РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В РЕЛАКСАЦИОННО-СЖИМАЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДАМИ МОНТЕ–КАРЛО

К. К. Шакенов

Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

e-mail: shakenov2000@mail.ru

Questions of application of algorithms "random walk on spheres" and "random walk on borders" of methods of Monte Carlo for the decision of tasks linear relaxational of a filtration in porous environment is considered in work. The model of a filtration under the Darcy's law in relaxationally compressible porous environment is considered.

1. Система уравнений линейной релаксационной фильтрации

Следуя работе [1] рассмотрим систему уравнений линейной релаксационной фильтрации в конечной области Ω переменного $x = (x_1, x_2, x_3)$. Границу области Ω обозначим через $\partial\Omega$.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\vec{J}(x,t)dx - \int\limits_{\partial\Omega} p(x,t)\cdot\vec{n}d(\partial\Omega) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} m\rho(x,t)dx + \rho_0\int\limits_{\partial\Omega} W_n d(\partial\Omega) = 0, \tag{2}$$

$$\vec{J} = -\Im(0)\vec{W}(x,t) - \int\limits_0^{\infty}\frac{d\Im(t')}{dt'}\vec{W}(x,t-t')dt', \tag{3}$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \Phi(0)(p-p_0) + \int\limits_0^{\infty}\frac{d\Phi(t')}{dt'}(p-p_0)(x,t-t')dt', \tag{4}$$

где $\vec{J}$ — плотность импульса сил сопротивления, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$, p — давление, m — пористость, ρ — плотность жидкости, $\vec{W}$ — вектор скорости фильтрации, W_n — проекция скорости фильтрации на нормаль $\vec{n}$, $\Im(t)$ — функция релаксации закона фильтрации, $\Phi(t)$ — функция релаксации закона сжимаемости, а также $\Im(0) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0+0}\Im(t)$, $\dfrac{d\Im(t)}{dt}|_{t=0} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0+0}\dfrac{d\Im(t)}{dt}$, $\Phi(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$, p_0, ρ_0 и m_0 — соответственно давление, плотность жидкости и пористость в невозмущенных пластовых условиях.

В системе (1)–(4) уравнение (1) — закон сохранения импульса сил сопротивления, уравнение (2) — линеаризованный закон сохранения массы жидкости, уравнение (3) — интегральная формула результирующего импульса сил сопротивления для изотропных сред, уравнение (4) — определяющее соотношение для массы жидкости. Система уравнений (1)–(4) замкнута относительно неизвестных $\vec{J}$, p, $m\rho$ и $\vec{W}$.

В подземной гидромеханике в основном рассматриваются только давление и скорость фильтрации, поэтому, исключив из системы величины $\vec{J}$ и $m\rho$, получают замкнутую относительно величин p и $\vec{W}$ систему уравнений, описывающую релаксационную фильтрацию в области непрерывности полей давления и скорости фильтрации

$$\nabla^2 p(x,t) = \frac{\Im(0)\Phi(0)}{\rho_0}\cdot\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\Im(0)}{\rho_0}\cdot\frac{d\Phi(t')}{dt'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi(0)}{\rho_0}\cdot\frac{d\Im(t')}{dt'} + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^{t'}\frac{d\Im(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{d\Phi(t'-\tau)}{d(t'-\tau)}d\tau\right)\cdot\frac{\partial^2 p(x,t-t')}{\partial(t-t')^2}dt', \tag{5}$$

$$\mathrm{grad}_x p(x,t) = -\Im(0)\cdot\frac{\partial\vec{W}(x,t)}{\partial t} - \int\limits_0^\infty \frac{d\Im(t')}{dt'}\cdot\frac{\partial\vec{W}(x,t-t')}{\partial(t-t')}dt'. \tag{6}$$

Любая линейная релаксационная модель фильтрации полностью характеризуется функциями времени $\Im(t)$ и $\Phi(t)$, называемыми ядрами релаксации закона фильтрации и массы жидкости соответственно.

2. Модель фильтрации по закону Дарси в релаксационно-сжимаемой пористой среде

Этому типу фильтрационного течения соответствуют следующие ядра релаксации

$$\Im(t) = \frac{\mu}{k}\cdot t\cdot\eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0\left(\beta - \frac{\lambda_m-\lambda_p}{\lambda_m}\cdot\beta_c\cdot\exp\left(-\frac{t}{\lambda_m}\right)\right). \tag{7}$$

В частном случае при несжимаемой жидкости $\lambda_p = 0$ получают систему:

$$\chi\triangle\Big(p+\lambda_m\frac{\partial p}{\partial t}\Big) = \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{8}$$

$$W = -\frac{k}{\mu}\cdot\mathrm{grad}p, \tag{9}$$

где μ — вязкость жидкости, k — коэффициент проницаемости, $\beta = \beta_c + m_0\cdot\beta_f$ — коэффициент упругоемкости пласта, β_c и β_f — коэффициенты сжимаемости пористой среды и жидкости соответственно, λ_m и λ_p — времена релаксации соответственно пористости при постоянном перепаде давления и давления при постоянной пористости, $\chi = \dfrac{k}{\mu\beta}$ — коэффициент пьезопроводности пласта.

Модель (8) – (9) описывает фильтрацию несжимаемой жидкости в релаксационно-сжимаемой пористой среде при $\lambda_p = 0$, а также в трещиновато-пористой среде с бесконечно малой упругоемкостью трещин и проводимостью блоков [1].

3. Постановка задачи и применение методов Монте – Карло

Задача 1. *Найти в области Ω решение системы (8) – (9), удовлетворяющее начальным данным*

$$p(x,0) = 0, \quad \frac{\partial p(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x\in\Omega \tag{10}$$

и граничному условию

$$p(x,t) = p_0(x,t), \quad x\in\partial\Omega, \tag{11}$$

где $p_0(x,t)$ — заданная функция.

Замечание 1. *В работе ([1], Глава II, § 1, стр. 41 – 45.гл. III, § 1, стр. 69 – 74) исследован вопрос о рассогласования начальных данных и граничных условий. Мы в этой задаче допускаем, что область Ω со своей границей $\partial\Omega$ удовлетворяет всем требованиям рассогласования начальных данных и граничных условий.*

Пусть $t\in[0,T]$. Используя неявную схему, дискретизируем уравнение (8) только по временной переменной t. Для этого разобьем интервал $[0,T]$ на N частей длины τ, $\tau = T/N$. Тогда из (8) получим

$$\frac{p^{j+1}(x)-p^j(x)}{\tau} = \chi\cdot\triangle p^{j+1}(x) + \chi\cdot\lambda_m\cdot\frac{\triangle p^{j+1}(x)-\triangle p^j(x)}{\tau}$$

или

$$\triangle p^{j+1}(x) - c\cdot p^{j+1}(x) = d\cdot p^j(x), \quad j = 0,1,\cdots,N-1, \tag{12}$$

где $c = \dfrac{1}{(\tau\cdot\chi+\chi\cdot\lambda_m)}$, $d = \dfrac{\chi\cdot\lambda_m - 1}{(\tau\cdot\chi+\chi\cdot\lambda_m)}$. Дискретизация по временной переменной (9) дает

$$W^{j+1}(x) = -\frac{k}{\mu}\cdot\mathrm{grad}_x p^{j+1}(x), \quad j = 0,1,\cdots,N-1. \tag{13}$$

Начальные данные (10) запишем в виде

$$p^0(x) = 0, \quad p^1(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

Граничное условие примет вид

$$p^{j+1}(x) = p_0(x), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1, \quad x \in \partial\Omega. \tag{15}$$

Очевидно, что решение задачи (12) – (15) при $\tau \to 0$ стремится к решению Задачи 1

Итак, в результате дискретизации (8), (10) и (11) по временной переменной, получили задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца (12), (14) – (15), то есть

$$\triangle p^{j+1}(x) - c \cdot p^{j+1}(x) = d \cdot p^j(x), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1, \quad x \in \Omega,$$

$$p^0(x) = 0, \quad p^1(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$p^{j+1}(x) = p_0(x), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1, \quad x \in \partial\Omega.$$

Решение задачи (12), (14) – (15) $p^{j+1}(x)$ на временных слоях $j = 1, 2, \cdots, N-1$ оцениваем с помощью алгоритмов “блуждания по сферам” [2, 3] и “блуждания по границам” [4] методов Монте – Карло. Чтобы оценить W^{j+1}, $j = 0, 1, \cdots, N-1$, сначала оценивают $\text{grad} p^{j+1}(x)$, $j = 0, 1, \cdots, N-1$, затем используется соотношение (13).

Список литературы

[1] Молокович Ю. М., Осипов П. П. Основы теории ралаксационной фильтрации. Издательство Казанского университета, Казань, 1987.

[2] Елепов Б. С., Михайлов Г. А. Алгоритм “блуждания по сферам” для уравнения $\Delta u - c \cdot u = -g$ // ДАН СССР, 1973. Т. 212. №1. С. 15–18.

[3] Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1980.

[4] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984.