ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА СЖИМАЕМОГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

В. В. Бублик

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: bublik@itam.nsc.ru

In the report the Navier — Stokes equations for compressible viscous heat-conducting perfect gas with a polytropic equation of state are considered. The construction of exact solutions is made in the class of regular partially invariant solutions. The involutive analysis of the obtained systems is conducted. The examples of new partially invariant solutions not reduced to invariant solutions are obtained.

Введение

При разработке и создании новых численных методов и комплексов вычислительных программ для решения задач математической физики важным этапом является тестирование формул, алгоритмов и их программных реализаций на точных решениях. Одним из способов получения точных решений являются методы группового анализа дифференциальных уравнений [6]. С помощью этих методов можно получать классы инвариантных, частично инвариантных и дифференциально-инвариантных решений. В данной работе рассматриваются частично инвариантные решения.

Построение частично инвариантных решений сопряжено с большими вычислительными трудностями. Это связано с тем, что для получения таких решений требуется проведение анализа на совместность систем дифференциальных уравнений с частными производными. Алгоритмы, позволяющие за конечное число операций провести такой анализ, хорошо известны [5, 11, 13]. Однако на практике для более-менее сложных систем уравнений произвести вручную необходимые вычисления человеку часто не под силу из-за труднообозримого объема аналитических выкладок. И здесь на помощь приходят системы компьютерной алгебры (например, *Mathematica*, *MACSYMA*, *Maple*, *REDUCE*, *AXIOM*, *MuPAD*). Впервые системы компьютерной алгебры для анализа совместности были применены школой Н. Н. Яненко [9, 1, 4, 7].

В настоящее время во всем мире создано и продолжает создаваться множество программ и пакетов программ для исследования совместности систем дифференциальных уравнений. Однако практика показала, что чем более универсальной является программа, тем уже круг задач, к которым она применима. И связано это с ограниченностью машинных ресурсов (даже на современном этапе развития вычислительной техники). Поэтому для сложных и практически важных задач математической физики приходится искать индивидуальные подходы для нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Прежде всего приходится отказываться от полностью автоматического исполнения программ исследования на совместность. Необходимым условием получения результата в таких задачах является существенное использование пошагового диалогового режима исполнения программ. Практически системы компьютерной алгебры используются в этом случае только для рутинных аналитических вычислений (дифференцирований, подстановок и других манипуляций с выражениями). Проблема же выбора следующего действия полностью ложится на человека. При этом для успешного решения задачи приходится активно применять не только собственно теорию совместности дифференциальных уравнений, но и многие другие разделы математики, механики, физики.

Так как часто условия инволютивности систем в чистом виде выписать не удается, то приходится отказываться от решения этой задачи, переключаясь на задачу построения решения рассматриваемой системы. Тем более, для приложений чаще важнее иметь не систему дифференциальных уравнений в инволюции, а ее общее решение. На практике это выглядит примерно так: сначала для исследуемой

*Работа выполнена при поддержке INTAS (проект 99–1222), РФФИ (проекты 99–01–00515 и 01–01–06171), интеграционного проекта СО РАН 2000–1 и целевой программы поддержки междисциплинарных проектов между УрО РАН и СО РАН.

системы реализуются шаги одного из известных алгоритмов приведения систем в инволюцию, затем на каком-то этапе проводится либо интегрирование части уравнений, либо другие упрощения (связанные, например, с некоторыми физическими свойствами), после чего исследование продолжается.

При исследовании активно привлекаются физические свойства модели (например, положительность некоторых параметров). Это помогает существенно снизить число вариантов при приведении систем в инволюцию: нет необходимости рассматривать те варианты, которые заведомо не имеют физического смысла. После проведения частичного интегрирования может получится подсистема полиномиальных алгебраических уравнений на константы интегрирования. Такие системы удобно исследовать с помощью базисов Грёбнера. Также существенно упростить исследования помогает использование групповых свойств. Во-первых, групповые свойства исходной модели позволяют фиксировать часть констант интегрирования, что сокращает число неизвестных параметров. Во-вторых, при построении частично инвариантных решений необходимо уделять внимание проблеме редукции. Например, после проведения частичного интегрирования можно обнаружить, что при определенном выборе констант (или функций интегрирования) решение редуцируется к инвариантному (причем можно явно указать группу, относительно которой решение инвариантно). Естественно, что эти случаи нет необходимости исследовать до конца, так как это решение можно получить более простым способом.

1. Описание модели

Рассматривается система уравнений, описывающая плоские движения вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния:

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x + (\lambda(u_x+v_y))_x + (2\mu u_x)_x + (\mu(u_y+v_x))_y\,, \tag{1}$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + (\lambda(u_x+v_y))_y + (\mu(u_y+v_x))_x + (2\mu v_y)_y\,, \tag{2}$$

$$\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0, \tag{3}$$

$$c_V\rho(T_t + uT_x + vT_y) + p(u_x+v_y) = (\varkappa T_x)_x + (\varkappa T_y)_y + \lambda(u_x+v_y)^2 + \mu\left(2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y+v_x)^2\right). \tag{4}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости, ρ — плотность, T — температура, $p = R\rho T$ — давление, $\varepsilon = c_V T$ — внутренняя энергия, R — газовая постоянная, c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, $\mu = m_0 T^\omega$ — первый коэффициент вязкости, $\lambda = l_0 T^\omega$ — второй коэффициент вязкости, $\varkappa = k_0 T^\omega$ — коэффициент теплопроводности. При исследовании существенно будем учитывать следующие условия, имеющие физический смысл:

$$\rho > 0, \quad T > 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu > 0, \quad \varkappa \geq 0, \quad R > 0, \quad c_V > 0.$$

В случае $3\lambda + 2\mu = 0$ группа, допускаемая системой уравнений (1) – (4), для нестационарных движений вычислена в [2], для стационарных — в [12]. Для произвольных λ и μ допускаемая группа для трехмерных нестационарных движений найдена в [10].

В нестационарном случае система (1) – (4) допускает алгебру Ли L_8 с базисом

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_4 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_5 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,$$
$$X_6 = \partial_t, \quad X_7 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \rho\partial_\rho, \quad X_8 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2(\omega-1)\rho\partial_\rho + 2T\partial_T.$$

Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_8 построена в [3].

В случае стационарных течений система (1) – (4) допускает алгебру Ли L_5 с базисом

$$Y_1 = \partial_x, \quad Y_2 = \partial_y, \quad Y_3 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad Y_4 = x\partial_x + y\partial_y - \rho\partial_\rho,$$
$$Y_5 = u\partial_u + v\partial_v + (2\omega-1)\rho\partial_\rho + 2T\partial_T.$$

Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5 построена в [12].

2. Пример нестационарного движения газа

Рассмотрим подалгебру $\{X_3, X_4, X_5{+}\alpha X_8\}$, где $\alpha \neq 0$. При $\omega \neq 1$ инварианты соответсвующей подгруппы:

$$t, \quad \left((ut-x)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)} + (vt-y)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\right)\rho^{1/(2-2\omega)},$$

$$\left((ut-x)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}-(vt-y)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\right)\rho^{1/(2-2\omega)},\quad T\rho^{1/(1-\omega)}.$$

Решение будем искать в виде

$$u=\frac{1}{t}\rho^{1/(2\omega-2)}\left(\varphi(t)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}+\psi(t)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\right)+\frac{x}{t}\equiv U(t,x,\rho),$$
$$v=\frac{1}{t}\rho^{1/(2\omega-2)}\left(\varphi(t)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}-\psi(t)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\right)+\frac{y}{t}\equiv V(t,y,\rho),$$
$$T=T_1(t)\rho^{1/(\omega-1)},\quad \rho=\rho(t,x,y).$$

Для функций U и V имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}=\frac{t(\alpha U+V)-(\alpha x+y)}{2(\omega-1)t\rho},\quad \frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{t(\alpha V-U)-(\alpha y-x)}{2(\omega-1)t\rho}.$$

Подстановка представления решения в уравнения (1) – (4) дает систему для определения функций $\rho(t,x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $T_1(t)$. Поскольку полное исследование этой системы на совместность еще не завершено, то ограничимся демонстрацией частного случая: рассмотрим движения с однородной деформацией. В этом случае на компоненты скорости накладываются условия

$$u_{xx}=u_{xy}=u_{yy}=v_{xx}=v_{xy}=v_{yy}=0. \tag{5}$$

Условия (5) легко переписывается в систему уравнений второго порядка на функцию ρ:

$$((\alpha U+V)t-(\alpha x+y))\rho\rho_{xx}+\frac{(\alpha^2-2\alpha(\omega-1)-1)(Ut-x)+2(\alpha-\omega+1)(Vt-y)}{2(\omega-1)}\rho_x^2=0,$$
$$((\alpha U+V)t-(\alpha x+y))\rho\rho_{xy}+\frac{(\alpha^2-2\alpha(\omega-1)-1)(Ut-x)+2(\alpha-\omega+1)(Vt-y)}{2(\omega-1)}\rho_x\rho_y=0,$$
$$((\alpha U+V)t-(\alpha x+y))\rho\rho_{yy}+\frac{(\alpha^2-2\alpha(\omega-1)-1)(Ut-x)+2(\alpha-\omega+1)(Vt-y)}{2(\omega-1)}\rho_y^2=0,$$
$$((\alpha V-U)t-(\alpha y-x))\rho\rho_{xx}+\frac{(\alpha^2-2\alpha(\omega-1)-1)(Vt-y)-2(\alpha-\omega+1)(Ut-x)}{2(\omega-1)}\rho_x^2=0,$$
$$((\alpha V-U)t-(\alpha y-x))\rho\rho_{xy}+\frac{(\alpha^2-2\alpha(\omega-1)-1)(Vt-y)-2(\alpha-\omega+1)(Ut-x)}{2(\omega-1)}\rho_x\rho_y=0,$$
$$((\alpha V-U)t-(\alpha y-x))\rho\rho_{yy}+\frac{(\alpha^2-2\alpha(\omega-1)-1)(Vt-y)-2(\alpha-\omega+1)(Ut-x)}{2(\omega-1)}\rho_y^2=0.$$

Условия совместности этой системы имеют вид

$$\left((Ut-x)^2+(Vt-y)^2)\right)\rho_x=0,\quad \left((Ut-x)^2+(Vt-y)^2)\right)\rho_y=0.$$

При $\rho_x=\rho_y=0$ имеем

$$u=u_1(t)+x/t,\quad v=v_1(t)+y/t,\quad \rho=\rho(t),\quad T=T(t),$$

т. е. решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_3,X_4\}$.

Рассмотрим случай $u=x/t$, $v=y/t$, $\rho=\rho(t,x,y)$, $\rho_x^2+\rho_y^2\neq 0$. Уравнения (1) – (3) сводятся к

$$\omega\left(2(l_0+m_0)T_1^{\omega-1}-Rt\right)=0,\quad t\rho_t+x\rho_x+y\rho_y+2\rho=0.$$

При $\omega=0$ решение системы (1) – (4) восстанавливается из решения $\Psi(\xi,\eta)$, $T_1(t)$ системы

$$\Psi_{\xi\xi}+\Psi_{\eta\eta}=A,\quad \frac{c_V(t^2T_1)'-4(l_0+m_0)}{t^2T_1}=Ak_0-\frac{2R}{t} \tag{6}$$

по формулам

$$u=\xi,\quad v=\eta,\quad \rho=\frac{1}{t^2\Psi},\quad T=t^2T_1\Psi,\quad \xi=\frac{x}{t},\quad \eta=\frac{y}{t}.$$

Решение не редуцируется к инвариантному при $\Psi_\xi^2+\Psi_\eta^2\neq 0$.

При $\omega\neq 0$ решения системы (1) – (4), имеющего физический смысл, не существует.

3. Пример стационарного течения

Рассмотрим подалгебру $\{Y_1, Y_2, Y_5\}$ в случае постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности ($\omega = 0$). Инварианты соответствующей подгруппы:

$$u/v, \quad \rho u, \quad Tu^{-2}.$$

Решение будем искать в виде:

$$u = u(x, y), \quad v = v_0 u, \quad \rho = \rho_0/u, \quad T = T_0 u^2.$$

Система (1) – (4) принимает вид:

$$(l_0 + 2m_0)u_{xx} + (l_0 + m_0)v_0 u_{xy} + m_0 u_{yy} - (RT_0 + 1)\rho_0 u_x - v_0\rho_0 u_y = 0, \tag{7}$$

$$m_0 v_0 u_{xx} + (l_0 + m_0)u_{xy} + (l_0 + 2m_0)v_0 u_{yy} - v_0\rho_0 u_x - \left(RT_0 + v_0^2\right)\rho_0 u_y = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &2k_0T_0uu_{xx} + 2k_0T_0uu_{yy} + \left(2k_0T_0 + l_0 + 2m_0 + m_0v_0^2\right)u_x^2 + 2(l_0 + m_0)v_0u_xu_y + \\ &+ \left(2k_0T_0 + (l_0 + 2m_0)v_0^2 + m_0\right)u_y^2 - (2c_V + R)\rho_0T_0uu_x - (2c_V + R)v_0\rho_0T_0uu_x = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Переопределенная система уравнений (7) – (9) требует исследования на совместность.

Для иллюстрации того, как могут помочь при исследовании совместности базисы Грёбнера и задача о редукции, рассмотрим случай $k_0 = 0$. Тогда уравнение (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\left(l_0 + 2m_0 + m_0v_0^2\right)u_x^2 + 2(l_0 + m_0)v_0u_xu_y + \left((l_0 + 2m_0)v_0^2 + m_0\right)u_y^2 - \\ &-(2c_V + R)\rho_0T_0uu_x - (2c_V + R)v_0\rho_0T_0uu_x = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

3.1. Случай $v_0 = 0$

Рассмотрим сначала случай $v_0 = 0$. Тогда система уравнений (7), (8), (10) принимает вид:

$$(l_0 + 2m_0)u_{xx} + m_0u_{yy} - (RT_0 + 1)\rho_0u_x = 0, \tag{11}$$

$$(l_0 + m_0)u_{xy} - R\rho_0T_0u_y = 0, \tag{12}$$

$$(l_0 + 2m_0)u_x^2 + m_0u_y^2 - (2c_V + R)\rho_0T_0uu_x = 0. \tag{13}$$

3.1.1. Случай $m_0RT_0 - l_0 - m_0 = 0$

При $m_0RT_0 - l_0 - m_0 = 0$ интегрование уравнений (11), (12) дает:

$$u(x, y) = \left(C_1y^2 + C_2y - \frac{2C_1m_0^2}{(l_0 + 2m_0)\rho_0}x + C_3\right)\exp\left\{\frac{\rho_0}{m_0}x\right\} + C_4.$$

При $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ решение редуцируется к инвариантному относительно $\{Y_1, Y_2\}$. При $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ решение редуцируется к инвариантному относительно $\{Y_2, m_0Y_1 + \rho_0Y_5\}$. Легко проверить, что все следствия уравнения (13) сводятся только к этим двум редуцируемым к инвариантным решениям случаям.

3.1.2. Случай $m_0RT_0 - l_0 - m_0 \neq 0$

При $m_0RT_0 - l_0 - m_0 \neq 0$ интегрование уравнений (11), (12) дает:

$$u(x, y) = (C_1\sin(k_1y) + C_2\cos(k_1y))\exp\{k_2x\} + C_3\exp\{k_3x\} + C_4,$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(m_0RT_0 - l_0 - m_0)R\rho_0^2T_0}{m_0(l_0 + 2m_0)^2}}, \quad k_2 = \frac{R\rho_0T_0}{l_0 + m_0}, \quad k_3 = \frac{(RT_0 + 1)\rho_0}{l_0 + 2m_0}.$$

Уравнение (13) в этом случае имеет структуру

$$a_1(x)\cos^2(k_1y) + a_2(x)\cos(k_1y)\sin(k_1y) + a_3(x)\sin^2(k_1y) + a_4(x)\cos(k_1y) + a_5(x)\sin(k_1y) + a_6(x) = 0,$$

откуда следует, что

$$a_2 = a_4 = a_5 = 0, \quad a_1 + a_6 = 0, \quad a_1 + a_3 = 0. \tag{14}$$

Сами значения функций $a1, \ldots, a_6$ здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Анализ условий (14) показывает, что все решения редуцируются к инвариантным относительно $\{Y_1, Y_2\}$ или $\{Y_2, Y_1 + k_3Y_5\}$.

3.2. Случай $v_0 \neq 0$

Дифференциальные следствия уравнения (10) имеют вид

$$(2Au_x + Bu_y + Du)u_{xx} + (Bu_x + 2Cu_y + Eu)u_{xy} + (Du_x + Eu_y)u_x = 0, \tag{15}$$
$$(2Au_x + Bu_y + Du)u_{xy} + (Bu_x + 2Cu_y + Eu)u_{yy} + (Du_x + Eu_y)u_x = 0. \tag{16}$$

При дальнейшем анализе нам неоднократно будут встречаться множители вида $\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$, на которые нам нужно будет умножать или делить уравнения. Поэтому сразу рассмотрим случай, когда это выражение может быть равным 0.

3.2.1. Случай $\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$

Данное условие можно проинтегрировать и в зависимости от значений α, β, γ получить u одного из следующих трех видов.

Случай $u = C_1 \exp\{k_1 x + k_2 y\} + C_2 \exp\{k_3 x + k_4 y\}$. При $C_2 = 0$ решение редуцируется к инвариантному, поэтому будем рассматривать случай

$$C_1^2 + C_2^2 \neq 0, \quad (k_1 - k_3)^2 + (k_2 - k_4)^2 \neq 0.$$

Данное решение допускает поворот, соответствующий оператору Y_3, поэтому одну из четырех констант k_1, k_2, k_3, k_4 для облегчения проведения расчетов можно сделать равной 0. Подстановка представления вида решения в систему уравнений (7), (8), (10) и дальнейшее расщепление относительно экспонент дают нам семь уравнений, которые можно трактовать как полиномиальные уравнения относительно переменных k_1, k_2, k_3, k_4, которые можно исследовать с использованием техники базисов Грёбнера. Компьютерные вычисления показывают, что базис Грёбнера полученной системы тривиален:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = 0,$$

т. е. нередуцируемых решений нет.

Случай $u = (C_1 \cos(k_1 x + k_2 y) + C_2 \sin(k_1 x + k_2 y)) \exp\{k_3 x + k_4 y\}$. Будем рассматривать случай

$$C_1^2 + C_2^2 \neq 0, \quad k_1 k_4 \neq k_2 k_3.$$

Если эти условия не выполняются, то решение редуцируется к инвариантному. Данное решение допускает поворот, соответствующий оператору Y_3, поэтому одну из четырех констант k_1, k_2, k_3, k_4 для облегчения проведения расчетов можно сделать равной 0. Подстановка представления вида решения в систему уравнений (7), (8), (10) и ряд более сложных, чем в предыдущем случае, преобразований дают нам семь уравнений, которые можно трактовать как полиномиальные уравнения относительно переменных k_1, k_2, k_3, k_4, которые можно исследовать с использованием техники базисов Грёбнера. Компьютерные вычисления показывают, что базис Грёбнера полученной системы также тривиален, т. е. нередуцируемых решений нет.

Случай $u = u_0 \exp\{k_1 x + k_2 y\}$. Решение редуцируется к инвариантному.

3.2.2. Случай $\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u \neq 0$

В этом случае уравнение (16) на многообразии уравнений (7), (8), (10), (15) принимает вид

$$F u_x u_y + G u u_x + H u_y^2 + I u u_y + J u^2 = 0. \tag{17}$$

Продифференцируем уравнение (17) по x и по y и перейдем на многообразие уравнений (7), (8), (10), (15), (16). Получиться два дифференциальных уравнения первого порядка. В зависимости от соотношений между параметрами m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0 и T_0 эти следствия могут иметь разный вид. Однако, компьютерный подсчет показал, что обязательным следствием этих уравнений будет условие $u_y/u = \mathrm{const}$, т. е. решение редуцируется к инвариантному.

4. Заключение

Таким образом, для системы (1) – (4) получено нередуцируемое к инвариантному частично инвариантное решение, которое восстанавливается из решения уравнения Пуассона (6). При этом начально-краевые задачи для системы (1) – (4) легко переписываются в краевую задачу для уравнения Пуассона. Задание скорости на границе должно быть согласовано с решением. Заданию температуры на границе области соответствует задача Дирихле, заданию потока температуры соответствует задача Неймана, возможны также смешанные задачи. В настоящее время эллиптические уравнения в области с криволинейной границей можно решать численно с очень высокой точностью [8].

Список литературы

[1] Арайс Е. А., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ // Докл. АН СССР, 1974. Т. 214, № 4. С. 737–738.

[2] Бублик В. В. Групповая классификация двумерных уравнений движения вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ, 1996. Т. 37, № 2. С. 27–34.

[3] Бублик В. В. Инвариантные решения ранга 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ, 1997. Т. 38, № 3. С. 26–31.

[4] Ганжа В. Г., Мелешко С. В., Мурзин Ф. А., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных // Докл. АН СССР, 1981. Т. 261, № 5. С. 1044–1046.

[5] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ, 1962.

[6] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[7] Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

[8] Шапеев А. В., Шапеев В. П. Разностные схемы повышенной точности для решения эллиптических уравнений в области с криволинейной границей // ЖВМиМФ, 2000. Т. 40, № 2. С. 223–232.

[9] Шурыгин В. А., Яненко Н. Н. О реализации на электронных вычислительных машинах алгебраическо-дифференциальных алгоритмов // Проблемы кибернетики, 1961, вып. 1. С. 33–43.

[10] Bublik V. V. Group classification of the Navier — Stokes equations for compressible viscous heat-conducting gas. In: “Computer algebra in scientific computing: Proc. of the Third Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing CASC 2000”, Berlin, Heidelberg, N. Y. Barcelona, Hong Kong, L., Milan, Paris, Singapore, Tokio: Springer, 2000. P. 61–67.

[11] Kuranishi M. Lectures on involutive systems of partial differential equations. Sao Paulo, 1967.

[12] Meleshko S. V. Group classification of two-dimensional stable viscous gas equations // Int. J. Nonlin. Mech., 1998. Vol. 34, No. 3, P. 449–456.

[13] Pommaret J. F. Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups. N. Y. London, Paris, 1978.