МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ВОДОРОДА С РЕАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

С. П. Баутин, С. А. Ягупов
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: SBautin@math.usart.ru

With the help of mathematical methods the opportunity isentropical to compress hydrogen with the real equation of a condition up to enough large meanings of density, at which given environment any more does not satisfy to properties normal is investigated. In space special independent variable as an infinite converging series the current describing shockless compression of flat, cylindrical and spherical layers of gas is constructed. The analysis of factors of a series shows, that at compression of hydrogen up to considered meanings of density up to the moment of strong compression in current necessarily there are infinite gradients. The automodelling decisions describing convergence of waves compression on an axis or in the centre of symmetry also are investigated. With the help of the numerical decision of the appropriate systems of the ordinary differential equations is shown, that shockless the compression originally homogeneous and quiet cylindrical and spherical volumes of hydrogen with the given equation of a condition is possible only up to the appropriate meanings of density.

Получение больших значений плотности у определенных сплошных сред представляет интерес для проблемы управляемого термоядерного синтеза [1]. В книге [2] предложен единый подход к математическому исследованию безударного сильного сжатия газа. В том числе для газа с произвольным уравнением состояния построен аналог центрированной волны Римана, непрерывно примыкающий к однородному покоящемуся газу. Тем самым доказана возможность безударно сжать газ с произвольным уравненим состояния до некоторой плотности, строго больше первоначальной. Очевидно, что для более детального описания процесса сжатия требуется конкретизировать уравнение состояния газа. При этом желательно рассматривать реальные уравнения состояния, определяемые в соответствующих физических экспериментах (см., например, [3, 4]).

В работе [5] в соответствии с упомянутым выше подходом [2] исследовано безударное сильное сжатие воздуха с реальным уравнением состояния, приведенном в [3]. Доказано, что нельзя безударно сжать такой газ выше некоторого значения плотности. Этот факт является, скорее всего, следствием того, что приведенное в [3] уравнение состояния недостаточно адекватно описывает термодинамические свойства воздуха при очень больших степенях сжатия.

Целью данной работы является математическое исследование безударного сильного сжатия водорода с реальным уравнением состояния в условиях перехода из молекулярного состояния в атомарное.

В книге [4] в виде графика (см. рис. 1) приведена зависимость давления p от плотности ρ: $p = p(\rho)$ — описывающая изэнтропическое сжатие водорода до очень больших значений плотности. Видно, что в диапазоне изменения плотности: $0.9\,\text{г/см}^3 < \rho < 1.4\,\text{г/см}^3$ — скорость нарастания давления существенно меняется. Физики связывают данную аномалию в поведении давления с переходом водорода при этих условиях из молекулярного состояния в атомарное [4]. Приведенная на рис. 1 зависимость $p = p_*(\rho)$ в диапазоне: $0.2\,\text{г/см}^3 < \rho < 1.8\,\text{г/см}^3$ — достаточно хорошо аппроксимируется рациональной функцией

$$p(\rho) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{5} a_k \rho^k}{1 + \sum\limits_{k=1}^{5} b_k \rho^k}. \qquad (1)$$

При значениях коэффициентов: $a_0 = 0.17267$, $a_1 = -10.45064$, $a_2 = 222.94558$, $a_3 = -491.76923$, $a_4 = 374.52811$, $a_5 = -92.79727$, $b_1 = -2.88596$, $b_2 = 3.16174$, $b_3 = -1.66439$, $b_4 = 0.45715$, $b_5 = -0.05961$ — средняя относительная погрешность не превышает $0.5\,\%$, а максимальная относительная погрешность меньше $1.5\,\%$.

Поскольку в диапазоне изменения плотности: $0.9\,\text{г/см}^3 < \rho < 1.4\,\text{г/см}^3$ — производная $p'(\rho)$ (которая есть квадрат скорости звука $c^2 = p'(\rho) > 0$) не является монотонной функцией, то вторая производная

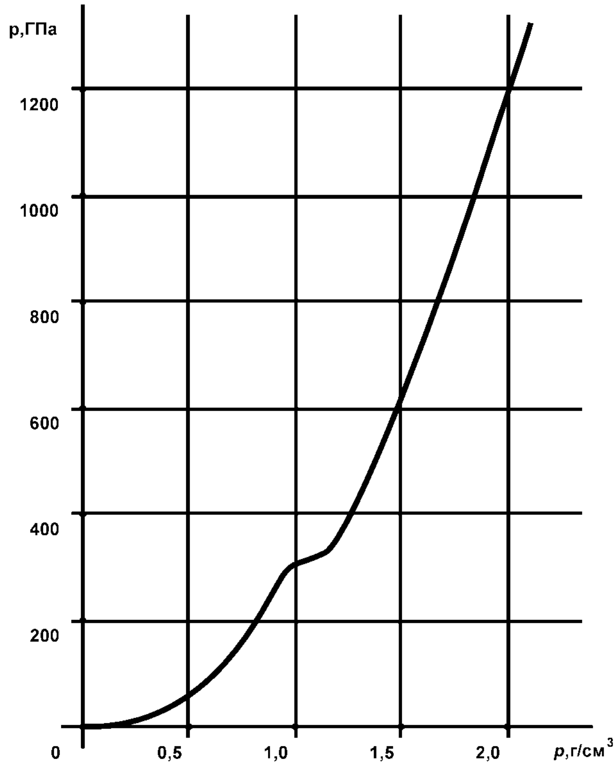

Рис. 1. Зависимость давления (ГПА) от плотности (г/см^3) при изэнтропическом сжатии.

$p''(\rho)$ имеет разные знаки на разных участках изменения ρ. Следовательно, рассматриваемая среда при $0.9\,\text{г/см}^3 < \rho < 1.4\,\text{г/см}^3$ не является нормальным газом [6].

Для описания одномерных изэнтропических течений данного газа используется система уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned} &\rho_t + u\rho_r + \rho\left(u_r + \nu\frac{u}{r}\right) = 0,\\ &u_t + uu_r + \frac{1}{\rho}c^2(\rho)\rho_r = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В системе (2) значения константы $\nu = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии; t — время; $r = \left(\sum\limits_{i=1}^{\nu+1} x_i^2\right)^{1/2}$; x_i — пространственные координаты ($i = 1, 2, 3$); u — скорость газа.

Система (2) записана в безразмерных переменных, введенных стандартным образом. При этом за масштаб плотности взято значение $\rho_o = 0.5\,\text{г/см}^3$ с тем, чтобы исследовать свойства решения системы (2) при изменении ρ на самом интересном интервале. За масштаб скорости взято размерное значение $c_o = 16.76 \cdot 10^3$м/сек, получившееся из зависимости (1) при $\rho_o = 0.5\,\text{г/см}^3$. В этом случае зависимость квадрата безразмерной скорости звука от безразмерной плотности аппроксимируется своей рациональной функцией, являющейся производной функции (1) (после введения в (1) безразмерных переменных). График функции $c^2(\rho)$, используемой далее в системе (2) приведен на рис. 2. При $1.73 \le \rho \le 2.105$ $c^2(\rho)$ является убывающей функцией.

Для того, чтобы описать безударное сильное сжатие одномерного слоя газа в момент $t = 0$ в точке $r = 1$ используется соответствующее обобщение [2] центрированной волны Римана. При этом меняются ролями ρ и r: r (наряду с u) считается искомой функцией от t и ρ. Система (2) в этом случае записывается следующим образом

$$\begin{aligned} &r(u - r_t) + \rho(ru_\rho + \nu u r_\rho) = 0,\\ &r_\rho u_t + (u - r_t)u_\rho + \frac{c^2(\rho)}{\rho} = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

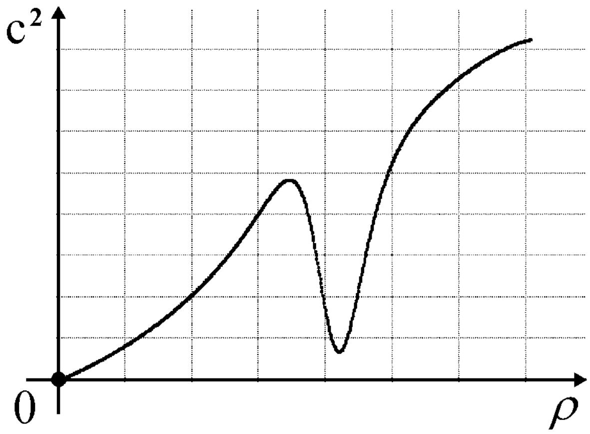

Рис. 2. Зависимость квадрата безразмерной скорости звука от безразмерной плотности.

а требуемое решение ищется в виде ряда

$$\mathbf{U}(t,\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{U}_k(\rho)\frac{t^k}{k!},\quad \mathbf{U}=\{r,u\} \tag{4}$$

при одном пока условии

$$r|_{t=0}=1. \tag{5}$$

Если в системе (3) положить $t=0$ и учесть условие (5), то коэффициенты $u_0(\rho)$ и $r_1(\rho)$ ряда (4) определяются из следующих соотношений

$$u_0'(\rho)=\pm\frac{c(\rho)}{\rho}, \tag{6}$$

$$r_1(\rho)=u_0(\rho)\pm c(\rho). \tag{7}$$

В формулах (6), (7) верхний знак соответствует случаю сжатия слоя газа изнутри. Тогда характеристикой, разделяющей волну сжатия и однородный покой, является C^+-характеристика. Нижний знак берется при сжатии слоя газа снаружи и разделяющей является C^--характеристика.

Уравнение (6) является обыкновенным дифференциальным уравнением, у которого при задании начального условия: $u_0'(1)=u_{00}$ существует единственное аналитическое решение. Решение этой задачи строится численно и функция $u_0(\rho)$ является монотонной во всем рассматриваемом диапазоне изменения ρ. После определения $u_0(\rho)$ коэффициент $r_1(\rho)$ однозначно определяется из соотношения (7) и тоже является аналитической функцией. Однако эта функция уже не является монотонной. Например, при $u_{00}=-1.2$ в точках $\rho\approx1.8$, $\rho\approx2.1$ у функции $r_1(\rho)$ имеются локальные экстремумы. Заметим, что если бы функция $c^2(\rho)$, оставаясь убывающей на том же отрезке, имела бы другие значения максимума и минимума, то тогда функция $r_1(\rho)$ стала бы монотонной.

Для того, чтобы найти последующие коэффициенты ряда (4): $u_k(\rho)$, $r_{k+1}(\rho)$ $(k\geq1)$ — систему (3) необходимо дифференцировать k раз по t, в полученные соотношения подставлять $t=0$ и ранее найденные коэффициенты. С помощью первого из полученных соотношений

$$u_k'-r_{k+1}+\rho u_k'+F_k=0$$

из второго соотношения исключается r_{k+1}. В результате для $u_k(\rho)$ получается дифференциальное уравнение

$$\mp2c(\rho)u_k'+kr_1'(\rho)u_k=H_k,$$

у которого при задании начального условия: $u_k(1)=u_{k0}$ — существует единственное аналитическое решение. После его определения коэффициент $r_{k+1}(\rho)$ однозначно определится из приведенного выше соотношения и также является аналитической функцией. Функции F_k и H_k, входящие в последние два уравнения, известным образом зависят от предыдущих коэффициентов ряда (4). Возникший при построении $u_k(\rho)$ произвол: $u_k(1)=u_{k0}$, $k\geq0$ — известным образом [2] используется для того, чтобы удовлетворить условию непрерывного примыкания волны сжатия (решения (4)) через звуковую характеристику к однородному покоящемуся газу.

Применяя изложенную в [2] методику доказывается, что в пространстве переменных t, ρ ряд (4) сходится при любом положительном значении ρ.

Восстановить течение газа в пространстве независимых переменных t, r можно только при условии отличия от нуля якобиана перехода от независимых переменных t, ρ к переменным t, r: $J = -r_\rho$.

В момент сильного сжатия, т. е. при $t = 0$, в силу условия (5) заведомо $J = 0$. Этот факт является следствием того, что ряд (4) в случаях $\nu = 1, 2$ описывает течение, которое при $t \to 0$ является обощением центрированной волны Римана. При $\nu = 0$ ряд (4) обрывается и получившееся точное решение является центрированной волной

$$r(t,\rho) = 1 + r_1(\rho)t, \quad u(t,\rho) = u_0(\rho). \tag{8}$$

Однако, помимо момента сильного сжатия $t = 0$ из-за немонотонности коэффициента $r_1(\rho)$ на плоскости переменных t, ρ имеются еще точки, в которых якобиан

$$J = -r_\rho = -t\left\{r_1'(\rho) + t\left[\sum_{k=2}^{\infty} r_k'(\rho)\frac{t^{k-2}}{k!}\right]\right\} \tag{9}$$

обращается в ноль.

В частности, при $\nu = 0$ имеют место соотношения (8) и поэтому при любых значениях $t \neq 0$ на прямой $\rho = \rho_*$ получается равенство: $J = 0$. Здесь ρ_* есть то значение плотности, при котором у функции $r_1(\rho)$ имеется ближайший к точке $\rho = 1$ экстремум.

В случаях $\nu = 1, 2$ в силу сходимости ряда (4) второе слагаемое в фигурных скобках из соотношения (9) при t, близких к нулю, также будет близко к нулю. Поэтому найдется значение ρ, близкое к ρ_*, при котором обратится в ноль все выражение в фигурных скобках из (9).

Равенство нулю прозводной r_ρ эквивалентно равенству бесконечности производной ρ_r. Следовательно, в соответствующих точках пространства физических переменных в течении газа возникает бесконечный градиент еще до момента сильного сжатия. А это в свою очередь приводит к возникновению ударных волн. Следовательно, безударно сжать одномерный слой рассматриваемого газа до плотности, большей $\rho = \rho_*$, невозможно.

Еще раз подчеркнем, что если бы функция $c^2(\rho)$, оставаясь убывающей на упомянутом отрезке изменения плотности, имела бы другие значения максимума и минимума, то тогда функция $r_1(\rho)$ стала бы монотонной и безударное сжатие до больших значений плотности было бы возможно.

Чтобы описать фокусировку автомодельных волн сжатия на ось или в центр симметрии делается замена переменных: $\xi = t/r$, $\tau = t$ — и полагается $\partial/\partial\tau = 0$. В результате вместо системы (2) получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &(1-\xi u)\rho_\xi - \xi\rho u_\xi = -\nu\rho u\ , \\ &-\frac{\xi}{\rho}c^2(\rho)\rho_\xi + (1-\xi u)u_\xi = 0\ . \end{aligned} \tag{10}$$

В случае $\nu = 0$ эта система является однородной и для того, чтобы она имела не только тривиальное решение необходимо потребовать равенства нулю определителя этой системы: $\Delta = (1-\xi u)^2 - \xi^2 c^2(\rho)$. Данное условие приводит к равенствам

$$(1-\xi u) = \pm\xi c(\rho), \quad du/d\rho = \pm c(\rho)/\rho, \quad \xi = 1/[u(\rho) \pm c(\rho)].$$

В результате получается выписанное выше решение (8).

В случаях $\nu = 1, 2$ система (10) не является однородной и может быть переписана в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \rho_\xi &= -\nu\frac{\rho u(1-\xi u)}{[(1-\xi u)^2 - \xi^2 c^2(\rho)]}, \\ u_\xi &= -\nu\frac{\xi c^2(\rho)u}{[(1-\xi u)^2 - \xi^2 c^2(\rho)]}. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку функция $c^2(\rho)$ не является монотонной, то систему (11) невозможно свести к одному уравнению, как это сделано в случае политропного газа [7].

Численное решение системы (12) позволило выявить фокусировку “не очень сильных” волн сжатия, через слабый разрыв примыкающих к однородному покоящемуся газу. Такое течение получается, например, при следующих начальных условиях для системы (11): $\rho(\xi)|_{\xi=0} = 1$, $u(\xi)|_{\xi=0} = -0.1$. В этом случае при $\xi = \xi_* \approx -1.125$:

$$u(\xi_*) = 0, \quad \rho(\xi_*) = \rho_*, \quad c(\rho_*) = -1/\xi_*.$$

Попытки рассчитать автомодельные решения со значениями плотности из диапазона немонотонности функции $c^2(\rho)$ приводят к появлению в течении бесконечных градиентов.

Список литературы

[1] Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.

[2] Баутин С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

[3] Броуд Д. Расчеты взрывов на ЭВМ. Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1976. №4.

[4] Экстремальные состояния вещества и ударные волны. Под ред. В. Е. Фортова и др. М.: Наука, 2000.

[5] Ягупов С. А. Безударное сильное сжатие воздуха с реальными уравнениями состояния. Екатеринбург: УрГУПС, 2000. Депонировано в ВИНИТИ 06.12.00, №3075–В00.

[6] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

[7] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.