

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, КОЛЕБЛЮЩИХСЯ В ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Е. В. ЕРМАНЮК, Н. В. ГАВРИЛОВ

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

This paper presents a simple rule relating the force coefficients of a body oscillating in an ideal uniformly stratified fluid to the force coefficients of an affinely-similar body oscillating in an ideal homogeneous fluid. The rule is applied to 2D problem on the loads acting on cylinders with diamond-shaped (rhomb) and circular cross-sections in uniformly stratified fluid. It is shown that in contrast with the hydrodynamic characteristics of a smooth contour (circle), the force coefficients of a polygonal contour (rhomb) change drastically at certain oscillation frequency when the angle between the group velocity of internal waves and the sides of the rhomb tends to zero. The experimental estimates of the frequency-depended force coefficients are obtained by Fourier-analysis of impulse response functions.

## Введение

Локальные характеристики поля внутренних волн, генерируемых гармоническими колебаниями тел, погруженных в непрерывно стратифицированную жидкость с постоянной частотой плавучести, изучены достаточно подробно теоретически и экспериментально [1]–[7]. Ряд работ посвящен оценке интегральных характеристик, в частности, мощности, затрачиваемой на излучение внутренних волн, и гидродинамической нагрузки, действующей на колеблющиеся тела. В [8] развит приближенный способ оценки мощности излучения, причем тело моделируется распределением особенностей, позаимствованным из решения задачи в однородной жидкости. Оценки гидродинамических нагрузок в рамках приближения Буссинеска для невязкой экспоненциально стратифицированной жидкости при точном соблюдении условия непротекания на теле получены в [9] для вертикальных колебаний эллипсоида вращения и в [10] для произвольных по направлению колебаний эллиптического цилиндра. В работе [11] решение [10] распространено на случай вязкой жидкости. Экспериментальная проверка [10] сделана в [12]. Подход [8] развит в [13, 14] для оценки гидродинамических нагрузок на сферу и цилиндр, колеблющиеся в экспоненциально стратифицированной жидкости, причем получено точное распределение особенностей, моделирующее форму тела. Следует отметить, что в работах [9, 10, 13, 14] существенным образом использован частный вид геометрии исследуемых тел. Для тел произвольной геометрии решение может быть получено с помощью соотношений аффинного подобия [15]. В [15] приведены также экспериментальные данные для семейства эллипсоидов вращения различного удлинения.

В настоящей работе соотношения [15] использованы для теоретической оценки гидродинамических нагрузок, действующих на горизонтальный цилиндр с поперечным сечением в виде ромба при его колебаниях в экспоненциально стратифицированной жидкости. Заметим, что колебания контуров, имеющих угловые точки, ранее не исследовались. Экспериментальная проверка полученного решения для случая горизонтальных колебаний проведена с помощью методики [12].

## 1. Теоретический анализ

Рассматривается задача о гармонических колебаниях твердого тела в безграничной, невязкой, несжимаемой стратифицированной жидкости с постоянной частотой Ваясыля-Брента  $N(x_3) = -(g/\rho)(d\rho/dz) = \text{const}$ , где  $\rho(x_3)$  — распределение плотности по вертикали в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $g$  — ускорение свободного падения. Уравнение движения жидкости в приближении Буссинеска формулируется

\*Работа выполнена при поддержке СО РАН (грант № 6 для молодых ученых и грант № 1-2000 Интеграционной программы) и РФФИ (грант № 0001-00812).

© Е. В. Ерманюк, Н. В. Гаврилов, 2001.

в терминах “внутреннего” потенциала [16]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + N^2 \nabla_h^2 \right) \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ ,  $\nabla_h = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, 0)$ . Скорость жидких частиц  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$  и давление  $p(x_1, x_2, x_3)$  выражаются в следующем виде

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla + N^2 \nabla_h \right) \varphi, \quad (2)$$

$$p = -\rho_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \varphi, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  — плотность жидкости в невозмущенном состоянии. На границе тела, заданной функцией  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ , выполняется условие непротекания

$$\mathbf{u} \cdot \nabla F = \mathbf{v} \cdot \nabla F, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$  вектор скорости тела. Считая “внутренний” потенциал, скорость движения тела, скорость жидких частиц и давление гармоническими функциями времени

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad (5)$$

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad (7)$$

$$p(x_1, x_2, x_3, t) = P(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad (8)$$

подставив (5)–(8) в (1)–(4) и введя потенциал  $\Phi^{(1)} = \Phi(N^2 - \omega^2)$ , можно сформулировать следующую задачу.

#### Задача 1

Уравнение движения жидкости

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Phi^{(1)} = 0, \quad (9)$$

где  $\alpha = (\Omega^2 - 1)^{1/2} / \Omega$ ,  $\Omega = \omega/N$ . Уравнение (9) может быть эллиптического или гиперболического типа в зависимости от знака  $\alpha^2$ . Сначала рассмотрим эллиптическую задачу. Давление и скорость жидких частиц в *Задаче 1* выражаются как

$$P^{(1)} = -\rho_0 i \omega \Phi^{(1)},$$

$$\mathbf{U}^{(1)} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Phi^{(1)}.$$

Условие непротекания на поверхности тела  $S^{(1)} = S$  имеет вид

$$\mathbf{U}^{(1)} \cdot \nabla^{(1)} F^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla^{(1)} F^{(1)}, \quad (10)$$

где  $\nabla^{(1)} = \nabla$ ,  $F^{(1)} = F$ . Условие на бесконечности:  $\Phi^{(1)} \rightarrow 0$  при  $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \rightarrow \infty$ . Компоненты вектора гидродинамической нагрузки  $\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{Y}^{(1)} e^{i\omega t}$  могут быть получены интегрированием давления по поверхности тела:

$$Y_j^{(1)} = -\rho_0 i \omega \int_{s^{(1)}} \Phi^{(1)} \cdot n_j^{(1)} dS^{(1)},$$

где  $n_j^{(1)}$  — компоненты вектора единичной внутренней нормали  $\mathbf{n}^{(1)} = \nabla^{(1)} F^{(1)} / |\nabla^{(1)} F^{(1)}|$  на поверхности  $S^{(1)}$ . Введем аффинное преобразование системы координат

$$\xi_i = a_i x_i, \quad a_i = (1, 1, \alpha). \quad (11)$$

В новых переменных *Задача 1* переходит в *Задачу 2*.

*Задача 2*

Уравнение движения жидкости (9) преобразуется в уравнение Лапласа:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} \right) \Phi^{(2)} = 0. \quad (12)$$

Граничное условие на поверхности  $S^{(2)}$ , задаваемой функцией  $F^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ , принимает вид:

$$\nabla^{(2)} \Phi^{(2)} \cdot \nabla^{(2)} F^{(2)} = V^{(2)} \cdot \nabla^{(2)} F^{(2)}, \quad (13)$$

где  $\nabla^{(2)} = (\partial/\partial \xi_1, \partial/\partial \xi_2, \partial/\partial \xi_3)$ , а компоненты вектора скорости тела выражаются как  $V_i^{(2)} = a_i V_i^{(1)}$  аналогично (11). Условие на бесконечности:  $\Phi^{(2)} \rightarrow 0$  при  $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \rightarrow \infty$ . Компоненты вектора гидродинамической нагрузки  $\mathbf{y}^{(2)}(t) = \mathbf{Y}^{(2)} e^{i\omega t}$  могут быть получены интегрированием давления  $P^{(2)} = -\rho_0 i\omega \Phi^{(2)}$  по поверхности тела:

$$Y_j^{(2)} = -\rho_0 i\omega \int_{s^{(2)}} \Phi^{(2)} \cdot n_j^{(2)} dS^{(2)},$$

где  $n_j^{(2)}$  — компоненты единичного вектора внутренней нормали  $\mathbf{n}^{(2)} = \nabla^{(2)} F^{(2)} / |\nabla^{(2)} F^{(2)}|$  к поверхности тела  $S^{(2)}$ .

Как видно из (12), (13), *Задача 2* является классической задачей о колебаниях тела в идеальной однородной жидкости. Известно, что компоненты гидродинамической нагрузки в *Задаче 2* могут быть выражены через компоненты тензора присоединенных масс (см., напр., [17, 18]):

$$y_j^{(2)} = -\sum_{i=1}^3 m_{ij}^{(2)} \frac{dv_i^{(2)}}{dt}, \quad (14)$$

где компоненты вектора скорости тела  $v_i^{(2)} = V_i^{(2)} e^{i\omega t}$ . Компоненты тензора присоединенных масс определяются из решения *Задачи 2* для единичных потенциалов, которые вводятся разложением

$$\Phi^{(2)} = \sum_{i=1}^3 V_i^{(2)} \Phi_i^{(2)}. \quad (15)$$

Для компонент тензора присоединенных масс имеем

$$m_{ij}^{(2)} = \rho_0 \int_{s^{(2)}} \Phi^{(2)} \cdot n_j^{(2)} dS^{(2)}. \quad (16)$$

Соотношения аналогичные (14), (15) и (16) вводятся в *Задаче 1* сформулированной в (9), (10). В [15] для тензоров коэффициентов присоединенных масс  $K_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(1)} / W^{(1)}$  и  $K_{ij}^{(2)} = m_{ij}^{(2)} / W^{(2)}$ , где  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  объемы тел, окруженных поверхностями  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ , получено следующее соотношение:

$$K_{ij}^{(1)} = K_{ij}^{(2)} a_i a_j. \quad (17)$$

Компоненты тензора коэффициентов присоединенных масс в *Задаче 2* для семейства тел определенной геометрической формы, имеющих различные соотношения  $e = b_2/b_1$ ,  $q = b_3/b_2$  между характерными размерами  $b_1, b_2, b_3$  в направлениях  $x_1, x_2, x_3$ , обычно представляются в виде (см. напр. [19]):

$$K_{ij}^{(2)} = f_{ij}(e, q). \quad (18)$$

Соответственно, решение *Задачи 1* для тензора коэффициентов присоединенных масс тела при заданных  $e_0$  и  $q_0$  может быть получено из (18) простой подстановкой

$$K_{ij}^{(1)}(\Omega) = f_{ij}(e_0, q_0 \alpha) a_i a_j. \quad (19)$$

Следует отметить, что ранее подобные соотношения для эллиптической задачи были получены в [20] для тела, движущегося по закону  $\mathbf{v}(t) = \varepsilon \mathbf{v}_0 e^{kt}$ , где  $|\mathbf{v}_0| = 1$ , а  $\varepsilon, k$  — малые положительные величины. Основное внимание в [20] уделено поиску асимптотики при малых скоростях движения.

При  $\Omega < 1$  уравнение (9) является уравнением гиперболического типа. Как показано в [21], решение задачи в этом случае может быть получено путем построения аналитического продолжения. Характерной особенностью гиперболической задачи является излучение внутренних волн колеблющимся телом. В [21] обсуждается процедура выбора ветвей неоднозначных комплексных функций, обеспечивающих выполнение условия излучения на бесконечности. Соответственно, решение задачи при  $\Omega < 1$ , получается подстановкой

$$K_{ij}^{(1)}(\Omega) = f_{ij}(e_0, -q_0 i \eta) \gamma_i \gamma_j, \quad (20)$$

где  $\eta = (1 - \Omega^2)^{1/2}/\Omega$ ,  $\gamma_i = (1, 1, -i\eta)$ . Следует отметить, что в отличие от случая  $\Omega > 1$ , когда  $m_{ij}^{(1)}$  являются вещественными величинами, при  $\Omega < 1$  величины  $m_{ij}^{(1)}$  являются в общем случае комплексными. В корабельной гидродинамике принято представление:  $m_{ij} = \mu_{ij} - \lambda_{ij}/\omega$ , где  $\mu_{ij}$  имеет смысл присоединенной массы, а  $\lambda_{ij}$  представляет собой коэффициент демпфирования. Соответствующие безразмерные величины можно ввести как

$$C_{ij}^\mu = \text{Re}(K_{ij}^{(1)}), \quad (21)$$

$$C_{ij}^\lambda = \Omega \text{Im}(K_{ij}^{(1)}). \quad (22)$$

При  $\Omega \rightarrow 0$  имеет место  $\alpha^2 \rightarrow -\infty$ . В случае пространственной задачи уравнение (9) с граничным условием (10) сводится к набору двухмерных уравнений Лапласа с соответствующими условиями непротекания для горизонтальных поперечных сечений тела. Соответственно, значение  $C_{11}^\mu$  при  $\Omega \rightarrow 0$  может быть получено по методу плоских сечений. Мнимая часть коэффициентов гидродинамической нагрузки в пределе  $\Omega \rightarrow 0$  обращается в ноль.

В случае плоской задачи вместо системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  введем систему координат  $(y_1, y_2)$  так, что  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = x_2$ ,  $y_2 = x_3$ , а вместо индексов  $i, j = (1, 2, 3)$  введем индексы  $m, n = (1, 2)$ . Преобразования формул (18), (19), (20) и определений безразмерных коэффициентов (21), (22) при этом очевидны. Величины  $C_{mn}^\mu$  и  $C_{mn}^\lambda$  следует понимать как коэффициенты нагрузок, приходящихся на единицу длины, а величины  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  как площади поперечных сечений горизонтальных цилиндров в *Задачах 1, 2*. Кроме того в плоской задаче функции  $f_{mn}$ , входящие в выражения (18), (19), (20) являются функциями одного параметра  $q$ . Предельный переход  $\Omega \rightarrow 0$  соответствует  $q \rightarrow \infty$ . Однако при  $q \rightarrow \infty$  любой контур вырождается в вертикальную линию. Соответственно, при  $\Omega \rightarrow 0$  имеет значение только вертикальный размер колеблющегося цилиндра, но не форма его поперечного сечения. Для горизонтальных колебаний цилиндра с площадью поперечного сечения  $W^{(1)}$ , имеющего вертикальный размер  $D$ , можно указать предельное значение  $C_{11}^\lambda(\Omega)$  при  $\Omega \rightarrow 0$ :  $C_{11}^\lambda(0) = \pi D^2/4W^{(1)}$ . Например, для круга  $C_{11}^\lambda(0) = 1$ , для ромба квадратного сечения с вертикально ориентированной диагональю  $C_{11}^\lambda(0) = \pi/2$ .

Для эллипса функции  $f_{mn}(q)$  имеют очень простой вид:  $f_{11}(q) = q$ ,  $f_{22}(q) = 1/q$ . Для ромба с вертикально ориентированной диагональю функции  $f_{mn}$  приведены в [19]. В частности, для горизонтальных колебаний имеет место следующее соотношение:

$$f_{11}(q) = \frac{\Gamma[\frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{1}{q})] \Gamma[\frac{1}{\pi} \arctan(\frac{1}{q})]}{\Gamma[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{1}{q})] \Gamma[1 - \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{1}{q})]} - 1, \quad (23)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера. Сопоставление теоретической зависимости, получаемой из (19), (20) для (23) проведено в экспериментальной части настоящей работы.

## 2. Эксперимент

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Опыты проводились в гидродинамическом лотке 1 размерами  $2 \times 0.4 \times 0.15^3$ , заполненном линейно стратифицированной жидкостью с частотой плавучести  $N = 1.0 \text{ c}^{-1}$  до глубины  $H = 0.36$ . Распределение плотности по глубине измерялось резистивным датчиком 2. Торцевые стенки лотка были оборудованы волногасителями 3. Цилиндр 4 с квадратным поперечным сечением  $3.7 \times 3.7^2$  закреплялся на нижнем обтекаемом конце физического маятника так, что его диагональ была ориентирована вертикально. Движение маятника 5 вызывалось падением стального шарика 6 на резиновую мембрану 7. Отклик маятника регистрировался с помощью электролитического датчика перемещений 8 и обрабатывался на ПЭВМ. Коэффициент восстанавливающего момента маятника варьировался путем изменения вертикальной координаты гайки 9. Для оценки зависимостей гидродинамических коэффициентов от частоты использовано известное соотношение теории линейных систем: отклик системы на возмущающее гармоническое воздействие является Фурье-образом отклика

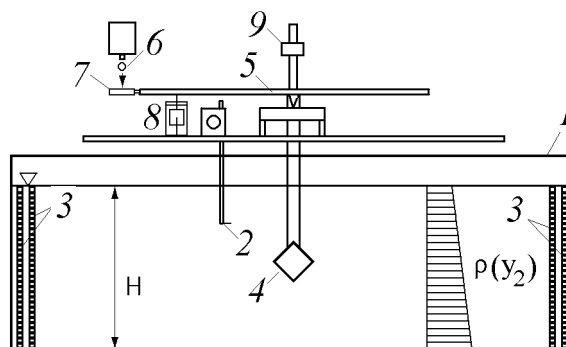


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

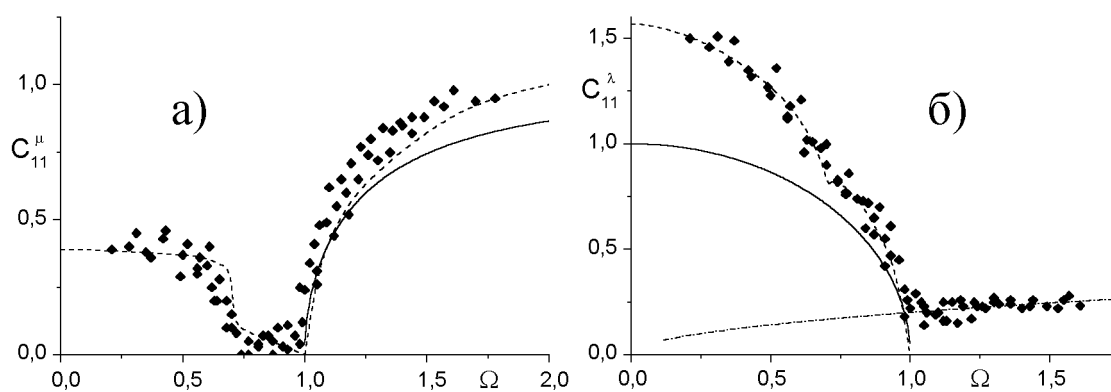


Рис. 2. Зависимость присоединенной массы а) и коэффициента демпфирования б) ромба от частоты колебаний (точки — эксперимент, штриховая линия — теория, штрих-пунктирная линия — аппроксимация экспериментальных данных для коэффициента демпфирования ромба в однородной жидкости, сплошная линия — теория [10] для кругового цилиндра).

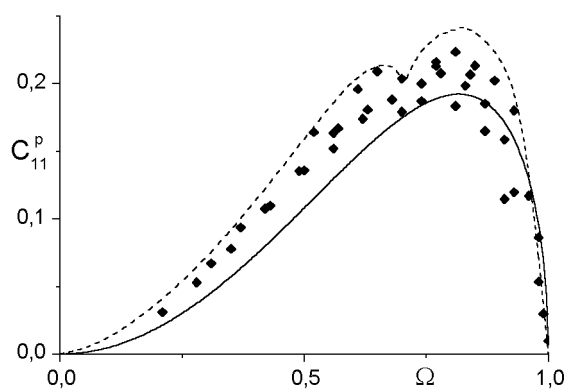


Рис. 3. Зависимость безразмерного коэффициента мощности излучения внутренних волн от частоты колебаний (все обозначения аналогичны рис. 2.).

на единичный импульс. Методика опытов и обработки сигнала подробно описана в [12]. Зависимости  $C_{11}^{\mu}(\Omega)$  и  $C_{11}^{\lambda}(\Omega)$  приведены на рис. 2. Как видно из рис. 2, при частоте колебаний  $\Omega \approx 0.7$ , для которой угол наклона полос “андреевского” креста внутренних волн [1] совпадает с наклоном боковых граней ромба, имеет место особый критический режим: наблюдается резкое падение коэффициента присоединенной массы и характерный излом на графике коэффициента демпфирования. При  $\Omega > 1$  значения коэффициента демпфирования в однородной и стратифицированной жидкости практически совпадают. Суммарный коэффициент демпфирования  $C_{11}^{\lambda}(\Omega)$  можно схематически представить в виде суммы волнового  $C_{11}^{\lambda w}(\Omega)$  и вязкостного  $C_{11}^{\lambda v}(\Omega)$  демпфирования. Предполагается, что вязкостное демпфирование количественно близко к измеренному в однородной жидкости, так что функция  $C_{11}^{\lambda v}(\Omega) = A\Omega^{1/2}$  считается известной. Полученная таким образом оценка коэффициента безразмерной мощности излучения внутренних волн  $C_{11}^p(\Omega) = \Omega^2 C_{11}^{\lambda w}(\Omega)/2$  представлена на рис. 3. Хорошо видно существование локального минимума кривой  $C_{11}^p(\Omega)$  при  $\Omega \approx 0.7$ . По видимому, эффекты, подобные вышеописанным, можно ожидать и для других контуров в виде многоугольников.

## Список литературы

- [1] MOWBRAY, D. E. & RARITY, B. S. H. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 28. P. 1–16.
- [2] HURLEY D. G. The emission of internal waves by vibrating cylinders // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36. P. 657–672.
- [3] APPLEBY J. C., CRIGHTON D. G. Non-Boussinesq effects in the diffraction of internal waves from an oscillating cylinder // Q. J. Mech. Appl. Maths. 1986. Vol. 39. P. 209–231.
- [4] APPLEBY J. C., CRIGHTON, D. G. Internal gravity waves generated by oscillations of a sphere // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 183. P. 439–450.
- [5] ИВАНОВ А. В. Генерация внутренних волн осциллирующим источником // Изв. АН СССР, ФАО. 1989. Т. 25, № 1. С. 61–64.
- [6] МАКАРОВ С. А., НЕКЛЮДОВ В. И., ЧАШЕЧКИН, Ю. Д. Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 1990. Т. 26. С. 548–554.
- [7] SUTHERLAND B. R., DALZIEL, S. B., HUGHES, G. O., LINDEN P. F. Visualization and measurement of internal waves by 'synthetic schlieren'. Part 1. Vertically oscillating cylinder // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 390. P. 93–126.
- [8] ГОРОДЦОВ В. А., ТЕОДОРОВИЧ Е. В. Энергетика генераторов гармонических внутренних волн // ПМТФ. 1986. Т. 27, № 4. С. 53–59.
- [9] LAY R. Y. S., LEE C. -M. Added mass of a spheroid oscillating in a linearly stratified fluid // Int. J. Engng. Sci. 1981. Vol. 19. P. 1411–1420.
- [10] HURLEY D. G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 1. Inviscid solution // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 351. P. 105–118.
- [11] HURLEY D. G., KEADY, G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 351. P. 119–139.
- [12] ERMANYUK E. V. The use of impulse response functions for evaluation of added mass and damping coefficient of a circular cylinder oscillating in linearly stratified fluid // Exp. Flu. 2000. Vol. 28. P. 152–159.
- [13] VOISIN B. Oscillating bodies and added mass for internal gravity waves. Part 1. Spheres // J. Fluid Mech. (submitted), 2001.
- [14] VOISIN B. Oscillating bodies and added mass for internal gravity waves. Part 2. Circular cylinders // J. Fluid Mech. (submitted), 2001.
- [15] ERMANYUK E. V. The rule of affine similitude for the force coefficients of a body oscillating in uniformly stratified fluid // Exp. Flu. (submitted), 2001.

- [16] Городцов В. А., Теодорович, Е. В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников // Изв. АН СССР, ФАО. 1986. Т. 16, № 9. С. 954–961.
- [17] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М: Гос. изд. физ-мат. лит., 1963.
- [18] Ньюман Дж. Морская гидродинамика. Л: Судостроение, 1985.
- [19] Короткин А.И. Присоединенные массы судна. Справочник. Л: Судостроение, 1986.
- [20] Владимиров В. А., Ильин К. И. О медленных движениях твердого тела в непрерывно стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1991. Т. 32, № 2. С. 55–61.
- [21] HURLEY D. G. A general method for solving steady-state internal gravity wave problems // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 56. P. 721–740.