МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУШКИ СЛОЯ ЛЕСНЫХ ГОРЮЧИХ МАТЕРИАЛОВ

А.М. ГРИШИН, Л.Ю. КАТАЕВА, Е.Л. ЛОБОДА
Томский государственный университет, Томск, Россия
e-mail: fire@fire.tsu.tomsk.su

Дается новая упрощенная математическая постановка задачи о сущке слоя лесных горючих материалов (ЛГМ). В результате численного и аналитического решения этой задачи получена приближенная аналитическая формула для времени сушки ЛГМ.

1. Постановка задачи.

Наиболее полная и поэтому наиболее точная математическая модель сушки ЛГМ дана в [1]. В рамках нее учитывается сопряженный тепло- и массообмен между слоем ЛГМ и приземным слоем атмосферы с учетом излучения Солнца и испарения воды в свободном и связанном с ЛГМ состоянии по закону Герца-Кнудсена, а также перенос излучения в самом слое в рамках диффузионного приближения. Недостатком этой постановки является обилие эмпирических констант и функций и большое количество нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Допустим, что:

1) конвективный теплообмен между слоем ЛГМ и приземным слоем атмосферы удовлетворительно описывается с помощью граничных условий третьего рода с использованием известных коэффициентов конвективного теплообмена [2];
2) парциальное давление паров воды в слое ЛГМ пренебрежимо мало по сравнению с давлением насыщенных паров;
3) давление P, температура T и плотность ρ газовой фазы в слое ЛГМ совпадают с соответствующими метеорологическими данными (P_e, T_e и ρ_e) для данного момента времени и данной местности;
4) излучение в слое ЛГМ подчиняется закону Бугера-Ламберта [3].
5) Испарение связанной воды и капелек воды, прилипших к элементам ЛГМ описывается одним и тем же законом Герца-Кнудсена.

В результате для математического описания сушки слоя ЛГМ имеем следующую систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{2}\rho_i\varphi_i C_{pi}\frac{\partial T_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_s\frac{\partial T_s}{\partial z}\right)-\frac{\partial q_{Rz}}{\partial z}- -q_2\frac{\rho_2 k'_{02}}{\sqrt{T_s}}\varphi_2\exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right)-\alpha_v\left(T_s-T_e\right), \tag{1}$$

$$\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=-\frac{k'_{02}}{\sqrt{T_s}}\varphi_2\exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right), \tag{2}$$

$$q_{Rz}=q_{Rw}(1-\varphi_w)\exp\left[k_1\rho_1(z-h)\right], \tag{3}$$

$$q_{Rw}=(1-A)q_R(h)\cos\alpha-\varepsilon_s\sigma T_{sw}^4+J_w\cos\alpha, \tag{4}$$

которую необходимо решать с учетом следующих начальных и граничных условий

$$T_s\big|_{t=0} = T_{sH}\,,\ \varphi_i\big|_{t=0} = \varphi_{iH}\,, \tag{5}$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z}\bigg|_{z=h} = \alpha_e\left(T_{sw} - T_e\right) + q_2 R_{2w} - \varphi_w q_{Rw}\,, \tag{6}$$

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \alpha_0\left(T_{s0} - T_0\right) + q_{Rw}(1-\varphi_w)\exp(-k_1\rho_1)\,. \tag{7}$$

Здесь z – координата, отсчитываемая от поверхности почвы, перпендикулярно подстилающей поверхности; t – время; T_s - температура конденсированной фазы; λ_s – коэффициент теплопроводности конденсированной фазы в слое ЛГМ; α_e и α_0 – коэффициенты теплообмена на верхней и нижней границах слоя соответственно; T_0 – температура почвы; $\alpha_v = \alpha_e S$ – коэффициент объемного конвективного теплообмена; S – удельная поверхность макропор; ρ_i, C_{pi}, φ_i – плотности, теплоемкости и объемные доли сухого органического вещества (i=1), связанной с сухим органическим веществом воды (i=2); k'_{02} и E – предэкспоненциальный множитель и энергия активации, характеризующая испарение свободной воды; R – универсальная газовая постоянная; $\varphi_w = \varphi_{1w} + \varphi_{2w}$ - объемная доля конденсированной фазы на верхней границе ЛГМ; q_{Rw} и q_{Rz} - плотности потока результирующего излучения, на границе раздела сред и потока излучения, проникающего в слой ЛГМ; q_2 - теплота испарения единицы массы воды; A – альбедо слоя ЛГМ; $q_R(h)$ - плотность потока излучения от Солнца на верхней границе слоя ЛГМ; α- угол между горизонтальной плоскостью и подстилающей поверхностью; ε_s - коэффициент черноты слоя; σ- постоянная Стефана-Больцмана; J_w - плотность потока длинноволнового излучения на верхней границе слоя ЛГМ; k_1 - коэффициент затухания излучения в слое ЛГМ, индекс w приписывается параметрам состояния при z=h.

2. Приведение к безразмерному виду.

Представляет интерес постановка задачи с использованием безразмерных переменных [2, 3]. В результате приведения (1)-(7) к безразмерному виду имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}(1 + a\varphi_2)\frac{\partial\theta_s}{\partial\tau} &= \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1+\pi_\lambda\varphi_2)\frac{\partial\theta_s}{\partial\zeta}\right] + \bar{q}_{Rw}\exp\left[\bar{k}_1(\zeta-1)\right] - \\ &- \bar{\alpha}_v(\theta_s - \theta_e) - \frac{\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\exp\left(\frac{\theta_s}{1+\beta\theta_s}\right),\ \theta_s = \frac{(T_s - T_{sH})E}{RT_{sH}^2}\,,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\varphi_1 = \varphi_{1H}\,,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} = -\frac{\gamma\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\exp\left(\frac{\theta_s}{1+\beta\theta_s}\right),\ \gamma = \frac{\rho_1\varphi_{1H}C_{p1}RT_{sH}^2}{\rho_2 q_2 E}\,, \tag{9}$$

которые необходимо решать с учетом следующих начальных и граничных условий

$$\theta_s\big|_{\tau=0} = 0\,,\ \varphi_2\big|_{\tau=0} = \varphi_{2H}\,, \tag{10}$$

$$-\left(1+\pi_\lambda \varphi_{2w}\right)\frac{\partial\theta_s}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=1} = \mathrm{Bi}\left(\theta_{sw}-\theta_e\right)+\frac{b\varphi_{2w}}{\sqrt{1+\beta\theta_w}}\exp\left(\frac{\theta_{sw}}{1+\beta\theta_w}\right)-$$
$$-\left(\varphi_{1H}+\varphi_{2w}\right)\left[c-d\left(1+\beta\theta_{sw}\right)^4\right],\ \theta_e=\frac{(T_e-T_{sH})E}{RT_{sH}^2}, \tag{11}$$

$$-\left(1+\pi_\lambda \varphi_{2w}\right)\frac{\partial\theta_s}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=0} = \mathrm{Bi}_0\left(\theta_{s0}-\theta_0\right),\ \theta_0=\frac{(T_0-T_{sH})E}{RT_{sH}^2}, \tag{12}$$

Здесь и выше θ_s, θ_e, θ_0 – безразмерные температуры слоя ЛГМ, окружающей среды и почвы; $\tau=\frac{tq_2k'_{02}\rho_2E}{\rho_1\varphi_{1H}C_{p1}RT_{sH}^2\sqrt{T_{sH}}}\exp\left(-\frac{E}{RT_{sH}}\right)$ - безразмерное время; $\zeta=z/h$ - безразмерная координата; $\delta^2=\frac{q_2k'_{02}\rho_2h^2E}{\lambda_1\varphi_{1H}\sqrt{T_{sH}}\,RT_{sH}^2}\exp\left(-\frac{E}{RT_{sH}}\right)$ - безразмерный критерий (аналог критерия Д.А. Франк-Каменецкого [3]);

$\beta=RT_{sH}/E$ - безразмерная начальная температура слоя; γ - безразмерный критерий подобия, характеризующий скорость сушки слоя ЛГМ; $\pi_\lambda=\lambda_2\varphi_{2H}/(\lambda_1\varphi_{1H})$ - относительный коэффициент теплопроводности воды; $Bi=\frac{\alpha_e h}{\lambda_1\varphi_{1H}}$ - критерий Био, характеризующий интенсивность теплообмена слоя ЛГМ с приземным слоем атмосферы; $Bi_0=\frac{\alpha_0 h}{\lambda_1\varphi_{1H}}$ - критерии Био, характеризующий интенсивность теплообмена слоя ЛГМ и почвы; $a=\frac{\rho_2C_{p2}}{\rho_1C_{p1}\varphi_{1H}}$, $b=\frac{E\,q_2k'_{02}\rho_2h}{RT_{sH}^2\sqrt{T_{sH}}\lambda_1\varphi_{1H}}\exp\left(-\frac{E}{RT_{sH}}\right)$,

$c=\frac{E\,h[(1-A)q_R(h)+J_w]\cos\alpha}{\lambda_1\varphi_{1H}RT_{sH}^2}$, $d=\frac{\varepsilon_s\sigma T_{sH}^2hE}{R\lambda_1\varphi_{1H}}$ - безразмерные величины, которые характеризуют объемную теплоемкость воды, тепловой эффект испарения воды, приток лучистой энергии и коэффициент черноты слоя; $\bar{\alpha}_v=\frac{\alpha_vRT_{sH}^2\sqrt{T_{sH}}}{q_2k'_{02}\rho_2E}\exp\left(\frac{E}{RT_{sH}}\right)$, $\bar{q}_{Rw}=\frac{q_{Rw}k_1\rho_1\sqrt{T_{sH}}}{q_2k'_{02}\rho_2E}\exp\left(\frac{E}{RT_{sH}}\right)$, $\bar{k}_1=k_1\rho_1h$ - безразмерные значения объемного коэффициента теплообмена, радиационного теплового потока и коэффициента затухания излучения; $\lambda_1\varphi_{1H}$ - теплопроводность сухого органического вещества; $\lambda_2\varphi_{2H}$ - теплопроводность связанной с сухим органическим веществом воды.

3. **Приближенное аналитическое решение задачи.**

Используя метод осреднения в результате интегрирования уравнения (8) по ζ от 0 до 1 с учетом граничных условий (11), (12) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для средней по слою ЛГМ безразмерной температуры θ_s и безразмерного объемного влагосодержания слоя φ_2

$$(1+a\varphi_2)\frac{d\theta_s}{d\tau}=\frac{1}{\delta^2}\left\{Bi(\theta_s-\theta_e)+\frac{b\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\exp\frac{\theta_s}{1+\beta\theta_s}-\right.$$
$$\left.-(\varphi_{1н}+\varphi_2)\left[c-d(1+\beta\theta_s)^4\right]-Bi_0(\theta_s-\theta_0)\right\}+\frac{\bar{q}_{Rw}}{\bar{k}_1}(1-e^{-\bar{k}_1})-, \qquad (13)$$
$$-\bar{\alpha}_v(\theta_s-\theta_e)-\frac{\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\exp\frac{\theta_s}{1+\beta\theta_s}$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau}=-\frac{\gamma\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\exp\frac{\theta_s}{1+\beta\theta_s}. \qquad (14)$$

$$\varphi_2=\varphi_{2н}\exp[I(\tau)],\ \ I(\tau)=-\gamma\int_0^{\tau}(1+\beta\theta_s)^{-1/2}\exp\frac{\theta_s}{1+\beta\theta_s}d\tau. \qquad (15)$$

Для вычисления интеграла $I(\tau)$ можно использовать разложение в ряд по τ в окрестности $\tau=0$. Это позволяет найти безразмерное время сушки слоя τ_*. Если учесть только один член ряда, то получаем

$$\tau_*=\gamma^{-1}\ln\varphi_{2н}/\varphi_{2*}, \qquad (16)$$

где φ_{2*} - критическое объемное влагосодержание.

Из (16) легко находим размерное время сушки в первом приближении

$$t_{*1}=\frac{\sqrt{T_{sн}}}{k'_{02}}\ln\frac{\varphi_{2н}}{\varphi_{2*}}\exp\left(\frac{E}{RT_{sн}}\right). \qquad (17)$$

Легко видеть, что с ростом начальной температуры время сушки экспоненциально убывает, что согласуется с физическими соображениями.

Если использовать два члена ряда Тейлора для вычисления $I(\tau)$, то для τ_* получаем выражение во втором приближении

$$\tau_{*2}=\left[\left(1+\frac{2}{\gamma}\frac{d\theta_s}{d\tau}\right)_0\ln\frac{\varphi_{2н}}{\varphi_{2*}}\right]^{1/2}\left(\frac{d\theta_s}{d\tau}\right)_0^{-1}, \qquad (18)$$

где $(d\theta_s/d\tau)_0$ - производная от θ_s при $\tau=0$, которую можно легко найти из уравнения (13) с учетом начальных условий (10). Легко видеть, что $\tau_c>0$ только в случае, когда $\left(\dfrac{d\theta_c}{d\tau}\right)>0$.

4. Численное решение нелинейной краевой задачи (8)-(12).

Для численного решения системы уравнений (8)-(9) с граничными и начальными условиями (10)-(12) был использован итерационно-интерполяционный метод [4]. При ρ_1=300 кг/м^3, ρ_2=1000 кг/м^3, $k_{02}=6{,}03\cdot10^5$ K$^{1/2}$/с, A=0.12, ε_σ=0.7 , E/R=5956 K^{-1}, R=8.314 Дж/К, a=0.55, q_2=2250 Дж/кг, C_{p2}=4180 Дж/(кгK), $P_e=1.01\cdot10^5$ Па и различных значений температуры окружающей среды T_e=306 K и T_e=300 K (кривые 1 и 2) на рис. 1. Известно [5], что критическое влагосодержание слоя ЛГМ из опада хвоинок и тонких веточек сосны равно φ_*=0.13.

Как показывает анализ результатов численных расчетов (см. рис.1) объемная доля воды в связанном состоянии с сухим органичаским веществом с ростом z убывает и достигает минимального значения на верхней границе слоя лесных горючих материалов, что согласуется с данными наблюдений.

В результате численного решения нелинейной краевой задачи (1) – (7) было установлено, что время сушки слоя t_*=10 часов при T_e=306 K и t_*=14 часов при T_e=300 K. Используя аналитическую формулу (18), получим t_{*2}=9,98 часа при T_e=306 K и t_{*2}=14,59 часа при T_e=300 K.

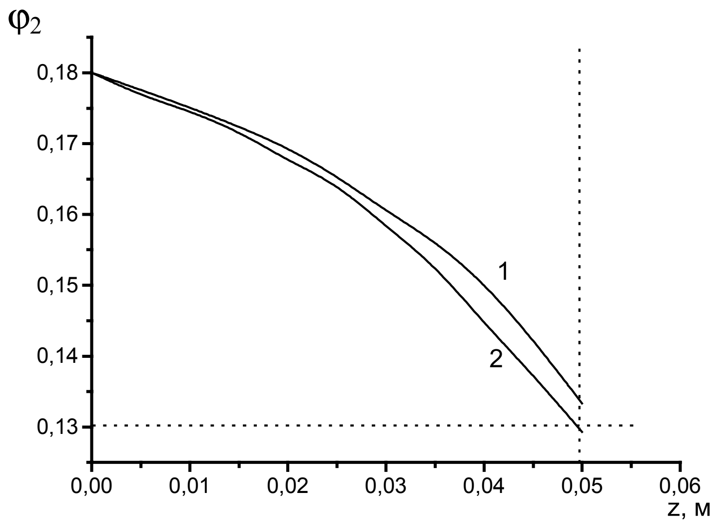

Рис.1. Зависимость объемной доли воды в слое ЛГМ от z для различных значений времени сушки: t_*=14 часов (кривая 1) и t_*=10 часов (кривая 2).

Таким образом, относительная погрешность t_* не превышает 3% и приближенная аналитическая формула (18) может быть использована для определения t_*.

Литература

1. Гришин А.М., Голованов А.Н., Катаева Л.Ю., Лобода Е.Л. Постановка и решение задачи о сушке слоя лесных горючих материалов // Физика горения и взрыва. 2001. Т.37. №1. С.65-76.
2. Седов Л.И. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1973. Т.1. 535 с.
3. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 492 с.
4. Гришин А.М., Берцун В.Н., Зинченко В.И. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. 160 с.
5. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. Новосибирск: Наука, 1992, 406 с.