РАСЧЕТЫ СИЛЬНОГО БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ГАЗОВЫХ СЛОЕВ

Ю. В. Николаев, А. В. Рощупкин
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: ARoschupkin@lmm.usart.ru

Numerical algorithms of one and two dimensional shockless power compression are present. Results of numerical experiments are described. For one dimensional case solution of Krayko's problem about transition "from rest to rest" is constructed.

Рассматривается система уравнений газовой динамики для политропного газа.

$$\begin{cases} \sigma_t + \mathbf{V}\cdot\nabla\sigma + \dfrac{(\gamma-1)}{2}\sigma\,\mathrm{div}\mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + \mathrm{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V} + \dfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) + \dfrac{2}{(\gamma-1)}\sigma\nabla\sigma = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$, ρ — плотность, γ — константа в уравнении состояния политропного газа, $\mathbf{V}$ — вектор скорости газа, $\mathbf{U}$ — вектор неизвестных функций.

Требуется найти решения системы (1), реализующие в момент времени $t = t_*$ сжатие некоторого слоя газа до наперед заданной плотности $\rho = \rho_*$.

Математическое решение задачи о безударном сильном сжатии идеального газа подробно изложено в книге [1]. В работах [2, 3] предложен численный способ решения задачи о сжатии однородного покоящегося газа до наперед заданного значения плотности, при этом скорость сжатого газа получается ненулевой.

В данной работе численно строится решение задачи Крайко об изэнтропическом переходе из однородного состояния покоя с плотностью ρ_0 в другое состояние покоя идеального газа с большим значением плотности ρ_* [4]. Для получения такого течения ставятся три начально-краевые задачи, последовательное решение которых и определяет течения газа в задаче Крайко. Доказанные теоремы являются локальными [4]. Поэтому возникает вопрос о массе газа m_*, сжимаемой безударно, и о значении плотности ρ_*, до которой можно сжать газ. Ответ на эти вопросы можно получить с помощью численных расчетов. В частности, для построения течения в задаче Крайко применяется метод характеристик. При этом используется следующее свойство решения [1, 4]: в точке, куда приходит сжимающий поршень, решение описывается формулами, обобщающими известную центрированную волну Римана. Расчет траектории сжимающего поршня происходит в обратном направлении изменения времени. На рис. 1 приведен пример построения характеристической сетки и траектории движения поршня.

В таблице приведены результаты некоторых численных расчетов:

m_*	γ	ν	Δm
0,1	5/3	0	0,23
0,66	5/3	1	0,27
1,37	5/3	2	0,3

Здесь $\rho_* = 1$, $\rho_0 = 10^{-5}$, m_* — масса сжатого газа, γ — показатель политропы в уравнении состояния, ν — вид симметрии: 0 — плоская, 1 — цилиндрическая, 2 — сферическая, Δm — относительная погрешность (в процентах) массы, возникающая при сравнении сжатого и несжатого слоев.

Задача о безударном сильном сжатии в двумерном случае также подробно рассмотрена в монографии [1]. В работе [1] указан способ построения траектории поршня, реализующего заданное распределение плотности $\rho = \rho_*(x_1, x_2)$ в момент сильного сжатия, описаны течения, возникающие при движении поршня, и показано существование ненулевой массы газа m_*, которую можно сжать до любой наперед заданной плотности (в том числе бесконечной). Однако вопрос о том, какую именно массу газа можно безударно сжать, также как и в одномерном случае, решается с применением численных методов.

Предлагается следующий метод численного расчета безударного сильного сжатия двумерных течений: вводятся специальные криволинейные ортогональные координаты (η, ξ), учитывающие геометрию искомых течений, а также новые неизвестные функции, являющиеся некоторым аналогом инвариантов Римана в случае двумерных течений. Систему уравнений газовой динамики (1) с помощью ряда эквивалентных преобразований удается привести к виду, при котором в левых частях уравнений стоят производные вдоль определенных кривых, а в правой — неизвестные функции и их частных производных лишь по одной пространственной переменной ξ. Пользуясь методологией работ [1, 2], предложен способ построения разностной сетки, формулы расчета неизвестных функций в ее узлах и метод построения траектории поршня. Отличие от алгоритма расчета безударного сильного сжатия одномерных течений, приведенного в [2], состоит в том, что в двумерном случае рассматривается три характеристики искомых течений (две звуковые и линия тока), и в необходимости приближения производных по ξ. Расчеты ведутся в плоскостях $\xi = \xi_k = \mathrm{const}$, начиная с плоскости $\xi = \xi_0$, в которой частная производная по ξ тождественна равна нулю. Существование таких плоскостей накладывает ограничение на выбор кривых C_*, на которых в момент $t = t_*$ происходит сильное сжатие. Численное приближение производных по ξ на плоскостях ξ_k, $k > 0$, производится с помощью ранее рассчитанных плоскостей ξ_{k-1}. При построении траектории поршня участвуют все рассчитанные плоскости ξ_k, $k \geq 0$.

Сказанное иллюстрирует рис. 2, где 9-2-3-12 — звуковая характеристика фонового течения, 2-3 — кривая C_*, 1-2-3-4 — область, в которой находится сжатый газ, 9-2-5-12-3-8 и 5-2-14-3-8 — расчетные области, 10-1-4-11 — поверхность движения сжимающего поршня.

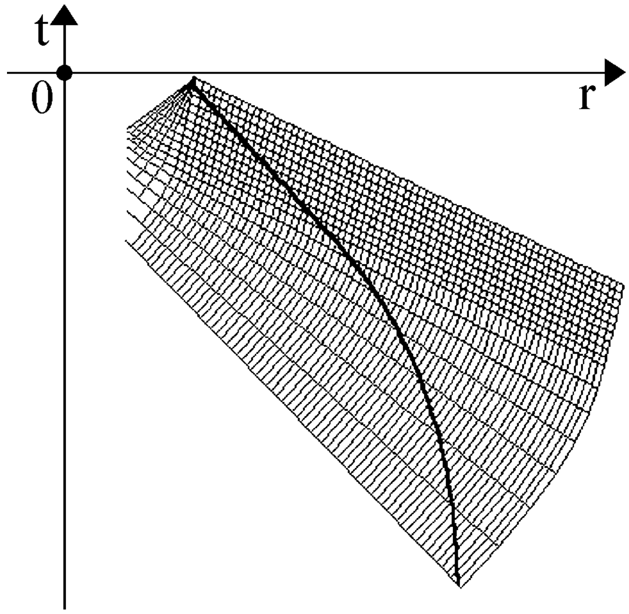

Рис. 1. Характеристическая сетка и траектория поршня при расчете течения "из покоя — в покой".

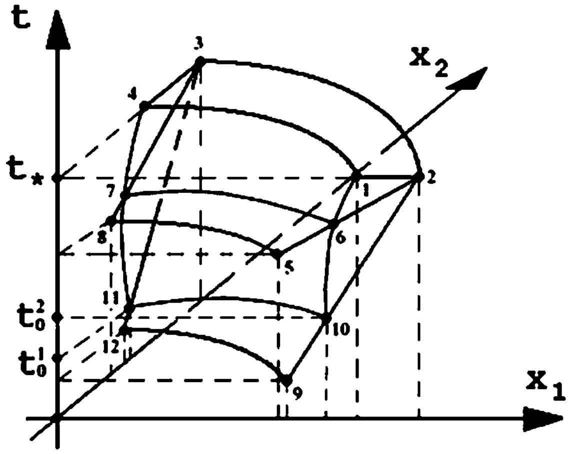

Рис. 2. Область течения при расчете сжатия двумерного слоя газа.

Алгоритм расчета безударного сильного сжатия двумерных газовых слоев при условии, что кривая C_* — окружность, допускает сравнение с алгоритмом расчета безударного сильного сжатия одномерных газовых слоев в цилиндрическом случае. Поэтому, для проверки правильности работы алгоритма [3], проведен ряд расчетов, которые сравниваются с результатами расчетов по алгоритму [2]. По результатам этих расчетов можно сказать, что при малых σ и относительно небольшом количестве характеристик, выпускаемых из особой точки, алгоритм расчета двумерного сжатия работает правильно, а полученный результат точнее. Последнее связано с наличием третьей характеристики — для ее построения требуется дополнительная точка и это приводит к тому, что на два узла расчетной сетки алгоритма расчета одномерного случая приходится три в двумерном случае.

В случаях, когда на каких-либо промежутках $\xi_0 \le \xi \le \xi^0$ кривизна линии C_* резко не изменяется не резко, то при этих значениях расчеты двумерного течения достаточно хорошо совпадают с квазиодномерными расчетами: в разных плоскостях $\xi = \xi_k$ производные по ξ полагаются нулями (т.е. производится расчет одномерного слоя), но учитывается зависимость от ξ радиуса кривизны линии C_*.

Список литературы

[1] Баутин С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

[2] Баутин С. П., Николаев Ю. В. Об одном методе расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычислит. технологии, 2000. Т. 5, №4.

[3] Баутин С. П., Рощупкин А. В. Алгоритм расчета безударного сильного сжатия двумерных газовых слоев. Екатеринбург: УрГУПС, 2000. Деп. в ВИНИТИ от 24.10.2000 за №2699-В00.

[4] Баутин С. П. О существовании решений задачи А. Н. Крайко // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, №3.