

О ДВУМЕРНЫХ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЗАМКНУТЫХ ВОДОЕМАХ

В. М. БЕЛОЛИПЕЦКИЙ, Л. В. ГАВРИЛОВА, Л. А. КОМПАНИЕЦ
 Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
 e-mail: belolip@icm.krasn.ru

The problem of modelling of wind flows in stratified reservoirs is considered. Two models for definition of hydrothermics of reservoirs using hydrostatics approximation are compared.

Одной из важных задач охраны окружающей среды является задача определения скорости и теплового режима в водном бассейне. Это сложная многопараметрическая задача, поэтому при математическом моделировании определяются наиболее важные факторы и выбираются упрощенные математические модели. Существует большое количество математических моделей, описывающих гидрофизические процессы в замкнутых водоемах. В данной работе рассмотрены две модели гидротермики водоема в гидростатическом приближении. Для них получены точные решения в частном случае стационарного решения, однородной жидкости и ровного дна бассейна. Полученные аналитические решения могут служить для проверки работоспособности численных алгоритмов.

1. Описание моделей

Модель 1.

В работе [3] рассматривается модель гидротермики водоема в приближении Буссинеска, для которой выполняется условие гидростатики и считается, что возникающее в процессе движения возвышение свободной поверхности мало:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} dz, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u = u(x, z, t)$, $w = w(x, z, t)$ — компоненты вектора скорости течения $\vec{v} = (u, w)$; g — ускорение свободного падения; K_z — коэффициент турбулентного обмена, $K_z = K(z)$; ρ — плотность в точке с координатами (x, z) , $\rho = \rho(T)$, ρ_0 — некоторое среднее значение плотности; $T = T(x, z, t)$ — температура; $\zeta = \zeta(x, t)$ — отклонение поверхности жидкости от равновесного положения. Ось z направлена вертикально вверх.

Система уравнений (1) дополнена граничными условиями. На свободной поверхности $z = 0$ для u ставится условие:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau}{\rho_0},$$

учитывающее влияние ветра. Здесь τ — напряжение ветра на свободной поверхности.

На дне $z = -H(x)$ ставится условие, позволяющее учесть трение о дно

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = k_1 u \quad (\text{или } K_z \frac{\partial u}{\partial z} = k_1 u |u|). \quad (2)$$

На боковой поверхности (вертикальных стенках) ставятся условия проскальзывания.

Для w на поверхности водоема ($z = 0$) ставится условие $\zeta_t = w$, на дне ($z = -H(x)$)

$$w = -u \frac{\partial H}{\partial x}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (проект № 10F230N), INTAS (97-0-519), РФФИ (№ 99-05-64695).

© В. М. Белолипецкий, Л. В. Гаврилова, Л. А. Компаниец, 2001.

Возвышение свободной поверхности находится из уравнения

$$\zeta_t + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}) = 0, \quad (3)$$

где

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 u(x, z) dz.$$

Уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = A_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial z} \left(K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Для него ставятся следующие краевые условия:

на твердых границах

$$A_x \frac{\partial T}{\partial x} \cos(n, x) + K_T \frac{\partial T}{\partial z} \cos(n, z) = 0;$$

на поверхности водоема ($z = 0$)

$$K_T \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{C_p \rho_0}.$$

Здесь n — нормаль к твердой поверхности, A_x , K_T — коэффициенты турбулентной диффузии, Q — поток тепла, отнесенный к единице поверхности водоема, C_p — удельная теплоемкость воды.

Модель 2.

Модель 2 аналогична модели, рассмотренной в [1] и отличается от модели 1 тем, что в граничном условии на дне (2) вместо локальной скорости ставится средняя по глубине скорость

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = k_1 \bar{u} \quad (\text{или } K_z \frac{\partial u}{\partial z} = k_1 \bar{u} |\bar{u}|). \quad (4)$$

Средние скорости находятся из уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -k_1 \frac{\bar{u} |\bar{u}|}{H} + \frac{\tau}{\rho_0 H} + F, \quad (5)$$

$$F = \frac{-g}{\rho_0 H} \int_{-H}^0 dz \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} dz.$$

Аналитическое решение.

Рассмотрим для модели 1 стационарное решение в случае однородной жидкости, $H = \text{const}$, $K_z = \text{const}$, в граничном условии на дне зависимость от локальных скоростей линейная. Допустим также, что

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x)$$

и $\beta(x) \Big|_{x=0} = \beta(x) \Big|_{x=l} = 0$, l — длина бассейна. Тогда модель 1 имеет точное решение

$$u = \frac{\beta(x)}{K_z} \left[\frac{1 + \frac{k_1}{2}}{\left(2 + \frac{2}{3}k_1\right)H} z^2 + z + \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}k_1}{2 + \frac{2}{3}k_1} H \right],$$

$$w = -\frac{\beta'(x)}{K_z} \left[\frac{1 + \frac{k_1}{2}}{\left(2 + \frac{2}{3}k_1\right)H} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} + \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}k_1}{2 + \frac{2}{3}k_1} zH \right]. \quad (6)$$

При $k_1 = 0$ (условие проскальзывания без трения) решение (6) переходит в аналитическое решение для модели 2

$$\begin{aligned} u &= \frac{\beta(x)}{K_z} \left[\frac{1}{2H} z^2 + z + \frac{H}{3} \right], \\ w &= -\frac{\beta'(x)}{K_z} \left[\frac{1}{6H} z^3 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{H}{3} z \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти решения могут быть применены для проверки численного алгоритма.

2. Параметризация коэффициента вертикального турбулентного обмена

При проведении расчетов для стратифицированных водоемов возникает задача адекватного моделирования коэффициента вертикального турбулентного обмена K_z . В литературе предлагается несколько методов определения K_z . В ряде работ, например [3], для определения коэффициента K_z используется двухпараметрическая модель турбулентности, содержащая уравнения для энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Наряду с этим, существуют способы аналитического задания K_z [2]. В работе [5] предлагается брать $K_z = \text{const}$ для случая однородной жидкости и кусочно-постоянную функцию для неоднородной жидкости.

Нами использовалась формула Прандтля — Обухова [4]

$$K_z = \begin{cases} (0.05h)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)} & \text{при } K_z > K_{\min}, \\ K_{\min} & \text{при } K_z \leq K_{\min}, \end{cases}$$

где h — глубина верхнего квазиоднородного слоя, которая находится по первой от поверхности расчетной точке, в которой выполняется условие $K_z \leq K_{\min}$, K_{\min} — фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена.

3. Описание численных алгоритмов

Численные конечно-разностные алгоритмы для модели 1 и модели 2 таковы.

Модель 1. На первом этапе по уравнению переноса тепла и уравнению состояния находятся новые значения температуры и плотности. На втором этапе из уравнений (1), (3) определяются u , ζ с использованием неявной конечно-разностной схемы, метода итераций. На третьем этапе по уравнению неразрывности рассчитывается w (разностная схема Эйлера).

Модель 2. На первом этапе из системы уравнений мелкой воды (3), (5) с учетом граничных условий находятся осредненная по глубине скорость \bar{u} и возвышение свободной поверхности (явная условно устойчивая разностная схема Мак-Кормака). На втором этапе по полученным значениям осредненной скорости и уровня поверхности из уравнений (1) определяются u , w (неявная разностная схема для u и схема Эйлера для w). На третьем этапе по уравнению переноса тепла и уравнению состояния находятся новые поля температуры и плотности (неявная разностная схема).

4. Примеры расчетов и анализ результатов

Для модели 2 проводилось сравнение аналитического решения (7) с решением, полученным численным методом. Численно решается задача о движении однородной жидкости под действием ветра в бассейне с ровным дном. При этом шаг по пространственной переменной x 1 м, шаг по глубине 0.17 м, шаг по времени 3.6 с, число точек по x — 26, число точек по z — 61, расчетное время 1.5 часа. На рис. 1 представлены графики скорости u , выведенные в центральном сечении бассейна. Пунктирной линией нарисован график, полученный численным методом, сплошной линией — из точного решения (7) при ветре 2 м/с. Как видно из рис. 1, решения, полученные обоими способами, отличаются незначительно.

Для сравнения двух моделей проводились расчеты для случая однородной жидкости, постоянной глубины водоема, ветер брался 10 м/с. На рис. 2 выведены графики скорости u в центральном сечении

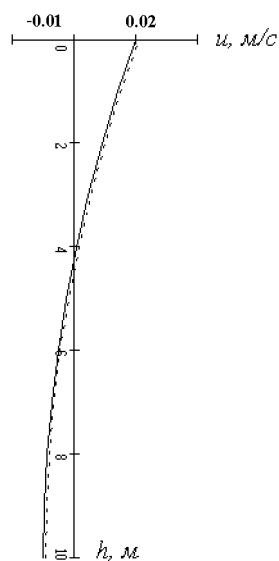


Рис. 1.

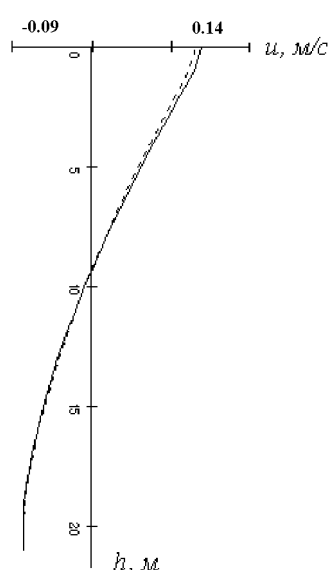


Рис. 2.

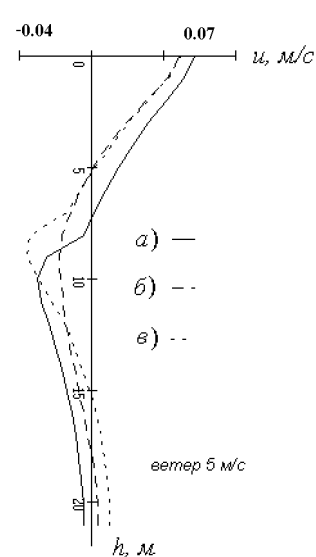


Рис. 3.

бассейна. Сплошная линия соответствует решению, полученному по модели 1, пунктирная линия соответствует решению, полученному по модели 2. Видно, что для однородной жидкости решения отличаются незначительно. Расчеты, проведенные для неоднородной жидкости, показывают, что в этом случае по двум моделям получаются различные результаты.

На рис. 3 показаны результаты расчетов по модели 1 для неоднородной жидкости. Для случая слабой стратификации ($\Delta\rho_1/\rho_0 = 7.5 \cdot 10^{-4}$, ρ_0 — характерное значение плотности воды, $\Delta\rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$) и прямоугольного сечения водоема образуется одна циркуляционная зона (рис. 3, а). Для этой же стратификации, но переменной глубины формируются две циркуляционные зоны (рис. 3, б). Для плотностной стратификации $\Delta\rho_2/\rho_0 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ и постоянной глубины также формируются две циркуляционные зоны (рис. 3, в).

Список литературы

- [1] АСТРАХАНЦЕВ Г. П., ОГАНЕСЯН Л. А., РУХОВЕЦ Л. А. Трехмерная математическая модель гидротермодинамики замкнутого водоема // Сб. Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах. Л.: Наука. 1986. С. 13–16.
- [2] ДЕВОЛЬСКАЯ Е. И., ДОЛГОПОЛОВА Е. Н., РЕШЕТКОВ А. Б. Экспериментальные исследования структуры подледного течения // Водные ресурсы. 1999. Т. 26, № 1. С. 96–103.
- [3] КВОН В. И. Гидротермический расчет водоемов-охладителей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 5. С. 129–137.
- [4] BELOLIPETSKII V. M., GENOVA S. N. Numerical modelling of hydrothermal processes in well-drained basins // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. Vol. 12, № 4. P. 319–334.
- [5] WANG Y., HUTTER K. Methods of substructuring in lake circulation dynamics // Advances in Water Resources. 2000. Vol. 23. P. 399–425.