

УСТОЙЧИВОСТЬ КАТЯЩИХСЯ ВОЛН ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ

В. Ю. ЛЯПИДЕВСКИЙ

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: liapid@hydro.nsc.ru

Shallow water theory of roll wave generation in open channels and in tubes with elastic walls are considered. The modulation equations for nonlinear wave trains are derived and the stability criterion for roll waves is formulated. An asymptotic formula for boundaries of stability region is given.

Проблема математического моделирования нелинейных стадий развития неустойчивости равномерного потока под воздействием массовых сил и трения о стенки канала является классической в гидравлике открытых русел. В протяженных наклонных каналах развитие длинноволновой неустойчивости приводит к формированию катящихся волн, то есть близкого к периодическому нестационарного течения, состоящего из плавных участков, разделенных обрушивающимися борами. Интерес к проблеме моделирования катящихся волн в последнее время связан также с тем, что развитие длинноволновой неустойчивости в горизонтальных и близких к горизонтальным каналах и трубах при совместном движении в них газожидкостных сред имеет много общих черт с эволюцией катящихся волн в открытых каналах. В частности, генерация в двухфазном течении катящихся волн конечной амплитуды является необходимым условием перехода от расслоенного к снарядному режиму течения.

Математическая теория катящихся волн на наклонной плоскости развита в работе [4]. В каналах произвольного сечения структура катящихся волн изучена в [5, 3] для однослойных и двухслойных течений жидкости. Так как в этих исследованиях длина волны остается свободным параметром, то возникает вопрос о нелинейной устойчивости пакета катящихся волн конечной амплитуды. Для плоских открытых каналов эта проблема решена в [1] при помощи уравнений модуляций для таких пакетов. Критерий устойчивости катящихся волн конечной амплитуды сформулирован в терминах гиперболичности уравнений модуляций. Аналогичный критерий получен для однослойных и двухслойных течений в трубах и закрытых каналах [2]. Однако при определении области нелинейной устойчивости катящихся волн возникает проблема точности вычислений средних по периоду характеристик волнового движения из-за сингулярности интегрируемых выражений. В этой связи наибольший интерес представляет асимптотический анализ катящихся волн предельной амплитуды, так как устойчивыми являются достаточно длинные волны с амплитудой, близкой к предельной.

В работе проводится асимптотический анализ устойчивости катящихся волн для класса автомодельных течений, в которых отсутствует характерный вертикальный масштаб. В этом случае уравнения модуляций существенно упрощаются, а тип уравнений модуляций определяется только одним параметром, например, относительной амплитудой волны. Показано, что асимптотическая формула для определения устойчивости катящихся волн предельной амплитуды с высокой степенью точности задает границы области устойчивости для всех допускаемых катящихся волн.

1. Рассматривается следующая система уравнений, описывающая в приближении мелкой воды развитие неустойчивости течения и формирование катящихся волн в каналах различной формы:

$$\begin{aligned} A_t + (Au)_x &= 0, \\ (Au)_t + \left(Au^2 + \frac{1}{\beta} A^\beta \right)_x &= \alpha A - A^{2-\beta} u^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь A — площадь поперечного сечения канала, заполненного жидкостью, u — средняя скорость течения. Параметр $\beta > 1$ задает закон распределения давления в канале, а параметр α характеризует результирующее влияние различных факторов, таких как геометрия канала, трение о стенки и упругость стенок канала, на течение в поле массовых сил. Жидкость считается несжимаемой.

Система (1), записанная в безразмерном виде, включает, по крайней мере, три физически значимых случая течения:

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 01-01-00767) и СО РАН (проект 1-2000)

© В. Ю. Ляпидевский, 2001.

а) $\beta = 2$. Уравнения (1) представляют собой уравнения мелкой воды на наклонной плоскости [4];

б) $\beta = 1,5$. Уравнения (1) описывают течение в открытом наклонном канале треугольного сечения. Заметим, что геометрические характеристики сечения, такие как угол между плоскостями, образующими канал, входят в параметр α при соответствующем выборе переменных;

в) $\beta = 1,5$. Уравнения (1) задают течение в круглой трубе с деформируемыми стенками. При этом сила, действующая на жидкость со стороны стенок, предполагается пропорциональной радиусу трубы.

Во всех случаях коэффициент трения считается постоянным.

2. Рассмотрим решения системы (1), зависящие от переменной $\xi = x - \mathcal{D}t$, $\mathcal{D} > 0$. Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} - u)A &= (\mathcal{D} - u_c)y = m, \\ \frac{d}{d\xi} \left((\mathcal{D} - u)^2 A + \frac{1}{\beta} A^\beta \right) &= \alpha A - A^{2-\beta} u^2 = F. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь y и u_c — площадь поперечного сечения и скорость жидкости в критическом сечении, определяемом равенством

$$\Delta_c = (\mathcal{D} - u_c)^2 - y^{\beta-1} = 0. \quad (3)$$

Пусть $k = (\beta - 1)/2 > 0$. Будем рассматривать волны, бегущие вниз по потоку ($0 < u < \mathcal{D}$). Система (2) редуцируется к уравнению

$$\frac{dA}{d\xi} = \frac{F(A)}{\Delta(A)}, \quad (4)$$

где $F(A) = \alpha A - A^{1-2k} \left(\mathcal{D} - \frac{m}{A} \right)^2$, $\Delta(A) = A^{2k} - \frac{m^2}{A^2}$.

Необходимым условием существования гладкого решения (4) в окрестности критического сечения является равенство

$$F(y) = \alpha y - y^{1-2k} u_c^2 = 0,$$

из которого вытекают следующие соотношения

$$\begin{aligned} u_c &= \sqrt{\alpha} y^k, \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_* y^k, \quad \mathcal{D}_* = 1 + \sqrt{\alpha}, \quad m = y^{k+1}, \\ u &= y^k (\mathcal{D}_* - y/A). \end{aligned}$$

Из этих соотношений и (4) следует

$$\frac{d\xi}{dA} = \frac{\Delta(A)}{F(A)} = y^{2k-1} a(s), \quad (5)$$

где $a(s) = \delta(s)/f(s)$, $\delta(s) = s^{2k} - s^{-2}$, $f(s) = \alpha s - s^{1-2k} (\mathcal{D} - 1/s)^2$, $s = A/y$.

Для построения периодического решения, состоящего из непрерывного решения, переводящего докритический поток ($\Delta > 0$) в сверхкритический ($\Delta < 0$) в системе координат, движущейся с волной, и устойчивых разрывов (боров), переводящих сверхкритический поток в докритический, необходимо, чтобы

$$\frac{dA}{d\xi} > 0. \quad (6)$$

Для выполнения (6) в окрестности критического сечения в силу (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(1) = 2k\alpha - 2\sqrt{\alpha} > 0,$$

или

$$\alpha > 1/k^2. \quad (7)$$

Далее, пусть A_r , A_l — минимальная и максимальная площади сечения в волне, а u_r и u_l — соответствующие скорости течения. Тогда соотношения на разрыве принимают вид

$$\begin{aligned} A_l(\mathcal{D} - u_l) &= A_r(\mathcal{D} - u_r), \\ A_l(\mathcal{D} - u_l)^2 + \frac{1}{\beta} A_l^\beta &= A_r(\mathcal{D} - u_r)^2 + \frac{1}{\beta} A_r^\beta. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу (8) зависимость $w = w(z)$, $z = A_r/y$, $w = A_l/y$ может быть найдена из уравнения

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\beta} z^\beta = \frac{1}{w} + \frac{1}{\beta} w^\beta = g(w). \quad (9)$$

Таким образом, периодическое разрывное решение, представляющее собой бегущую (катящуюся) волну, будет построено, если фиксированы два параметра, например, y и z . Основные параметры катящихся волн, в частности, период волны, средняя глубина, средний расход и т. д. могут быть найдены из (4), (8) как функции y и z . При этом необходимо, чтобы $a(s) > 0$ при $z < s < w(z)$.

3. Критерий устойчивости катящихся волн выводится из анализа уравнений модуляций для волновых потоков с медленно меняющимися определяющими параметрами [2]. Заметим, что в силу периодичности течения в качестве осредненных величин могут быть взяты средние значения по периоду и после осреднения уравнения (1) становятся однородными

$$\begin{aligned} \bar{A}_t + (\bar{A}u)_x &= 0, \\ (\bar{A}u)_t + \left(Au^2 + \frac{1}{\beta} A^\beta \right)_x &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Зависимость осредненных величин, входящих в (10), от y и z для катящихся волн может быть получена следующим образом

$$\begin{aligned} L &= \int_{A_r}^{A_l} \frac{d\xi}{dA} dA = y^{\beta-1} \lambda, \quad \lambda = \int_z^{w(z)} a(s) ds, \\ \bar{A} &= \frac{1}{L} \int_{A_r}^{A_l} A \frac{d\xi}{dA} dA = y\bar{z}, \quad \bar{z} = \frac{1}{\lambda} \int_z^{w(z)} sa(s) ds, \\ \bar{G} &= \frac{1}{L} \int_{A_r}^{A_l} \left(\frac{m^2}{A} + \frac{1}{\beta} A^\beta \right) \frac{d\xi}{dA} dA = y^\beta \bar{g}, \quad \bar{g} = \frac{1}{\lambda} \int_z^{w(z)} g(s)a(s) ds, \\ \overline{Au} &= \mathcal{D}\bar{A} - m = y^{(\beta+1)/2} (\mathcal{D}_* \bar{z} - 1), \\ \overline{Au^2 + \frac{1}{\beta} A^\beta} &= \mathcal{D}^2 \bar{A} - 2\mathcal{D}m + \bar{G} = y^\beta (\mathcal{D}_*^2 \bar{z} - 2\mathcal{D}_* + \bar{g}). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя соотношения (11), систему (10) можно переписать для искомых переменных y, \bar{z} в виде

$$\begin{aligned} (y\bar{z})_t + (y^{k+1}\gamma)_x &= 0, \\ (y^{k+1}\gamma)_t + (y^{2k+1}\theta)_x &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\gamma = \gamma(\bar{z}) = \mathcal{D}_* \bar{z} - 1$, $\theta = \theta(\bar{z}) = \mathcal{D}_*^2 \bar{z} - 2\mathcal{D}_* + \psi(\bar{z})$, $\psi(\bar{z}) = \bar{g}(z(\bar{z}))$.

Характеристики системы (12)

$$\frac{dx^\pm(t)}{dt} = y^k \mu^\pm(\bar{z})$$

могут быть найдены из решения характеристического уравнения

$$\mu^2(\gamma' \bar{z} - (k+1)\gamma) - \mu(\theta' \bar{z} - (2k+1)\theta) + (k+1)\gamma\theta' - (2k+1)\theta\gamma' = 0 \quad (13)$$

относительно величины $\mu = \mu^\pm(\bar{z})$. Будем называть пакет катящихся волн устойчивым, если для определяющих параметров (y, z) уравнение (13) имеет два действительных корня. Нетрудно видеть, что устойчивость катящихся волн для системы (1) зависит только от переменной z или \bar{z} . Коэффициенты уравнения (13) зависят от функции $\psi(\bar{z})$ и ее производной. Поведение этой функции в окрестности точек $\bar{z} = 1$ и $\bar{z} = z_m$, где $f(z_m) = 0$, требует дополнительного исследования из-за сингулярности функции $a(s)$ в окрестности этих точек. Даже при численном определении области устойчивости катящихся волн следует использовать асимптотику функции $\psi(\bar{z})$, найденную ниже.

4. Рассмотрим поведение функции $\psi(\bar{z})$ в окрестности точки $\bar{z} = 1$. Заметим, что

$$a(1) = \frac{\delta'(1)}{f'(1)}, \quad a'(1) = \frac{\delta''(1)f'(1) - \delta'(1)f''(1)}{2(f'(1))^2}.$$

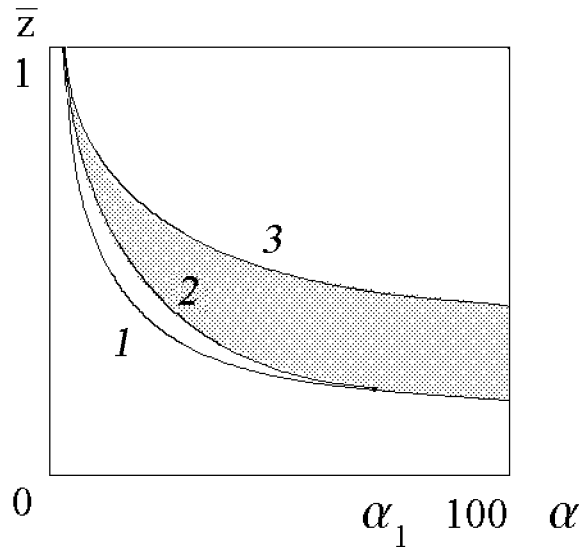


Рис. 1. Диаграмма устойчивости катящихся волн для $\beta = 2$. Заштрихована область устойчивых волн. Кривая 1 — волны предельной амплитуды, кривые 2, 3 — границы области устойчивости, рассчитанные по формулам (16), (17).

Далее $\bar{z}(1) = 1, \bar{z}'(1) = 0, \bar{g}(1) = g(1), \bar{g}'(1) = 0$. Поэтому

$$\psi'(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{g}'(z)}{\bar{z}'(z)} = \frac{\bar{g}''(1)}{\bar{z}''(1)}.$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \bar{g}''(1) &= \frac{1}{3}g''(1), \\ \bar{z}''(1) &= \frac{2}{3} \frac{a'(1)}{a(1)} - \frac{1}{3} \frac{\delta''(1)}{\delta'(1)}. \end{aligned}$$

Для системы (1) имеем

$$\begin{aligned} \delta'(1) &= \beta + 1, \quad \delta''(1) = (\beta - 1)(\beta - 2) - 6, \\ f'(1) &= (\beta - 1)\alpha - 2\sqrt{\alpha}, \quad f''(1) = (2 - \beta)(\beta - 1)\alpha + 4(\beta - 1)\sqrt{\alpha} - 2. \end{aligned}$$

Полученные формулы позволяют определить из (13) устойчивость катящихся волн малой амплитуды. На рис. 1 показана область устойчивости катящихся волн (заштрихованная область) на плоскости (α, \bar{z}) для $\beta = 2$. При $\alpha > 4$ катящиеся волны малой амплитуды являются неустойчивыми. Более того, область устойчивых волн примыкает к границе $\bar{z} = z_m(\alpha)$ (кривая 1), соответствующей волнам предельной амплитуды. Поэтому для корректного определения устойчивости волн конечной амплитуды требуется определить асимптотическое поведение функции $\psi(\bar{z})$ в окрестности линии $\bar{z} = z_m(\alpha)$.

5. Пусть z_m — ближайший к 1 корень уравнения $f(z_m) = 0 (z_m < 1)$. Существование такого корня следует из того, что при выполнении (7) на интервале $(1/D_*, 1)$ функция $f(s)$ меняет знак. Представим функцию $a(s)$ в виде

$$a(s) = \frac{b(s)}{s - z_m}.$$

Заметим, что $\lambda(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_m$, так как

$$\lambda(z) = \int_z^{w(z)} a(s) ds = \int_z^{w(z)} \left(a(s) - \frac{b(z_m)}{s - z_m} \right) ds + b(z_m) \ln \frac{w(z) - z_m}{z - z_m} \tag{14}$$

и подынтегральная функция в (14) ограничена. Далее

$$\begin{aligned}\bar{g}(z) &= \frac{1}{\lambda} \int_z^{w(z)} (g(s) - g(z_m))a(s) ds + g(z_m), \\ \bar{z}(z) &= \frac{1}{\lambda} \int_z^{w(z)} b(s) ds + z_m.\end{aligned}\tag{15}$$

Из ограниченности подынтегральных функций в (15) следует, что $\bar{g}(z) \rightarrow g(z_m)$, $\bar{z}(z) \rightarrow z_m$ при $z \rightarrow z_m$. Производная $\psi'_m = \psi'(z_m)$ вычисляется из соотношений

$$\psi'_m = \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{\bar{g}(z) - g(z_m)}{\bar{z} - z_m} = \frac{\int_{z_m}^{w_m} (g(s) - g(z_m))a(s) ds}{\int_{z_m}^{w_m} b(s) ds},\tag{16}$$

где $w_m = w(z_m)$.

Заменяем в окрестности $\bar{z} = z_m$ функцию $\psi(\bar{z})$ линейной, т. е. $\psi_m(\bar{z}) = g(z_m) + \psi'_m(z - z_m)$. Подставляя линейную функцию $\psi_m(\bar{z})$ вместо $\psi(\bar{z})$ в (13), можно найти явно границы области гиперболичности из условия обращения в нуль дискриминанта. В силу линейности коэффициентов (13) по \bar{z} приходим к квадратному уравнению

$$(b_1\bar{z} + b_2)^2 - 4(a_1\bar{z} + a_2)(c_1\bar{z} + c_2) = 0.\tag{17}$$

Коэффициенты (17) имеют вид

$$\begin{aligned}a_1 &= -k\mathcal{D}_*, \quad a_2 = k + 1, \quad b_1 = -2k(\mathcal{D}_*^2 + \psi'_m), \\ b_2 &= -(2k + 1)(g(z_m) - \psi'_m z_m - 2\mathcal{D}_*), \quad c_1 = -k\mathcal{D}_*(\mathcal{D}_*^2 + \psi'_m), \\ c_2 &= -(k + 1)(\mathcal{D}_*^2 + \psi'_m) - (2k + 1)\mathcal{D}_*(g(z_m) - \psi'_m z_m - 2\mathcal{D}_*).\end{aligned}$$

На рис. 1 показаны корни уравнения (17) $\bar{z} = \bar{z}^\pm(\alpha)$ (кривые 2 и 3). Заметим, что приближенные формулы (16), (17) дают достаточно точную аппроксимацию области устойчивости катящихся волн. Более того, они дают точную границу перехода $\alpha = \alpha_1$ ($\alpha_1 = 65$ при $\beta = 2$) от неустойчивости к устойчивости волн предельной амплитуды на линии $\bar{z} = z_m(\alpha)$ (кривая 1).

6. Эффективность приближенного метода нахождения границ области устойчивости катящихся волн связана с тем обстоятельством, что устойчивыми являются достаточно длинные волны, так что параметр z для этих волн находится в малой окрестности точки z_m .

Для каналов произвольного сечения, в частности для труб, анализ области нелинейной устойчивости существенно усложняется по сравнению с автомодельным случаем, рассмотренным выше. Поэтому полученные в работе точные и приближенные формулы для нахождения границ областей устойчивости катящихся волн могут служить хорошим тестом для проверки более общих алгоритмов.

Список литературы

- [1] Ляпидевский В. Ю. Устойчивость катящихся волн. Докл. РАН, 1998. Т. 363, №1. С. 59–61.
- [2] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: ИСО РАН, 1999.
- [3] BOUDLAL A., DYMENT A. Weakly nonlinear interfacial waves in a duct of arbitrary cross section // Eur. J. Mech. B/ Fluids. 1996. Vol. 15. P. 331–366.
- [4] DRESSLER R. F. Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // Comm. Pure Appl. Math. 1949. Vol. 2. P. 140–194.
- [5] DYMENT A. Phénomènes exceptionnels de propagation d'ondes de pesanteur dans un canal // J. de Mécanique. 1981. Vol. 2. P. 59–78.