ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТЕРМИНАХ СКОРОСТЬ – ЗАВИХРЕННОСТЬ

А. А. Родионов
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

Проведен групповой анализ уравнений плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в терминах скорость – завихренность. Получена полная группа допустимых преобразований уравнений, построена оптимальная система подалгебр первого порядка Θ_1 алгебры Ли операторов, выписаны все фактор – системы для операторов из Θ_1, приведены примеры точных решений модели.

1. Групповые свойства уравнений. В пространственных переменных (x, y, t) рассматриваются уравнения вязкой несжимаемой жидкости с завихренностью

$$\begin{aligned} &\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \nu(\omega_{xx} + \omega_{yy}),\\ &u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ — компоненты вектора скорости по напрвлениям x, y; $\omega(x, y, t)$ — завихренность жидкости; $\nu = \mathrm{const}$ — коэффициент вязкости среды.

На первом этапе группового анализа системы уравнений (1.1) исследуются ее свойства на инвариантность относительно преобразований пространства всех независимых и зависимых переменных $R^6(x, y, t, u, v, \omega)$. Поиск наиболее широкой допустимой группы преобразований системы сводится к построению операторов вида

$$\bar{X} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \omega}\ , \tag{1.2}$$

где компоненты векторного поля $\zeta = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ являются функциями переменных (x, y, t, u, v, ω).

Используя классическую методику [1], находим, что алгебра Ли операторов, допустимых системой (1.1), определяется следующим набором базисных операторов

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\ , \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}\ ,\\ &X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2\omega\frac{\partial}{\partial \omega}\ ,\\ &X_4 = -ty\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial y} - (tv + y)\frac{\partial}{\partial u} + (tu + x)\frac{\partial}{\partial v} + 2\frac{\partial}{\partial \omega}\ ,\\ &X_5(f(t)) = f(t)\frac{\partial}{\partial x} + f'(t)\frac{\partial}{\partial u}\ , \quad X_6(g(t)) = g(t)\frac{\partial}{\partial y} + g'(t)\frac{\partial}{\partial v}\ , \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $f(t), g(t)$ — произвольные функции, $f'(t), g'(t)$ — производные по времени t. Обозначим эту алгебру операторов через L. Видим, что группа Ли преобразований, допускаемых системой (1.1), является бесконечномерной, так как преобразования $x \to x + f(t)$, $u \to u + f'(t)$; $y \to y + g(t)$, $v \to v + g'(t)$, соответствующие операторам $X_5(f(t))$, $X_6(g(t))$, сохраняют систему уравнений. Оператору X_1 соответствует сдвиг по t, оператору X_2 — вращение в плоскости, X_3 — растяжение. Оператор X_4 связан с инвариантностью системы уравнений (1.1) относительно преобразований [2]

$$\begin{aligned} &\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x\cos at - y\sin at, \quad \bar{y} = x\sin at + y\cos at,\\ &\bar{u} = u\cos at - v\sin at - ax\sin at - ay\cos at,\\ &\bar{v} = u\sin at + v\cos at + ax\cos at - ay\sin at, \quad \bar{\omega} = \omega + 2a. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Отметим, что система уравнений плоского движения идеальной несжимаемой жидкости в терминах завихренности

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega \tag{1.5}$$

допускает операторы (1.3). Полный же набор допустимых базисных операторов для системы (1.5) кроме операторов (1.3) включает еще оператор растяжения [2]

$$X_7 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \omega\frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Уравнения (1.1) можно получить из уравнений Навье — Стокса в плоском случае

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}),\\ &v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \quad u_x + v_y = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

если исключить давление p и ввести функцию завихренности $\omega = v_x - u_y$.

Если уравнения (1.6) подвергнуть преобразованиям (1.4), положив параметр $a = \Omega$, то получим уравнения двумерного движения вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω:

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + 2\Omega v + \Omega^2 x + p_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}),\\ &v_t + uv_x + vv_y - 2\Omega u + \Omega^2 y + p_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \quad u_x + v_y = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тем самым проявляется физический смысл оператора X_4 из (1.3). Оператор X_4 связан с инвариантностью уравнений двумерных течений жидкости относительно перехода во вращающуюся с постояноой угловой скоростью систему координат.

Все сказанное для уравнений (1.6), (1.7) вязкой жидкости остается в силе для уравнений идеальной жидкости.

2. Оптимальная система подалгебр первого порядка. На основе найденных допустимой алгебры L операторов (1.3) возможно построение точных инвариантных решений уравнений (1.1). Но, с точки зрения допустимых групп преобразований, необходимо выделить такие линейные комбинации операторов из L, которые приводят к построению существенно различных точных инвариантных решений. Выделение таких линейных комбинаций базисных операторов является задачей построения оптимальных систем подалгебр. Изложение метода поиска операторов оптимальных систем подалгебр можно найти в работах [1, 3].

В настоящей работе решается задача построения оптимальной системы подалгебр первого порядка Θ_1 для алгебры L операторов (1.3).

При формировании оптимальной системы подалгебр предварительно вычисляются коммутаторы операторов по формулам

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k = X_i(X_j) - X_j(X_i), \tag{2.1}$$

где C_{ij}^k — структурные постоянные, $i, j, k = 1, \ldots, 6$, по k — суммирование. Результат приведен в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

$[\downarrow, \rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_5(f(t))$	$X_6(g(t))$
X_1	0	0	$2X_1$	$-X_2$	$X_5(f')$	$X_6(g')$
X_2	0	0	0	0	$X_6(f)$	$X_5(-g)$
X_3	$-2X_1$	0	0	$2X_4$	$X_5(2tf' - f)$	$X_6(2tg' - g)$
X_4	X_2	0	$-2X_4$	0	$X_6(-tf)$	$X_5(tg)$
$X_5(\psi(t))$	$X_5(-\psi')$	$X_6(-\psi)$	$X_5(-2t\psi' + \psi$	$X_6(t\psi)$	0	0
$X_6(\varphi(t))$	$X_6(-\varphi')$	$X_5(+\varphi)$	$X_6(-2t\varphi' + \varphi$	$X_5(-t\varphi)$	0	0

Здесь штрих $'$ означает дифференцирование по t.

Вычислим присоединенную группу A внутренних автоморфизмов алгебры L. Для этого рассмотрим оператор общего вида

$$X = \sum_{i=1}^{4} x^i X_i + X_5(f) + X_6(g), \quad X \in L,$$

где $\mathbf{x} = (x^1 x^2 x^3 x^4 f g)$ — вектор координат оператора X в базисе (1.3). На каждом операторе $X_i \in L$ строятся автоморфизмы Aut_{X_i} алгебры L, действия которых на X находятся по формуле

$$\mathrm{Aut}_{X_i}(a_i)\langle X\rangle = X + \frac{a_i}{1!}[X, X_i] + \frac{a_i^2}{2!}[[X, X_i], X_i] + \ldots, \tag{2.2}$$

где a_i — параметры. Формулы (2.2) определяют координаты $\widetilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1\tilde{x}^2\tilde{x}^3\tilde{x}^4\tilde{f}\tilde{g})$ преобразованного оператора, которые зависят от параметров a_i и вектора $\mathbf{x}$, порождая группу A внутренних автоморфизмов. Задача нахождения оптимальной системы подалгебр сводится к построению таких наборов $\mathbf{x} = (x^1x^2x^3x^4fg)$, что ни один из векторов не может быть переведен в другой автоморфизмами алгебры L.

Используя формулы (2.2), определяем полную группу преобразований координат вектора $\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}}$.

Т а б л и ц а 2

	$\widetilde{x}^1$	$\widetilde{x}^2$	$\widetilde{x}^3$	$\widetilde{x}^4$	$\widetilde{f}(t)$	$\tilde{g}(t)$
A_1	$x^1-2a_1x^3$	$x^2+a_1x^4$	x^3	x^4	$f(t-a_1)$	$g(t-a_1)$
A_2	x^1	x^2	x^3	x^4	$f\cos a_2+g\sin a_2$	$-f\sin a_2+g\cos a_2$
A_3	$x^1e^{2a_3}$	x^2	x^3	$x^4e^{-2a_3}$	$e^{a_3}f(te^{-2a_3})$	$e^{a_3}g(te^{-2a_3})$
A_4	x^1	$x^2-a_4x^1$	x^3	$x^4+2a_4x^3$	$f\cos(a_4t)-g\sin(a_4t)$	$f\sin(a_4t)+g\cos(a_4t)$
A_5	x^1	x^2	x^3	x^4	$f+x^1\psi'+x^3(2t\psi'-\psi)$	$g+(x^2-x^4t)\psi$
A_6	x^1	x^2	x^3	x^4	$f+(-x^2+x^4t)\varphi$	$g+x^1\varphi'+x^3(2t\varphi'-\varphi)$

Здесь A_i — преобразования, соответствующие Aut_{X_i} с параметром a_i $(i=1,4)$. Преобразованию A_5 с функцией $\psi(t)$ соответствует $\mathrm{Aut}_{X_5(\psi(t))}$, а преобразованию A_6 с функцией $\varphi(t)$ соответствует $rmAut_{X_6(\varphi(t))}$.

Так как операторы определены с точностью до произвольного множителя, не равного нулю, то определено преобразование общего растяжения B: $\tilde{\mathbf{x}} \to \beta\mathbf{x}$, $\beta = \mathrm{const}$.

Из анализа табл. 1 коммутаторов следует, что алгебра операторов L представима в виде прямой суммы: $L = L_{1-4} \oplus L_{5,6}$, где $L_{1-4} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ — конечномерная разрешимая подалгебра, $L_{5,6} = \{X_5(f), X_6(g)\}$ — бесконечномерная подалгебра.

Построение оптимальной системы подалгебр Θ_1 начинается с рассмотрения конечномерной подалгебры L_{1-4}. Для оператора общего вида ей соответствует вектор координат $(x^1x^2x^3x^4)$. Из табл. 2 видим, что $\tilde{x}^3 = x^3$ сохраняется под действием всех автоморфизмов.

Случай $x^3 = 0$, после использования преобразований A_i, $i = 1,2,3,4$, приводит к следующим вариантам вектора $(x^1x^2x^3x^4)$: (0000), (x^1000), $(0x^200)$, $(000x^4)$, (x^100x^4). Здесь встречающиеся компоненты отличны от нуля.

Случай $x^3 \neq 0$ приводит к таким вариантам вектора $(x^1x^2x^3x^4)$: $(00x^30)$, $(0x^2x^30)$. Здесь также встречающиеся компоненты отличны от нуля.

Расширяя L_{1-4} до полной алгебры L с соответствующим вектором координат $(x^1x^2x^3x^4f(t)g(t))$, используем семь полученных выше вариантов вектора $(x^1x^2x^3x^4)$. На этом этапе существенно проявляются автоморфизмы A_5, A_6 и общее растяжение B. Окончательно получаем набор векторов, которые не могут быть переведены один в другой внутренними автоморфизмами. Этим наборам соответствует оптимальная система подалгебр первого порядка Θ_1, состоящая из операторов

$$X_1 + aX_4, \quad X_2 + bX_3, \quad X_3, \quad X_4, \quad X_5(f(t)) + X_6(g(t)), \tag{2.3}$$

где a, b — произвольные постоянные; $f(t)$, $g(t)$ — произвольные дифференцируемые функции.

3. Построение фактор-систем. Перейдем к построению фактор-систем на каждом из операторов оптимальной системы подалгебр (2.3). В тех случаях, когда используются операторы X_2 или X_4 удобно рассматривать операторы и систему уравнений (1.1) не в декартовых координатах (x, y), а в полярных координатах (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad u = \bar{u}\cos\varphi - \bar{v}\sin\varphi, \quad v = \bar{u}\sin\varphi + \bar{v}\cos\varphi,$$

где $\bar{u}, \bar{v}$ — компоненты радиальной и тангенциальной составляющих вектора скорости. В новых координатах система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{gathered}\omega_t + \bar{u}\omega_r + \bar{v}\omega_\varphi = \nu\left(\omega_{rr} + \frac{1}{r^2}\,\omega_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,\omega_r\right),\\ \bar{u}_r + \frac{1}{r}\,\bar{u} + \frac{1}{r}\,\bar{v}_\varphi = 0, \quad \bar{v}_r + \frac{1}{r}\,\bar{v} - \frac{1}{r}\,\bar{u}_\varphi = \omega.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Операторы перепишутся так:

$$\bar{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}\ , \ \ \bar{X}_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial r} - \bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{u}} - \bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{v}} - 2\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\ , \ \ \bar{X}_4 = t\frac{\partial}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial v} + 2\frac{\partial}{\partial\omega}\ . \tag{3.2}$$

Будем искать решение системы (1.1) на операторе X_1. Инвариантами этого оператора являются (x, y, u, v, ω). Поэтому стационарное решение является инвариантным решением системы (1.1).

Построим фактор-систему на операторе X_3, инвариантами которого являются x^2/t, y^2/t, xu, yv, $t\omega$. Решение уравнений (1.1) ищем в виде $(u, v, \omega) = (\frac{1}{x}\,U(\lambda,\mu), \frac{1}{y}\,V(\lambda,\mu),\ \frac{1}{t}\,W(\lambda,\mu))$, где $\lambda = x^2/t$, $\mu = y^2/t$. После подстановки получаем фактор-систему

$$-W - W_\lambda(\lambda - 2U) - W_\mu(\mu - 2V) = 2\nu(W_\lambda + 2\lambda W_{\lambda\lambda} + W_\mu + 2\mu W_\mu),$$

$$-\frac{1}{\lambda}\,U + 2U_\lambda - \frac{1}{\mu}\,V + 2V_\mu = 0, \quad 2\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,V_\lambda - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,U_\lambda\right) = W. \tag{3.3}$$

На операторе вращения $\bar{X}_2$ инвариантное решение уравнений (3.1) ищется в виде $(\bar{u}, \bar{v}, \omega) = (U(r,t), V(r,t), W(r,t))$. Система будет такой:

$$W_t + UW_r + \nu\left(W_{rr} + \frac{1}{r}\,W_r\right), \quad U_r + \frac{1}{r}\,U = 0, \quad V_r + \frac{1}{r}\,V = W. \tag{3.4}$$

Оператор $\bar{X}_4$ имеет следующие инварианты: r, t, $\bar{u}$, $t\bar{v} - r\varphi$, $t\omega - 2\varphi$, поэтому решение ищем в виде $(\bar{u}, \bar{v}, \omega) = \big(U(r,t), \frac{1}{t}(r\varphi - V(r,t)), \frac{1}{t}(W(r,t) + 2\varphi)\big)$. Уравнения (3.1) перепишутся так:

$$W_t + UW_r - \frac{1}{t}\,W + \frac{2}{rt}\,V = \nu\left(W_{rr} + \frac{1}{r}\,W_r\right), \quad U_r + \frac{1}{r}\,U + \frac{1}{t}\ = 0, \quad V_r + \frac{1}{r}\,V = W. \tag{3.5}$$

Рассмотрим оператор $X_1 + a\bar{X}_4, a = \text{const} \neq 0$ с его инвариантами r, $\varphi - a^2t^2/2$, $\bar{u}$, $\bar{v} - art$, $\omega - 2at$. Обозначим $\lambda = \varphi - a^2t^2/2$, тогда решение уравнений (3.1) ищем в виде $(\bar{u}, \bar{v}, \omega) = (U(r,\lambda), V(r,\lambda) + art, W(r,\lambda) + 2art)$. В результате получаем фактор-систему

$$\begin{gathered} UW_r + \frac{1}{r}\,VW_\lambda + 2a = \nu\left(W_{rr} + \frac{1}{r^2}\,W_{\lambda\lambda} + \frac{1}{r}\,W_r\right), \\ V_r + \frac{1}{r}\,U + \frac{1}{r}\,V_\lambda = 0, \quad V_r + \frac{1}{r}\,V - \frac{1}{r}\,U_\lambda = W. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Оператор $\bar{X}_2 + b\bar{X}_3, b = \text{const} \neq 0$ с инвариантами r^2/t, $re^{b\varphi}$, $r\bar{u}$, $r\bar{v}$, $t\omega$ определяет вид решения $(\bar{u}, \bar{v}, \omega) = \big(\frac{1}{r}\,U(\lambda,\mu), \frac{1}{r}\,V(\lambda,\mu), \frac{1}{t}\,W(\lambda,\mu)\big)$, где $\lambda = r^2/t$, $\mu = re^{b\varphi}$. После подстановки в (3.1) получаем фактор-систему

$$\begin{gathered} (2\lambda U - \lambda^2)W_\lambda + (\mu U + b\mu V)W_\mu - \lambda W = \\ = \nu(4\lambda^2 W_{\lambda\lambda} + (1 + b^2)\mu^2 W_{\mu\mu} + 4\lambda\mu W_{\lambda\mu} + 3\lambda W_\lambda + (1 + b)\mu W_\mu), \\ 2\lambda U_\lambda + \mu U_\mu + b\mu V_\mu = 0, \quad 2\lambda V_\lambda + \mu V_\mu - b\mu U_\mu = \lambda W. \end{gathered} \tag{3.7}$$

На бесконечномерном операторе $X_5(f(t)) + X_6(g(t))$ инвариантами являются t, $g(t)x - f(t)y$, $g(t)u - f'(t)y$, $f(t)v - g'(t)x$, ω. Обозначим через $\lambda = g(t)x - f(t)y$, тогда решение уравнений (1.1) представимо в виде $(u, v, \omega) = (\frac{1}{g}(f'y + U(t,\lambda)),\ \frac{1}{f}(g'x + V(t,\lambda)),\ W(t,\lambda))$. Система (1.1) преобразуется в фактор-систему

$$\begin{gathered} W_t + (U - V)W_\lambda = \nu(g^2 + f^2)W_{\lambda\lambda}, \quad U_\lambda - V_\lambda = 0, \\ gg' - ff' + g^2V_\lambda + f^2U_\lambda = fgW. \end{gathered} \tag{3.8}$$

4. Точные решения. Рассмотрим фактор-систему (3.8). Из второго уравнения следует, что $U_\lambda = V_\lambda$ или $U = V + a(t)$, где $a(t)$ — произвольная функция. Два других уравнения перепишутся в виде

$$W_t + a(t)W_\lambda = \nu(f^2 + g^2)W_{\lambda\lambda}, \ V_\lambda = \frac{fg}{f^2 + g^2}W + \frac{ff' - gg'}{f^2 + g^2}, \tag{4.1}$$

где $f(t), g(t)$ — гладкие функции, $f \neq 0, g \neq 0$, $\lambda = g(t)x - f(t)y$.

Решение первого уравнения из (4.1) будем искать методом разделения переменных. Положим $W(t,\lambda) = h(t)\varphi(\lambda)$. Разделение переменных реализуется, если $a(t) = a_0(f^2(t) + g^2(t))$, $a_0 = \text{const}$. Функцию $h(t)$ находим в явной форме, а на $\varphi(\lambda)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$h(t) = \exp\left[C_0 \int (f^2(t) + g^2(t))dt\right], \quad \nu\varphi'' - a_0\varphi' - C_0\varphi = 0. \tag{4.2}$$

Находим корни характеристического уравнения для уравнения из (4.2):

$$\gamma_{1,2} = \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 + 4\nu C_0}}{2\nu}.$$

Предположим, что $a_0^2 + 4\nu C_0 < 0$, тогда $\gamma_{1,2} = \dfrac{a_0}{2\nu} \pm i\dfrac{b_0}{2\nu}$, где $b_0 = \sqrt{-(a_0^2 + 4\nu C_0)}$. Следовательно,

$$\varphi(\lambda) = \left(C_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}\lambda + C_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}\lambda\right) \exp\left[\frac{a_0}{2\nu}\lambda\right].$$

Первое уравнение из (4.1) проинтегрировано. Определили завихренность

$$\omega = W = \left(C_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}\lambda + C_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}\right) \exp\left[C_0 \int (f^2(t) + g^2(t))dt + \frac{a_0}{2\nu}\lambda\right]. \quad (4.3)$$

Из второго уравнения (4.1) находим функцию

$$V = \frac{fg}{f^2 + g^2} h(t)\tilde{\varphi}(\lambda) + \frac{ff' - gg'}{f^2 + g^2}\lambda + b(t),$$

где $b(t)$ — произвольная функция,

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \left(\tilde{C}_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}\lambda + \tilde{C}_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}\lambda\right) \exp\left[\frac{a_0}{2\nu\lambda}\right], \quad \tilde{C}_1 = \frac{2\nu(a_0C_1 + b_0C_2)}{a_0^2 + b_0^2}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{2\nu(a_0C_2 - b_0C_1)}{a_0^2 + b_0^2}.$$

Возвращаясь от инвариантных функций U, V к физическим скоростям u, v, получаем их представление

$$v = \frac{(g'f + f'g)x - (ff' - gg')y}{f^2 + g^2} + \frac{g}{f^2 + g^2} h(t)\tilde{\varphi}(\lambda) + \frac{b(t)}{f},$$

$$u = \frac{(f'g + g'f)y + (ff' - gg')x}{f^2 + g^2} + \frac{f}{f^2 + g^2} h(t)\tilde{\varphi}(\lambda) + \frac{b(t) + a_0(f^2 + g^2)}{g}. \quad (4.4)$$

В частном случае, когда $f = g = 1$, $b(t) = a_0 = 0$, имеем $\lambda = x - y$; $b_0 = \sqrt{-C_0}$. Формулы (4.3), (4.4) примут вид

$$\omega = \left(C_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}(x - y) + C_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}(x - y)\right) \exp[2C_0 t],$$

$$u = v = \frac{1}{2}\left(\tilde{C}_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}(x - y) + \tilde{C}_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}(x - y)\right) \exp[2C_0 t].$$

Вся плоскость разбивается прямыми $\mathrm{tg}\dfrac{b_0}{2\nu}(x - y) = -\dfrac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}$ на полосы, на которых $u = v = 0$. Характерно то, что на соседних полосах течение жидкости противоположно направлено. Заметим: поскольку $C_0 < 0$, то из последних формул следует, что $\omega \to 0$, $u \to 0$, $v \to 0$ при $t \to +\infty$, то есть движение жидкости "затухает".

В случае, когда $a_0^2 + 4\nu C_0 = 0$, $a_0^2 + 4\nu C_0 > 0$, уравнения (4.1) также полностью интегрируются.

Список литературы

[1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.

[2] Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А Применение теоретико–групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: ВО Наука. Сиб. изд. фирма. 1994.

[3] Ovsiannikov L. V. On the optimal systems of subalgebras // J. Lie Groups and Their Applications. 1994. Vol. 1, №2. P. 18–26.