О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ МАССИВЕ С УЧЕТОМ УСЛОВИЙ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА

Т.В. БУРНЫШЕВА, В.О. КАЛЕДИН А.Ю. МАРЧЕНКО
Новокузнецкий филиал-институт Кемеровского госуниверситета, Россия
e-mail: tburn@nfi.kemsu.ru

Пусть имеется область, состоящая из однородных подобластей. Каждая подобласть имеет свою постоянную плотность и упругие свойства. Определяемая нами область подвергается внешним нагрузкам, в результате в ней возникает поле напряжений. Поставим задачу описать поле напряжений и поле деформаций в неоднородной области, возникающие при гравитационных и тектонических воздействиях, если известны характеристики упругости каждой среды.

Параметры напряжённо-деформированного состояния рассматриваемой кусочно однородной области должны удовлетворять следующим группам уравнений [1]:

уравнениям равновесия

$$Div\,\sigma - p = 0; \tag{1}$$

физическому закону

$$\sigma = D\varepsilon\,; \tag{2}$$

кинематическим соотношениям Коши

$$\varepsilon = \nabla u\,; \tag{3}$$

уравнениям неразрывности

$$L(\varepsilon) = 0\,; \tag{4}$$

граничным условиям и условиям сопряжения в напряжениях

$$\sigma\,\mathrm{n}\,|_{\Gamma} = p^{*}, \qquad \sigma\,\mathrm{n}|_{\zeta+0} = \sigma\,\mathrm{n}|_{\zeta-0} \tag{5}$$

и перемещениях

$$u\,|_{\Sigma} = u^{*}, \ \ \mathrm{u}|_{\zeta+0} = \mathrm{u}|_{\zeta-0}. \tag{6}$$

Введём обозначения: $\sigma = \begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz}\end{bmatrix}^T$ – вектор напряжений; $\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz}\end{bmatrix}^T$ – вектор деформаций; D – матрица упругих характеристик изотропного материала; u – перемещения точек области как функция координат; ∇ – оператор дифференцирования по координатам, связывающий перемещения с деформациями; Γ, Σ – часть границы, на которой заданы кинематические или статические граничные условия; p – распределённые (объёмные) силы; n – внешняя нормаль к поверхности; p^* – распределённая нагрузка на поверхности.

Для начала рассмотрим, как ведёт себя решение краевой задачи на границе раздела двух сред. Если параметры сред на границе раздела изменяются скачкообразно, то в общем случае компоненты вектора напряжений и вектора деформаций также будут претерпевать разрыв в точках границы. На границе раздела двух сред непрерывными остаются шесть функций: составляющие вектора деформаций

$$\varepsilon_s^1 = \varepsilon_s^2, \quad \varepsilon_t^1 = \varepsilon_t^2, \quad \gamma_{st}^1 = \gamma_{st}^2, \tag{7}$$

составляющие вектора напряжений

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2, \quad \tau_{sn}^1 = \tau_{tn}^2, \quad \tau_{tn}^1 = \tau_{tn}^2. \tag{8}$$

Остальные компоненты этих векторов разрывны.

Для учёта условий сопряжения на границах неоднородностей выразим разрывные компоненты вектора напряжений и вектора деформаций через непрерывные компоненты. Для этого воспользуемся физическим законом (2). В матричном виде эта зависимость может быть записана следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{tn} \\ \sigma_s \\ \sigma_t \\ \tau_{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & -\frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & 0 & \frac{1-3\mu^2-2\mu^3}{(1-\mu^2)E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \\ \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{st} \\ \sigma_n \\ \tau_{sn} \\ \tau_{tn} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Представим все составляющие вектора напряжений и вектора деформаций на границе раздела сред в произвольном базисе {x,y,z} через непрерывные составляющие в базисе, связанном с границей {s,t,n}, где s, t – единичные векторы, лежащие в касательной к границе раздела плоскости, n-единичный вектор нормали. Имеем

$$F^{\{nst\}} = \begin{bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_t \\ \sigma_n \\ \tau_{st} \\ \tau_{sn} \\ \tau_{tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{st} \\ \sigma_n \\ \tau_{sn} \\ \tau_{tn} \end{bmatrix} = U^{\{nst\}} \tag{10}$$

и

$$Q^{\{nst\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{st} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & -\frac{\mu+\mu^2}{1-\mu^2} & 0 & \frac{1-3\mu^2-2\mu^3}{(1-\mu^2)E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{st} \\ \sigma_n \\ \tau_{sn} \\ \tau_{tn} \end{bmatrix} = U^{\{nst\}}. \tag{11}$$

Обозначим матрицы преобразования через P и W соответственно.

Перейдём к дискретизации поставленной краевой задачи. Разобьём трёхмерную пространственную неоднородную область на конечные элементы так, чтобы каждый отдельный элемент содержал однородный материал. В качестве конечного элемента возьмём куб, вершины которого определим в качестве узлов. Используемый КЭ относится к классу изопараметрических элементов, поэтому множество функций N_i, определяющих форму элемента, совпадает с множеством базисных функций N_i, определяющих аппроксимацию искомых функции. Для рассматриваемого КЭ базисные функции N_i, $i = 1,..8$ описываются выражением [2]

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) \quad i = 1,..8\ , \tag{12}$$

где координаты ξ_i, η_i, ζ_i изменяются в пределах от –1 до 1, так, что грани элемента являются координатными плоскостями; $\xi, \eta, \zeta,$ -текущие координаты.

Умножая компоненту вектора напряжений на базисные функции КЭ, получаем значение данной функции в восьми узлах элемента. Однако в каждом узле элемента (точке области) задаётся полностью весь вектор напряжений. Значит, внутри элемента одновременно необходимо аппроксимировать шесть функций – компонент вектора напряжений:

$$\sigma(\xi,\eta,\zeta) = [N_1 E \quad N_2 E \quad \ldots \quad N_8 E] \times [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T. \tag{13}$$

Перейдём к непрерывным компонентам тензоров в базисе {x,y,z}:

$$\sigma(\xi,\eta,\zeta) = \mathrm{NC} \cdot P \cdot \mathrm{U}^{\{stn\}}. \tag{14}$$

Таким образом, зная значения непрерывных функций $U^{\{stn\}}$ для данного КЭ, можно получить значения всех напряжений данного конечного элемента.

Аналитически определим несогласованные значения вектора напряжений внутри КЭ по обобщённому закону Гука (2), считая известными узловые значения перемещений, и аппроксимируя перемещения с помощью того же набора базисных функций. Полученные перемещения не удовлетворяют условиям сопряжения. Аппроксимация вектора напряжений $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ на элементе должна мало отличаться от несогласованных значений вектора напряжений внутри элемента. Таким образом, можно определить невязку между согласованными и несогласованными напряжениями. Проведём интегрирование квадрата невязки по всему объёму области:

$$\varPhi(\sigma)=\int_V(\overline{\sigma}-N\sigma)^2\,dV\,, \qquad (15)$$

где $\overline{\sigma}$ - несогласованные напряжения. Узловые значения согласованных напряжений найдём из условия минимума этого функционала. Преобразуем функционал и перейдём к непрерывным функциям. Имеем

$$\varPhi(U)=\int_V\left[\overline{\sigma}^T\overline{\sigma}-\overline{\sigma}^T NCPU^{\{stn\}}-U^{\{stn\}^T}P^TC^TN^T\overline{\sigma}+U^{\{stn\}^T}P^TC^TN^TNCPU^{\{stn\}}\right]dV\to min.$$

(16)

Возьмём производную от функционала по $U^{\{stn\}}$ и приравняем её к нулю. Проводя преобразования, получим:

$$\int_V P^TC^TN^TNCPdV\cdot U^{\{stn\}}=\int_V P^TC^TN^T\overline{\sigma}dV\,. \qquad (17)$$

Последнее соотношение эквивалентно матричному уравнению

$$A\,U^{\{stn\}}=B, \qquad (18)$$

где $A=\left(a_{i,j}\right)_{1,j=1}^{n}$ - $n\times n$-матрица коэффициентов при непрерывных функциях напряжений и деформаций, $n>>1$; $U^{\{stn\}}=(u_1,\ldots,u_n)^T$-вектор-столбец неизвестных; $B=(b_1,\ldots b_n)^T$-вектор столбец напряжений внутри элементов.

Узловые значения согласованных напряжений определяются решением системы ЛАУ (18). Эта система имеет симметричную положительно определённую матрицу A высокого порядка со следующими особенностями: матрица слабо заполнена, достаточно большая ширина ленты (при формировании A по элементам учитывается наличие в восьми узлах элемента по 6 степеней свободы), нет диагонального преобладания. Число степеней свободы равно шести, что в два раза больше, чем при отыскании узловых перемещений. Поэтому решение системы очень трудоёмко. В связи с вышеизложенным, предлагается решить систему (18) комбинированным итерационным методом: фронтальным алгоритмом Айронса [3] и методом ортогональной прогонки Годунова.

Глобальная матрица системы формируется из подматриц, относящихся к элементам и имеющих малый порядок. Для сокращения ширины фронта разобьем неизвестные на группы, так, чтобы каждая группа неизвестных содержала степени свободы узлов одного из параллельных сечений. Для определённости предположим, что это горизонтальное сечение. Временно зафиксируем степени свободы узлов всех сечений, кроме верхнего. Тогда имеет смысл рассматривать уравнения с теми номерами, что и степени свободы верхнего сечения. Полученная система уравнений будет иметь следующую структуру

$$\begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} U_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \boxed{A_{12}}\boxed{A_{13}} & \cdots \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} U_2\\ U_3\\ \ldots \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где A_{11}, A_{1i}- ленточные матрицы, A_{11}- диагональный блок глобальной матрицы A, A_{1i}- внедиагональные блоки матрицы A, относящиеся к неизвестным верхнего сечения, U_1- неизвестные верхнего сечения, B_1- соответствующие правые части.

Ширина ленты матрицы A_{11} определяется разностью номеров степеней свободы одного элемента, примыкающего к верхнему сечению. В общем случае эта величина была бы пропорциональна $m \times n$, где n и m-число узлов соответственно в поперечном, продольном направлениях. Но так как в данном случае не учитываются степени свободы по всем остальным группам, то эта величина (ширина ленты) пропорциональна $n+1$.

Для большей экономии памяти формирование диагональной подматрицы A_{11} будем проводить фронтальным методом с одновременным гауссовым исключением тех неизвестных, для которых строка и столбец коэффициентов уже сформированы. При добавлении очередного элемента будем исключать неизвестные, которые в дальнейшем не встречаются. При этом можно проводить процесс исключения очередного неизвестного, а затем добавлять матрицу следующего элемента. В памяти необходимо держать треугольную матрицу, размер которой равен ширине фронта. Ширина фронта, в свою очередь, определяется количеством узлов между добавленными элементами и теми, которые будем добавлять.

Таким образом, проходя по всем горизонтальным сечениям, сформируем глобальную матрицу коэффициентов, в диагональных блоках которой расположены коэффициенты при групповых неизвестных. Внедиагональные блоки содержат коэффициенты при неизвестных, которые в соответствующих сечениях временно считаются постоянными.

Чтобы увеличить скорость сходимости этого процесса, сформируем ещё две глобальные матрицы, аналогичные предыдущей, по продольному и поперечному направлениям. Затем будем проводить итерационный процесс последовательно друг за другом по трём направлениям. В неявном виде это выглядит следующим образом:

$$\overline{A}^{I} U^{(t+1)} = B - \widetilde{A}^{I} U^{(t)}, \tag{20}$$

$$\overline{A}^{II} U^{(t+2)} = B - \widetilde{A}^{II} U^{(t+1)}, \tag{21}$$

$$\overline{A}^{III} U^{(t+3)} = B - \widetilde{A}^{III} U^{(t+2)}, \tag{22}$$

где из уравнения (20) находим решение системы $U^{(t+1)}$ и подставляем его в уравнение (21). Находя решение $U^{(t+2)}$ из второго уравнения, подставляем его в уравнение (22), затем решение $U^{(t+3)}$ при следующей итерации возвращается в (20) вместо $U^{(t)}$. Процесс останавливаем, когда решение на двух последовательных итерациях изменяется мало. За начальное приближение $U^{(0)}$ можно взять несогласованное поле напряжений внутри элементов.

Покажем, что предложенный алгоритм действительно сходится к точному решению системы уравнений (18). Введём квадратичную функцию

$$\Phi(U) = \frac{1}{2} U^T A U - B^T U \,. \tag{23}$$

Перепишем эту функцию в виде

$$\Phi(U) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_i^T A_{ij} U_j - \sum_i B_i^T U_i \,, \tag{24}$$

причём $A_{ij}^T = A_{ji}$.

(25)

Обозначим за U_K -ю неизвестную и $U_{i \neq j} = U_i^*$ - const. Представим квадратичную функцию в виде суммы слагаемых, одни из которых содержат U_K, другие не содержат её вовсе, и учтём процедуру транспонирования (25)

$$\Phi(U_K) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq K} U_i^{*T} A_{ij} U_j^* - \sum_{i \neq K} B_i^T U_i^* + \frac{1}{2} \sum_{j \neq K} 2 U_K^T A_{Kj} U_j^* + \frac{1}{2} U_K^T A_{KK} U_K - B_K^T U_K \,. \tag{26}$$

Значение U_K найдём из условия минимума $\Phi(U_K)$. Для этого найдём производную по U_K и приравняем её к нулю:

$$A_{KK} U_K + \sum_{j \neq K} A_{Kj} U_j^* - B_K = 0. \tag{27}$$

Матричное уравнение

$$A_{KK} U_K = B_K - \sum_{j \neq K} A_{Kj} U_j^* \tag{28}$$

имеет единственное решение в силу положительной определённости матрицы A_{KK}, которая следует из положительной определённости матрицы А.

Приведение системы (18) к виду (28) достаточно для определения условного минимума функционала $\varPhi(U_K)$ при условии, что неизвестные других групп остаются постоянными. Следовательно, значение квадратичной формы на следующей итерации не более, чем на предыдущей:

$$\varPhi(U_K^{t+1}) \le \varPhi(U_K^t), \tag{29}$$

где t – номер итерации.

Так как $U_K^{t+1} \ne U_K^t$, а матрица коэффициентов А положительно определена, то функционал $\varPhi(U)$ будет иметь экстремум и притом единственный. Значит, неравенство (29) можно записать строго:

$$\varPhi(U_K^{t+1}) < \varPhi(U_K^t). \tag{30}$$

Перейдём в итерационном процессе (20) – (22) к пределу при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} U^{(t)} = U. \tag{31}$$

Имеем

$$\overline{A}U = B - \widetilde{A}U, \tag{32}$$

или после очевидных преобразований

$$(\overline{A} + \widetilde{A})U = B. \tag{33}$$

Поскольку сумма $\overline{A} + \widetilde{A}$ равна полной матрице А, получаем:

$$AU = B, \tag{34}$$

следовательно, U – точное решение исходной системы.

Найденные в результате решения узловые значения напряжений позволяют вычислить по формулам (9) значения разрывных компонент, удовлетворяющие условиям сопряжения.

Список литературы

[1] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М: Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.

[2] Сегерлинд Л. Применение методов конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

[3] Айронс Б.М. Задачи о собственных значениях матриц конструкции: исключение лишних переменных // Ракетная техника и космонавтика. – Т. 3. 1965. - №5. – с. 207-211.