

# МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО МАССИВА ПРИ ДЕЙСТВИИ МАССОВЫХ СИЛ

КАЛЕДИН В.О., ЦВЕТКОВ А.Б.

*Новокузнецкий филиал-институт КемГУ, Россия*

e-mail: vkaled@nfi.kemsu.ru

При прогнозировании залежей полезных ископаемых актуальны задачи, связанные с расчетом напряженно-деформированного состояния массива горной породы. Математическими моделями таких задач являются краевые задачи теории упругости. Особенностью их постановки является необходимость учета сил тяжести, что приводит к определенным сложностям при численном решении. В настоящей статье предлагается методика численного моделирования на основе метода конечных элементов, позволяющая уменьшить неблагоприятное влияние неравномерности сетки элементов на точность получаемых результатов.

## 1. Постановка задачи

Введем в пространстве прямоугольную систему координат  $OXYZ$ . Обозначим через  $\Omega$  замкнутую ограниченную в пространстве область, занимаемую изотропным упругим телом, а через  $S$  ее границу. Для задания граничных условий разобьем  $S$  на два множества  $S_1$  и  $S_2$ . Здесь  $S_2$  - часть границы, совпадающая с дневной поверхностью массива, а  $S_1$  - дополнение  $S_2$  до  $S$ ,  $S = S_1 \cup S_2$ . Обозначим через  $x, y, z$  координаты произвольной точки  $M$  из области  $\Omega$ , а через  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ ,  $w = w(x, y, z)$  координаты вектора смещения  $\bar{u}^T = (u, v, w)$ . Здесь и далее через  $\bar{a}^T$  обозначаем транспонированный вектор  $\bar{a}$ .

В вариационной постановке краевая задача теории упругости с граничными условиями  $\bar{u}|_{S_1} = 0$ ,  $\sigma|_{S_2} = 0$  сводится к нахождению вектора смещения  $\bar{u}$  из условия минимума квадратичного функционала  $\Pi$  - полной потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\varepsilon^T \sigma - \varepsilon_0^T \sigma) d\Omega - \iiint_{\Omega} \bar{u}^T \bar{P} d\Omega, \quad (1)$$

где первый интеграл - энергия деформаций, второй интеграл - работа массовых сил  $\bar{P}$ , а  $\varepsilon^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$  - вектор полной деформации,  $\varepsilon_0^T = (\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}, \gamma_{0xz}, \gamma_{0yz}, \gamma_{0xy})$  - вектор начальной деформации,  $\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy})$  - вектор напряжений.

## 2. Дискретизация задачи

При решении краевой задачи методом конечных элементов в качестве конечного элемента выберем тетраэдр, так как при замене переменных якобиан остается постоянной величиной (это позволяет устранить неблагоприятное влияние неравномерной сетки), и любой другой элемент можно рассматривать как объединение некоторого числа тетраэдров.

Впишем в поверхность  $S$  область  $\Omega(E)$ , составленную из  $E$  взаимно не пересекающихся тетраэдров  $\omega^{(e)}$ ,  $e = 1, 2, \dots, E$ , принадлежащих  $\Omega$ . В краевой задаче заменим  $\Omega$  на объединение тетраэдров  $\Omega(E)$ . Аппроксимацию вектора смещения  $\bar{u}$  на множестве  $\Omega(E)$  обозначим через  $\bar{u}(E)$ . Обозначим через  $\Pi(E)$  аппроксимацию потенциальной энергии  $\Pi$  на  $\Omega(E)$ . С учетом разбиения области  $\Omega$  на конечные элементы  $\omega^{(e)}$  аппроксимация краевой задачи в вариационной форме формулируется в виде: найти вектор  $\bar{u}(E)$  из условия минимума квадратичного функционала  $\Pi(E)$  - полной потенциальной энергии

$$\Pi(E) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \iiint_{\omega^{(e)}} (\varepsilon(E)^T \sigma(E) - \varepsilon_0(E)^T \sigma(E) - 2\bar{u}(E)^T \bar{P}(E)) d\Omega, \quad (2)$$

где величины  $\varepsilon(E)$ ,  $\varepsilon_0(E)$ ,  $\sigma(E)$ ,  $\bar{P}(E)$  - аппроксимации  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma$ ,  $\bar{P}$ .

Для аппроксимации вектора смещения  $\bar{u}$  на каждом тетраэдре  $\omega^{(e)}$  выбираем с  $m$  точек  $M_s^{(e)} \in \omega^{(e)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ . Множество этих точек образует сетку  $g^{(e)} = \{M_s^{(e)}, s = 1, 2, \dots, m\}$  на тетраэдре  $\omega^{(e)}$ . Объединение всех этих множеств задает сетку  $G = \bigcup_{e=1}^E g^{(e)} = \{M_l, l = 1, 2, \dots, n\}$  для области  $\Omega(E)$ , где  $n$  - число узлов сетки, а  $M_l$ ,  $M_l \in \Omega(E)$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ , - узлы сетки  $G$ . Так как один и тот же узел может принадлежать различным конечным элементам, то  $n \leq E \cdot m$ . В данном случае краевая задача сводится к нахождению координат вектора смещения в узлах сетки  $G$ .

Определение минимума функционала известным образом сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [1] относительно перемещений узлов. Коэффициенты системы получаются как сумма матриц жесткости конечных элементов, которые, в свою очередь, вычисляются интегрированием по объему элемента произведения матриц вторых частных производных от энергии деформации по объему элемента. Правые части системы определяются как интегралы по объему от массовых сил, умноженных на базисные функции формы.

Базисные функции были выбраны в виде полиномов второй степени. Это связано с тем, что в случае однородного и горизонтально-слоистого массива горных пород точное решение является квадратичным полиномом от вертикальной координаты. Естественно ожидать, что и в случае неоднородного массива полиномы меньшего порядка будут давать решение с худшей точностью. В соответствии с этим, число узлов тетраэдра было выбрано равным числу коэффициентов полного полинома второй степени от трех переменных - 10; узлы расположены в вершинах и на серединах сторон.

При вычислении интегралов используется замена переменных. Новые переменные выбираются таким способом, чтобы интегрирование по любому тетраэдру  $\omega^{(e)}$ , расположенному произвольно относительно системы координат  $OXYZ$ , сводилось к интегрированию по единичному тетраэдру

$$\omega = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1; x + y + z \leq 1\}, \quad (3)$$

имеющему фиксированное положение относительно новой системы координат. Для вычисления интегралов по тетраэдру  $\omega$  используется формула Гаусса с восемью узлами [2]:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz \cong \sum_{i=1}^8 C_i f(x_i, y_i, z_i); \quad (4)$$

числовые значения весовых коэффициентов и координаты точек интегрирования приведены ниже.

$C_1 =$	0,0091694299216	$C_2 =$	0,021157006454
$C_3 =$	0,016027040599	$C_4 =$	0,036979856358
$x_1 =$	0,54415184401	$x_2 =$	0,12251482265
$y_1 =$	0,29399880063	$y_2 =$	0,56593316507
$y_3 =$	0,070679724159	$y_4 =$	0,13605497680
$z_1 =$	0,12764656212	$z_2 =$	0,24571332521
$z_3 =$	0,30377276481	$z_4 =$	0,58474756320
$z_5 =$	0,034202793236	$z_6 =$	0,065838687060
$z_7 =$	0,081395667014	$z_8 =$	0,15668263734

$$C_5 = C_1, C_6 = C_2, C_7 = C_3, C_8 = C_4, x_7 = x_5 = x_3 = x_1, x_8 = x_6 = x_4 = x_2, y_5 = y_1, y_6 = y_2, y_7 = y_3, y_8 = y_4.$$

Эта формула является точной для многочленов третьей степени от переменных  $x, y, z$ . Хотя в нашем случае подынтегральные выражения содержат полиномы четвертой степени, такая схема интегрирования представляется приемлемой.

### 3. Оценка точности численного решения.

При реализации методики расчета на ЭВМ использовался пакет программ "Параметр-Микро" [3], который позволяет рассчитать напряженно деформированное состояние неоднородного изотропного массива горной породы с применением шестигранных конечных элементов. В этот пакет были внесены дополнения, связанные с разбиением расчетной области на тетраэдры.

При подготовке данных для расчета использовались препроцессорные средства пакета "Параметр-Микро", ориентированные на шестигранные конечные элементы, с последующим преобразованием заполненных массивов данных.

Предварительно область  $\Omega$  аппроксимируется  $E_0$  шестигранниками  $\Omega^{(e)}$ ,  $e=1,2,\dots,E_0$ . Затем при преобразовании каждый шестигранник  $\Omega^{(e)}$  разбивается на шесть тетраэдров  $\omega_i^{(e)}$ ,  $i=1,2,3,4,5,6$ , с десятью узлами  $m=10$ , как показано на рис. 1.

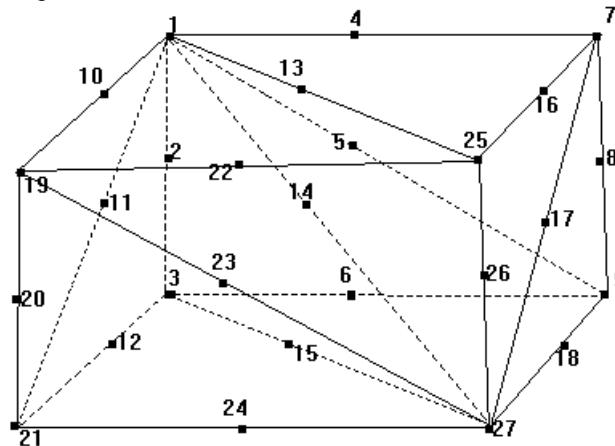


Рис. 1. Схема преобразования конечно-элементной модели.

На рисунке 1 тетраэдры имеют узлы:

$\omega_1^{(e)}$ : 1, 7, 25, 27, 4, 16, 13, 14, 17, 26;  $\omega_2^{(e)}$ : 1, 7, 27, 9, 4, 17, 14, 5, 8, 18;

$\omega_3^{(e)}$ : 1, 9, 27, 3, 5, 18, 14, 2, 6, 15;  $\omega_4^{(e)}$ : 1, 25, 19, 27, 13, 22, 10, 14, 26, 23;

$\omega_5^{(e)}$ : 1, 27, 19, 21, 14, 23, 10, 11, 24, 20;  $\omega_6^{(e)}$ : 1, 27, 21, 3, 14, 24, 11, 2, 15, 12.

Рассмотрим решение краевой задачи на неоднородной области  $\Omega$  в форме прямоугольного параллелепипеда разбитого горизонтальной плоскостью на глубине 500м на две части. У каждой половинки своя плотность. Плотность верхней половины модели задана  $1\text{г/см}^3$ , нижней  $2.5\text{г/см}^3$ . Начало прямоугольной системы координат  $OXYZ$  помещается в одной из вершин  $\Omega$ , а ребра, исходящие из этой вершины, лежат на координатных осях. Параллелепипед имел размеры: по оси  $OX$  (длина)  $X=10000$  метров, по оси  $OY$  (ширина)  $Y=10000$  метров, по оси  $OZ$  (глубина)  $Z=1000$  метров. Область  $\Omega$  вначале разбивалась на  $E_0=160$  шестигранников  $\Omega^{(e)}$ ,  $e=1,2,3,\dots,160$  (по 2 элемента в длину, 2 в ширину, 20 в глубину), а затем производились расчеты с последовательным удвоением числа элементов по каждой их осей. В другом случае исходный пример разбивался на тетраэдры. Для исследования влияния неравномерности сетки сопоставлялись результаты решения с использованием шестигранных конечных элементов с линейной интерполяцией перемещений и описанных выше субпараметрических тетраэдров с квадратичной интерполяцией; в последнем случае каждый из шестигранников разбивался на 6 тетраэдров.

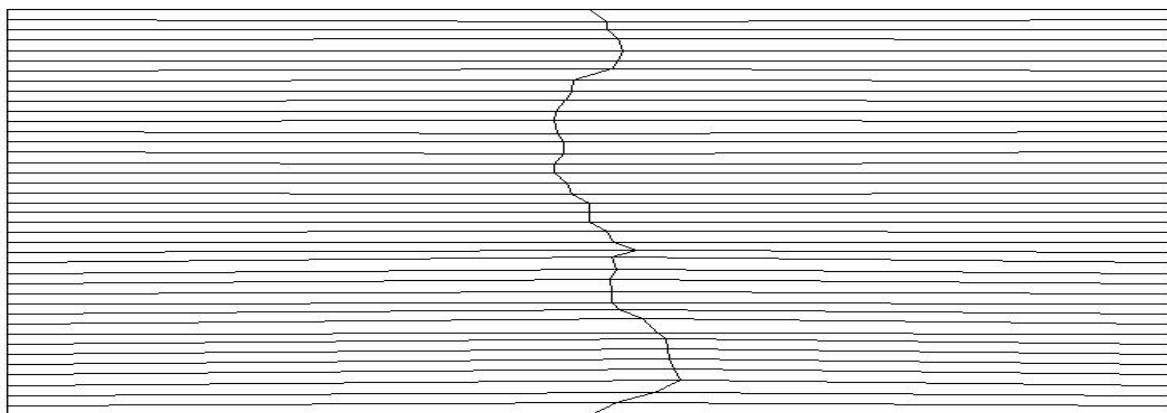


Рис. 2. Неравномерная разбивка расчетной области.

На рис. 2 представлено сечение модели с неравномерной сеткой элементов; необходимость в таких сетках возникает при аппроксимации границ раздела внутренних неоднородностей массива, имеющих неправильную форму.

Оценим погрешность численного решения задачи на неравномерной сетке.

На рис. 3, представлены графики зависимости напряжения  $\sigma_z$  от глубины в сечении YZ, полученные на неравномерной сетке. Как видно из рисунка, решение, полученное с использованием тетраэдров (относительная погрешность  $0,52 \cdot 10^{-6}$ ), дает более точные результаты по сравнению с шестигранниками (относительная погрешность 0,65). Увеличение числа шестигранников по каждой оси в два раза не позволяет достичь точности большей чем при разбиении этих шестигранников на тетраэдры (относительная погрешность 0,34); это связано с непостоянством якобиана при трилинейной аппроксимации перемещений по шестиграннику. Разбиение шестигранников произвольной формы на тетраэдры дает более точный результат (рис. 3), так как при замене переменных якобиан остается постоянной величиной.

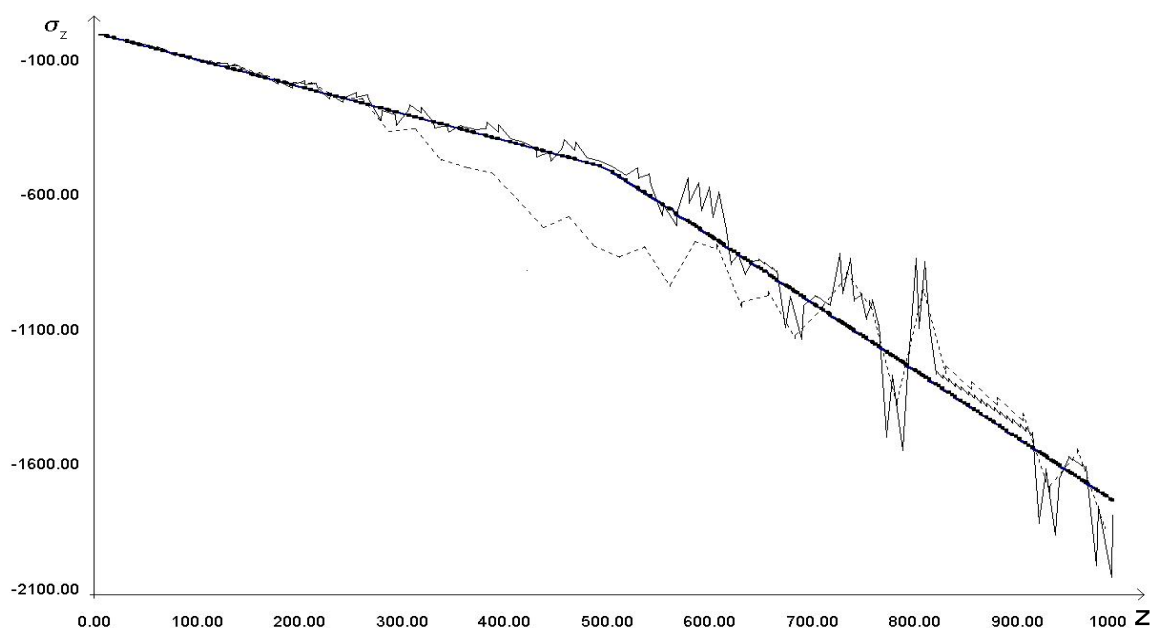


Рис. 3. Пунктиром показана зависимость  $\sigma_z(z)$  для области, разбитой на шестигранники, сплошной толстой линией показана зависимость  $\sigma_z(z)$  для области, разбитой на тетраэдры, сплошной тонкой линией показана зависимость  $\sigma_z(z)$  для области, разбитой на шестигранники, с удвоенным числом элементов по каждой из осей, точками показана зависимость  $\sigma_z(z)$  полученная аналитическим путем.

Таким образом, при решении рассмотренной краевой задачи при действии собственного веса использование тетраэдров с аппроксимацией второго порядка приводит к более точным численным результатам, чем трилинейных шестигранников. В случае однородного массива численное решение не чувствительно к неравномерности сетки конечных элементов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
- [2] Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336с.
- [3] Каледин В.О. Численно - аналитические модели в прочностных расчетах пространственных конструкций. - Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2000. - 204с.