СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С. Я. Серовайский
Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: serovajskys@mail.ru

The obtaining of equations of mathematical physics is connected to a procedure of a passage to the limit. Its justification is equivalent to existence of the classic solution of a problem. However classic decidability can be established only after construction of the equation. It is offered to not pass to a limit in balancing ratio, and to use them directly for a numerical solution. If the set of received approximated solutions will be fundamental, it is call as sequential model. Sequential model of a concrete system is constructed. Is established conformity between sequential and generalized solutions.

Вывод уравнений математической физики обычно осуществляется по стандартной схеме. Сначала в рассматриваемой области выделяется некоторый элементарный объем. Затем записываются балансные соотношения, характеризующие изменение тех или иных характеристик(энергии, импульса, массы, заряда и т. п.) в этом объеме. После этого выполняются некоторые технические преобразования, непременно включающие в себя предельный переход, когда выделенный объем сжимается в точку. Итогом указанной процедуры оказываются различные уравнения математической физики, которые и составляют основу математической модели описываемого процесса.

Подобная схема настолько привычна, что из внимания как-то ускользает одно принципиальное обстоятельство, которое, казалось бы, сразу должно бросаться в глаза. Речь идет о степени обоснованности предельного перехода. Существование предела непременно предполагает достаточную гладкость функций, входящих в имеющиеся балансные соотношения. Однако априорное предположение о наличии желаемых свойств в действительности ничем не подтверждено.

Суть имеющейся проблемы поясним простейшим примером. С целью максимального упрощения технических выкладок мы ограничимся рассмотрением чрезвычайно простой и широко известной задачи. Рассмотрим явление теплопроводности в установившемся режиме в одномерном теле длиной L при наличии источников тепла и нулевой температуре на границе. Подробное изложение ниже хорошо известных рассуждений объясняется необходимостью формирования четкого представления о природе возникающих при этом трудностей.

Изменение количества тепла q на некотором интервале $[x, x+h]$ определяется соотношением

$$q(x) - q(x+h) = \int\limits_x^{x+h} f(\xi)d\xi, \tag{1}$$

где известная функция f характеризует плотность тепловых источников. Величину q при достаточно малых значениях длины участка h можно рассчитать по формуле

$$q(x) = -k(x)\frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \tag{2}$$

соответствующей закону Фурье, где u — температура тела, k — известная функция (коэффициент теплопроводности). Предположим, что функция u является дважды непрерывно дифференцируемой в рассматриваемой области. Тогда в результате перехода к пределу в равенствах (1), (2) при $h \to 0$ получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[k(x)\frac{du(x)}{dx}\right] = f(x), \quad x \in (0, L), \tag{3}$$

которое вместе с однородными граничными условиями и составляет математическую модель исследуемого явления. Отметим, что дважды непрерывно дифференцируемую функцию u, удовлетворяющую указанным соотношениям, называют классическим решение поставленной задачи.

Итак, вывод уравнения (3) осуществляется в предположении о существовании непрерывной второй производной искомой функции. Однако непосредственное обоснование этого допущения осуществляется лишь в процессе доказательства классической разрешимости задачи уже после построения математической модели. Таким образом, еще не построив уравнение, мы требуем, чтобы его решение обладало какими-то положительными свойствами. Строгое доказательство же справедливости этих свойств может быть осуществлено, естественно, лишь после того, как математическая модель уже получена. Очевидно, мы имеем дело с порочным кругом: для вывода уравнения необходимо привлекать свойства его решения, а для обоснования этих свойств нужно иметь само уравнение. Полученный результат позволяет усомниться в степени обоснованности классического способа вывода математической модели.

Описанная стандартная схема получения уравнений математических моделей напрямую связано с понятием классического решения задачи. Мы могли бы ориентироваться и на ее обобщенное решение. Как известно, обобщенным решением поставленной задачи называют такую функцию u из пространства Соболева $H_0^1(0,L)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству.

$$-\int_0^L k(x)\frac{d\lambda(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx}dx = \int_0^L \lambda(x)f(x)dx\forall\lambda \in H_0^1(0,L). \tag{4}$$

В принципе, соотношение (4) может быть получено напрямую из балансных соотношений (1), (2), минуя дифференциальное уравнение (3). Для этого равенство (1) умножается на произвольную функцию λ, результат интегрируется по всей области, после чего осуществляется предельный переход. Тем самым задача (4) является самостоятельной (обобщенной) формой математической модели исследуемого процесса. К сожалению, и здесь строгое выполнение предельного перехода связано с априорным предположением — принадлежностью имеющейся функции пространству Соболева. Обоснование же этого допущения производится лишь на последующем этапе исследования, который подразумевает, что математическая модель процесса уже получена. Таким образом, как в классическом, так и в обобщенном подходе, вывод математической модели и ее качественный анализ явно опираются друг на друга. При таком положении дел оба эти этапа никак не могут быть признаны в полной степени обоснованными. В этих условиях представляется необходимым найти способ постановки задачи математической физики, не обладающий указанными выше недостатками.

Ключ к решению данной проблемы лежит в самой процедуре предельного перехода, определившей имеющиеся трудности. Как известно, последовательность объектов той или иной природы сходится к своему пределу, если все ее элементы с достаточно большими номерами будут сколь угодно близки к этому пределу. Этим определением практически не возможно пользоваться для обоснования сходимости последовательности, поскольку в приложениях мы обычно предел получаем лишь в результате сходимости последовательности, а не до того, как установлен сам факт сходимости. Здесь наблюдается явная аналогия с описанной схемой вывода математической модели: еще отсутствует постановка задачи, а ее решение уже наделяется какими-то свойствами. В сущности, в обоих случаях речь идет о явлении одной и той же природы. Поэтому есть основания надеяться, что корректная постановка задачи математической физики может быть проведена с помощью приемов, аналогичных тем, которые применяются в математическом анализе при обосновании предельных переходов.

Одним из наиболее эффективных способов доказательства сходимости числовых последовательностей является критерий Коши, в основе которого лежит понятие фундаментальной последовательности. Последовательность является таковой, если любые два ее элемента с достаточно большими номерами оказываются достаточно близкими. Согласно критерию Коши любая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится. Его смысл состоит в том, что существование предела устанавливается лишь с помощью элементов заданной последовательности, которые могут быть определены и проанализированы еще до того, как задача будет решена.

Критерий Коши работает лишь в полных пространствах. Однако и в отсутствии полноты сохраняется возможность получения желаемого результата с помощью использования процедуры пополнения. Таким образом, в любом пространстве фундаментальная последовательность оказывается сходящейся, если и не к элементу исходного класса, то хотя бы в пополненном пространстве. Схема пополнения имеет многочисленные приложения, среди которых стоит особо отметить определение действительных чисел по схеме Кантора и обобщенных функций в интерпретации Микусинского.

Данная процедура может быть использована и при выводе математических моделей физических процессов. При этом, как нам кажется, удается избежать указанных трудностей. В результате мы сталкиваемся с несколько иной формой математической модели, или, что фактически то же самое, с другой формой решения задачи математической физики.

Вернемся к исследованию рассматриваемого процесса. Разобъем исходную область на ячейки с некоторым шагом h. На каждом отрезке $[x_{i-1},\, x_i]$ имеют смысл балансные соотношения (1), (2), составляющие в совокупности систему разностных уравнений. Решая полученную задачу(с соответствующими граничными условиями) стандартным способом, определим сеточную функцию. Затем в результате интерполяции (например, линейной) находится функция непрерывного аргумента u_h, зависящая от шага h.

Естественно, схема определения функции u_h соответствует классическому методу конечных разностей. Однако есть одно принципиальное отличие. Обычно сначала рассматривают дискретное балансное соотношение в произвольной ячейке области. Затем осуществляют предельный переход, устремляя к нулю размеры ячейки, с целью получения математической модели. И лишь потом выполняется аппроксимация уравнений, возвращающая нас вновь к дискретным соотношениям, пригодным для поиска приближенного решения задачи. Мы же, напротив, столкнувшись с проблемой обоснования предельного перехода, отказываемся от его реализации на данном этапе исследования и рассматриваем непосредственно условия (1), (2) в произвольной точке $x = x_i$. Тем самым, еще не имея математической модели исследуемого процесса, мы можем однозначно построить функцию u_h. При этом используются исключительно предположения физической природы о том, что в каждой ячейке данной области реализуются балансные соотношения (1), (2).

Теперь мы можем рассмотреть семейство построенных указанным способом функции $\{u_h\}$ с положительным параметром h. Пусть задано некоторое равномерное пространство $H(0, L)$ функции (а возможно, и обобщенных функций) на интервале $(0, L)$. Два семейства $\{u_h\}$ и $\{\nu_h\}$ назовем эквивалентными на $H(0, L)$, если при достаточно малых значениях h элементы u_h и ν_h оказываются сколь угодно близкими в смысле равномерной структуры пространства. Введем следующие понятия.

Определение. *Если построенное семейство $\{u_h\}$ оказывается фундаментальным на $H(0, L)$, то будем называть его секвенциальной моделью рассматриваемой системы, а соответствующий ему класс эквивалентности — секвенциальным состоянием системы или секвенциальным решением уравнения (4) с соответствующими граничными условиями.*

Итак, для построения секвенциальной модели требуется лишь установить, что уже имеющееся семейство $\{u_h\}$ обладает свойством фундаментальности. Оставим на время в стороне вопросы о том, каким способом может быть установлено это свойство в конкретном примере и какова природа определенной выше "модели" (соответствующие разъяснения будут даны чуть позднее). На данном этапе исследования мы подчеркнем лишь корректность введенных понятий. Действительно, для каждого конкретного значения h можно точно найти функцию u_h — конкретную непрерывную кусочно линейную функцию, решив (например, методом прогонки) соответствующие сеточные уравнения и выполнив интерполяцию. Затем, оперируя исключительно с функциями u_h при конкретных значениях h, можно, в принципе, проверить, будет ли имеющееся семейство $\{u_h\}$ удовлетворять свойству фундаментальности или нет. Если это свойство выполняется, то мы имеем секвенциальную модель (в противном случае мы, естественно, ничего не имеем). Тем самым введенный тип модели представляется вполне корректным. Действительно, у нас есть принципиальный алгоритм построения секвенциальной модели, хотя пока еще остается не ясным, как им воспользоваться на практике. В частности, требуется указать принцип доказательства фундаментальности и оценить практическую значимость секвенциальной модели.

Попытаемся, прежде всего, осмыслить само понятие секвенциальной модели. На первый взгляд определенные объекты (в предположении, что фундаментальность нами уже доказана) обладают весьма "дикой" природой. Под моделью понимается не привычная краевая задача или хотя бы интегральное соотношение типа (4), а некоторое семейство интерполяций сеточной функции, а под состоянием системы или решением задачи — класс эквивалентности семейств указанного типа. Чтобы оценить полученные результаты, обратимся к другим хорошо известным объектам секвенциальной природы.

Вспомним, что согласно Кантору любое действительное число является классом эквивалентности фундаментальной последовательности рациональных чисел. Тем самым само действительное число соответствует секвенциальному состоянию системы, а любая определяющая его рациональная последовательность оказывается секвенциальной моделью этого числа. Отметим, что рассматриваемое действительное число может быть сколь угодно точно аппроксимировано рациональными числами — элементами соответствующей рациональной последовательности. Таким образом, последовательность рациональных чисел (секвенциальная модель) оказывается практическим средством для нахождения действительного числа (секвенциального состояния). Аналогично, обобщенная функция в схеме Микусинского представляет собой класс некоторый эквивалентности фундаментальной последовательности гладких функций. При этом любая обобщенная функция (секвенциальное состояние) может быть с любой степенью точности аппроксимировано элементами какой-то последовательности гладких функций (секвенциальной модели).

Если мы хотим использовать в практических расчетах на компьютере некоторое иррациональное число (например, $\pi, \sqrt{2}$ и т. п.), то у нас фактически нет иных средств, кроме как воспользоваться секвенциальной интерпретацией Кантора (аппроксимация действительного числа рациональным), а не, к примеру, широко известной альтернативно интерпретацией Дедекинда (действительное число — сечение множества рациональных чисел). Аналогично при практической работе с сингулярными обобщенными функциями (типа δ-функции) мы в действительности пользуемся ее гладкой аппроксимацией, т. е. применяем секвенциальную интерпретацию Микусинского, а не более известную интерпретацию Шварца, в которой обобщенная функция понимается как линейный непрерывный функционал на множестве бесконечно дифференцируемых функций. Таким образом, с практической точки зрения объекты секвенциальной природы (секвенциальные состояния) достаточно эффективны, поскольку они могут быть аппроксимированы своими секвенциальными моделями — существенно более простыми объектами, построение которых особых затруднений не вызывает. Точно так же, секвенциальное состояние исследуемой системы (если, конечно, оно существует) на практике приближенно представляется вполне естественной функцией u_h при достаточно малом значении параметра h. Тем самым практический смысл понятия секвенциальной модели становится понятным. Однако требуется еще выяснить, существует ли конструктивный способ доказательства свойства фундаментальности.

Учитывая определение функции u_h, легко установить, что она удовлетворяет уравнению, аналогичному (3). Тогда после умножения этого соотношения на u_h и интегрирования при естественных ограничениях на входящие в постановку задачи функции k и f получается равномерная ограниченность семейства $\{u_h\}$ в пространстве $H_0^1(0,L)$. Тогда из него можно выделить подсемейство, слабо сходящееся в этом пространстве. Таким образом, выбирая в качестве $H(0,L)$ пространство $H_0^1(0,L)$, наделенное слабой топологией, установим желаемое свойство фундаментальности семейства $\{u_h\}$ (точнее, его подсемейства, что, впрочем, одно и то же в виду очевидной единственности решения задачи). Тем самым построение секвенциальной модели и (что, в сущности, одно и то же) доказательство существования секвенциального решения задачи можно считать завершенным.

В действительности можно установить еще одно важное свойство. Пользуясь классической схемой доказательства сходимости метода конечных разностей для рассматриваемой системы, можно (при соответствующих ограничениях на функции k и f) легко доказать, что слабый предел семейства $\{u_h\}$ удовлетворяет соотношению (4), а значит, является обобщенным решением задачи. В этих условиях понятия секвенциального и обобщенного решения попросту совпадают. Если же ограничения на параметры системы позволяют установить априорную оценку, не обеспечивают доказательство сходимости алгоритма, установить разрешимость задачи в обобщенном смысле не представляется возможным, хотя секвенциальное решение по-прежнему существует. Наконец, в том случае, когда свойства параметров задачи не гарантируют справедливости необходимой априорной оценки, у нас не будет секвенциального (а тем более, обобщенного) решения. Приведенные рассуждения показывают, что секвенциальное решение является, вообще говоря, более слабой формой решения по сравнению с обобщенным решением. В то же время, обобщенное решение задачи на практике получается обычно в виде предела некоторого семейства "приближенных решений". Последнее можно тем самым интерпретировать как секвенциальную модель системы, установив, что обобщенное решение оказывается одновременно ее секвенциальным решением.

Приведенные рассуждения, естественно, не ограничиваются рассмотренным примером, описанным исключительно с целью максимального упрощения всех технических выкладок. Суть дела состоит в том, что указанным выше способом можно, в принципе, дать такое определение математической модели, которое не опирается на априорное предположение о свойствах решения еще не поставленной задачи. Введенное понятие не только корректно, но и вполне конструктивно, т. е. может быть использовано на практике при численном решении задачи. Наконец, для достаточно широкого класса задач секвенциальное решение задачи сводится к его обобщенному решению. В то же время при более слабых ограничениях на систему возможно существование секвенциального решения задачи в отсутствии ее обобщенного (тем более, классического) решения.

Любопытно, что при использовании секвенциального подхода вывод математической модели, ее качественный анализ и практическое нахождение приближенного решения осуществляются параллельно, а не последовательно, т. е. окончательно построив модель, мы уже доказали тем самым существование решения задачи в соответствующем смысле и получили сходящийся алгоритм нахождения этого решения. Естественно, мы не избавлены от необходимости построения семейства $\{u_h\}$ и доказательства его фундаментальности. Более того, в том случае, когда секвенциальное решение задачи отлично от обобщенного, оно оказывается менее регулярным. Однако уж лучше получить столь слабую форму решения при слабых ограничениях на параметры задачи, чем не получить при тех же условиях ничего. В этой связи полученная методика могла бы найти свое применение и в том случае, когда для исследуемой задачи удается получить лишь весьма слабые априорные оценки, не достаточным для обоснования соответствующих предельных переходов.

Список литературы

[1] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.

[2] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

[3] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

[4] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Наука, 1962.

[5] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.