kappa^-} \right) - \sqrt{\frac{T}{\gamma}} \nu \frac{u}{r} + a(\theta, T) T_r = 0, \\ \left( \frac{dT}{dt} \Big|_{C_\kappa^\pm} \right) \mp \sqrt{\frac{T}{\gamma}} T_r + b(\theta, T) (u_r + \nu \frac{u}{r}) = \kappa_0 c(\theta, T) \left( T_{rr} + \frac{\nu}{r} T_r - \theta_r T_r + \frac{3}{T} T_r^2 \right), \end{cases} \quad (3.2)$$

где в третьем уравнении каждый раз будет выбираться конкретный знак.

Течения газа строится в четырехугольной области, ограниченной двумя прямыми  $t = t_o$ ,  $t = t_*$ , где  $t_o$ ,  $t_*$  задают начальный и конечный моменты времени. Две другие границы области являются звуковыми характеристиками одного семейства (либо одновременно  $C_\kappa^+$ , либо одновременно  $C_\kappa^-$ ) (см. рис. 1). Выделены три типа точек, расчет которых производится по разным алгоритмам. Первый тип соответствует точке пересечения звуковой характеристики и линии  $t = t_o$ . Точки второго типа являются внутренними для рассчитываемой области и определяются как точки пересечения характеристик разных семейств. И наконец, точки третьего типа есть точки пересечения звуковой характеристики и прямой  $t = t_*$ . Для расчета значений параметров газа в таких точках приходится использовать соответствующие транспортные уравнения, являющиеся дифференциальным следствием первого и второго уравнения системы (3.2). Заметим, что данным алгоритмом однородный покой восстанавливается точно.

На рис. 1 изображена характеристическая сетка, а на рис. 2 поверхность температуры течения газа, определяемого следующими исходными условиями:

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{C_\kappa^+} = 0, \quad u|_{C_\kappa^+} = 0, \quad T|_{C_\kappa^+} = t^2 + 0.3.$$

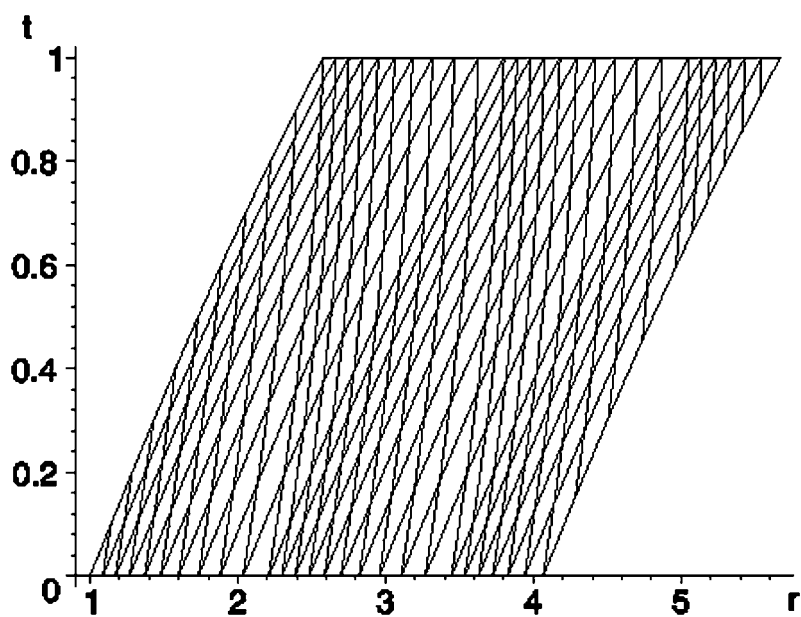


Рис. 1. Пример характеристической сетки при расчете течения теплопроводного невязкого газа.

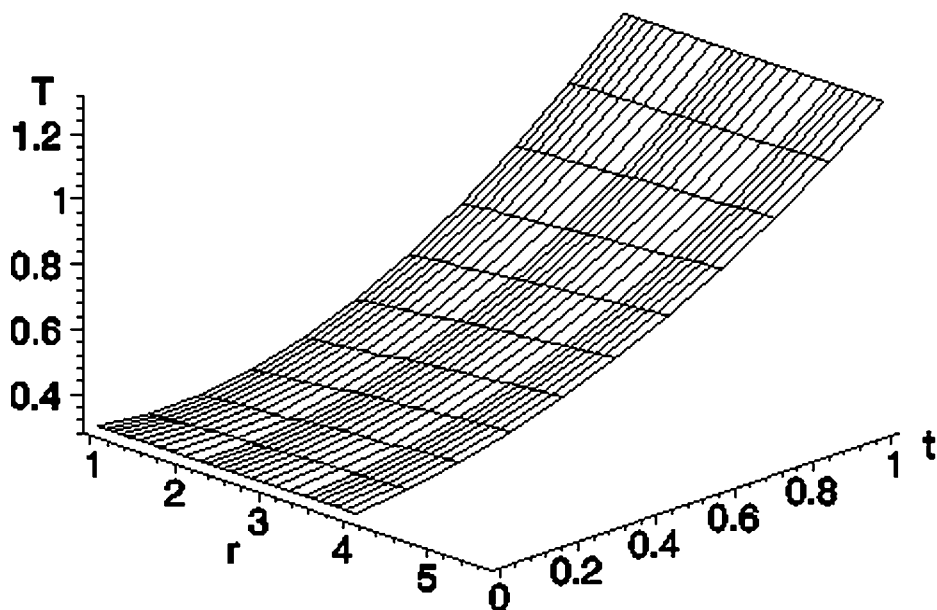


Рис. 2. Поверхность температуры при расчете течения теплопроводного невязкого газа.

## Список литературы

- [1] Овсяннико Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
- [2] БАУТИН С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [3] КОВЕНЯ В. М., ЯНЕНКО Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1983.
- [4] БАУТИН С. П. Представление решений системы уравнений Навье—Стокса с помощью характеристических рядов. Динамика сплошной среды. 1987. Вып. 83.

- [5] БАУТИН С. П. Представление решений системы Навье—Стокса в окрестности контактной характеристики. Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4.
- [6] ЗАБАБАХИН Е. И., СИМОНЕНКО В. А. Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе. Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2.
- [7] АНУЧИН М. Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя. Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39, №4.
- [8] ЗАБАБАХИН Е. И., ЗАБАБАХИН И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [9] БАУТИН С. П. Аналитическое построение течений вязкого газа при помощи последовательности линейризованных систем Навье—Стокса. Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 4.
- [10] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б. Л., ЯНЕНКО Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
- [11] ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [12] БАУТИН С. П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы. Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, №11.
- [13] БАУТИН С. П., НИКОЛАЕВ Ю. В. Об одном методе расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычислит. технологии. 2000. Т. 5, №4.