

УСТОЙЧИВОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Е. В. Ворожцов, Б. Ю. Скобелев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

В работах Н. Н. Яненко был предложен ряд понятий (равномерная корректность, абсолютная корректность), которые способствовали созданию практических методов исследования устойчивости разностных схем. В данном обзорном докладе приводятся результаты авторов по разработке новых методов исследования устойчивости разностных схем (с помощью теории катастроф, теории условной оптимизации). Получен ряд новых критериев достаточности условия фон Неймана.

Предложено новое понятие равномерной устойчивости разностных схем. Тем самым выделен класс схем, у которых отсутствуют схемные осцилляции во времени. Получены конструктивные критерии для построения равномерно устойчивых разностных схем.

Введение

Устойчивость является важным критерием при выборе разностной схемы для решения задач математической физики и аэрогидродинамики. Существует тесная связь между устойчивостью разностных схем и корректностью исходной “дифференциальной” задачи. Действительно, многие результаты по устойчивости разностных схем имеют аналоги в теории корректности постановок задач для уравнений в частных производных, и наоборот.

Вопросу распространения понятий корректности и равномерной корректности на разностные задачи посвящены работы многих как отечественных, так и зарубежных специалистов в теории разностных схем. Существенный вклад в эту проблему внёс Н. Н. Яненко [9, 10, 6].

Приведём теперь определения корректности и устойчивости разностной задачи Коши, следуя [9, 6]. Пусть R^s — s -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_s)$, $s \geq 1$. В полосе $\Omega: |x_j| < \infty$, $j = 1, \dots, s$, $0 \leq t \leq T$ (t — время) рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = P(x, t, \vec{u}, D), \quad (1)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_s)$, P — линейная или нелинейная функция своих аргументов. Будем далее предполагать, что $\vec{u}_0 \in B$, B — некоторое банахово пространство.

Задаче Коши (1), (2) поставим в соответствие разностную задачу Коши

$$\frac{\vec{u}^{n+1}(x) - \vec{u}^n(x)}{\tau_{n+1}} = \Lambda_1 \vec{u}^{n+1}(x) + \Lambda_0 \vec{u}^n(x), \quad (3)$$

$$\vec{u}^0(x) = \vec{u}_0(x). \quad (4)$$

Здесь Λ_1, Λ_0 — определённые в B операторы, зависящие от $t_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$, где τ_k — временной шаг конечно-разностной схемы (3). Будем предполагать, что уравнение (3) однозначно разрешимо в B относительно \vec{u}^{n+1} , то есть что оператор $B_n = I - \tau_{n+1}\Lambda_1$ обратим в B , где I — тождественный оператор. Тогда система уравнений (3) записывается в виде

$$\vec{u}^{n+1} = C_{n+1} \vec{u}^n, \quad C_{n+1} = B_n^{-1}(I + \tau_{n+1}\Lambda_0). \quad (5)$$

Из формулы (5) следует: $\vec{u}^n = C_{n,k} \vec{u}^k$, где $C_{n,k} = C_n C_{n-1} \dots C_{k+1}$.

Оператор $C_{n,k}$ будем называть оператором перехода, оператор $C_n = C_{n,n-1}$ — оператором шага, оператор $C_{n,0}$ — оператором решения задачи (3), (4).

Определение 1. Задача (3), (4) корректна в B , если существует число $M(T) > 0$ такое, что

$$\|C_{n,k}\|_B \leq M(T) \quad (6)$$

для всех $0 \leq k \leq n-1, t_n \leq T$ и любых достаточно малых $\{\tau_k\}$; равномерно корректна в B , если существует $N > 0$ такое, что

$$\|C_n\|_B = \|C_{n,n-1}\|_B \leq 1 + N\tau_n \quad (7)$$

для всех n и достаточно малых τ_n .

Если задача Коши (3), (4) является корректной, разностную схему (3) будем называть устойчивой.

При исследовании устойчивости конкретных разностных схем наиболее широко в качестве банахова пространства B используется пространство L_2 . Тем не менее, существует ряд работ, где рассматривается устойчивость в пространстве C (см. обзор в [8]). В данном обзорном докладе приводятся результаты авторов по разработке новых методов исследования устойчивости разностных схем как в пространстве L_2 , так и в пространстве C [20, 13, 21, 1, 26, 27, 22]. Существенной особенностью этих исследований является использование новых математических теорий. Впервые для исследования устойчивости разностных схем был применен математический аппарат теории катастроф и методы условной оптимизации.

Кроме того, авторами предложены новые понятия теории разностных схем – равномерная устойчивость и локально равномерная устойчивость [23, 24]. Тем самым выделяются классы разностных схем, у которых схемные осцилляции во времени либо полностью отсутствуют, либо слабо влияют на результаты численных расчётов. Получены конструктивные критерии для построения равномерно и локально равномерно устойчивых разностных схем. Построены равномерно устойчивые разностные схемы для одномерных и двумерных задач аэрогидромеханики.

1. Анализ устойчивости разностных схем по Нейману с помощью методов теории катастроф

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1), где оператор P зависит только от D . Тогда вместо уравнения (5) получим следующую систему разностных уравнений:

$$\vec{u}^{n+1} = S\vec{u}^n, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau], \quad (8)$$

где S — оператор шага разностной схемы.

Как известно, критерий Неймана [5, 3, 6, 14] является необходимым условием для устойчивости разностной задачи Коши (8), (4):

$$\max_{\xi, i} |\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \leq 1 + O(\tau), \quad (9)$$

где $\vec{\xi} = \vec{k} \cdot \vec{h}$ — волновой вектор; $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s)$ — вещественные волновые числа, $\vec{h} = (h_1, \dots, h_s)$, $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_M)$, где $\kappa_m, m = 1, \dots, M$ ($M \geq 1$) — безразмерные параметры подобия, в пространстве изменения которых определяется область устойчивости разностной схемы; $\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ — собственные значения матрицы перехода G , которая является символом Фурье оператора шага S , входящего в разностную схему (8). Таким образом, λ_i находятся из решения алгебраического уравнения $f(\lambda, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = 0$, где

$$f(\lambda, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = \sum_{j=0}^m a_j(\vec{\kappa}, \vec{\xi}) \lambda^{m-j}. \quad (10)$$

— характеристический многочлен матрицы перехода G (m — размерность системы (8)). Обычно для проверки критерия фон Неймана используются различные методы решения характеристического уравнения. Однако с ростом степени уравнения (10) проверка критерия Неймана сильно усложняется и зачастую становится практически нереализуемой.

В этой связи представляет интерес использование методов теории катастроф, которая даёт возможность исследовать поведение нулей семейства функций при варьировании параметров семейства. Соответствующие алгоритмы были впервые разработаны авторами в работах [20, 13, 21, 26, 27].

В качестве первого шага в направлении применения теории катастроф построим такое семейство функций, что граница области устойчивости разностной задачи Коши (8), (4) будет определяться многообразием нулей этого семейства. Сделаем в характеристическом многочлене (10) преобразование Мёбиуса

$\lambda = (w + 1)/(w - 1)$. Введём обозначение

$$\tilde{f}(w, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = (w - 1)^m f\left(\frac{w + 1}{w - 1}, \vec{\kappa}, \vec{\xi}\right). \quad (11)$$

Тогда условию $|\lambda_j| \leq 1$, $j = 1, \dots, m$ соответствует условие $\operatorname{Re} w_j \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, где w_j — корни многочлена $\tilde{f}(w, \vec{\kappa}, \vec{\xi})$. На границе Γ области устойчивости D многочлен (11) должен иметь по крайней мере один чисто мнимый корень. Положим $w = i\sigma$ и рассмотрим многочлен

$$\varphi(\sigma, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = \tilde{f}(i\sigma, \vec{\kappa}, \vec{\xi}). \quad (12)$$

Очевидно, что граница Γ области устойчивости определяется теми значениями величин $\vec{\kappa}, \vec{\xi}$, при которых многочлен (12) имеет действительный корень σ . Корни многочлена (12) определяются системой двух уравнений с действительными коэффициентами

$$\operatorname{Re} \varphi(\sigma, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = 0, \quad \operatorname{Im} \varphi(\sigma, \vec{\kappa}, \vec{\xi}) = 0. \quad (13)$$

Система (13) имеет решение тогда и только тогда, когда результат многочленов $\operatorname{Re} \varphi(\sigma, \vec{\kappa}, \vec{\xi})$ и $\operatorname{Im} \varphi(\sigma, \vec{\kappa}, \vec{\xi})$ равен нулю:

$$R(\vec{\kappa}, \vec{\xi}) = 0. \quad (14)$$

Далее результату $R(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ сопоставляется семейство функций от одной переменной и $s + M - 1$ параметров $F(x; \vec{\kappa}', \vec{\xi})$ (в качестве переменной берётся одна из компонент вектора $\vec{\kappa}$). Так как всегда можно положить $F = \frac{d\tilde{F}}{dx}$, то уравнение (14) сводится к классической задаче теории катастроф на определение критических точек семейства $\tilde{F}(x; \vec{\kappa}', \vec{\xi})$.

С помощью вышеописанного подхода была исследована устойчивость ряда конкретных разностных схем. В [20, 21] была исследована явная конечно-разностная схема с разностью вперёд во времени и центральной разностью по пространственной переменной для одномерного уравнения конвекции-диффузии. Область устойчивости полностью совпала с областью, полученной другим методом в [7].

В качестве другой задачи была исследована область устойчивости схемы Мак-Кормака [18]

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij} &= u_{ij}^n - (A\tau/h_1)(u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n) - (B\tau/h_2)(u_{i,j+1}^n - u_{ij}^n), \\ u_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{ij}^n + \tilde{u}_{ij}) - \frac{A\tau}{2h_1}(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{i-1,j}) - \frac{B\tau}{2h_2}(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

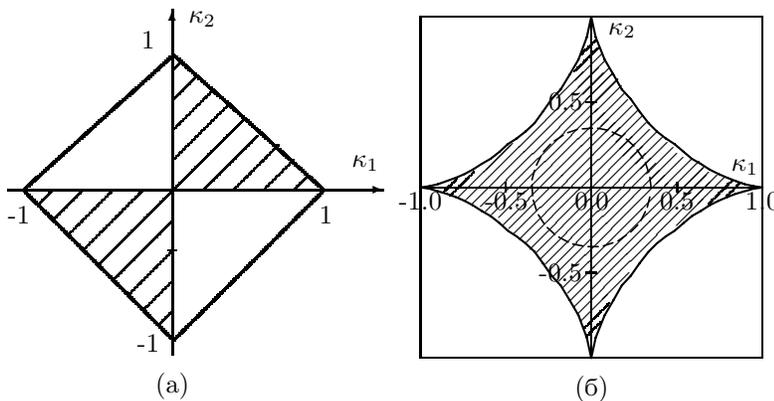


Рис. 1. Области устойчивости схем Мак-Кормака для двумерного уравнения адвекции ($\kappa_1 = A\tau/h_1$, $\kappa_2 = B\tau/h_2$): (а) схема (15); (б) двухциклическая схема Мак-Кормака.

для двумерного уравнения адвекции. Результат приведён на рис. 1, (а). Заштрихована область устойчивости [20, 21]. Вся область внутри квадрата $|\kappa_1| + |\kappa_2| \leq 1$ — область устойчивости, приведённая в [4].

Отметим, что вышеприведённые результаты были получены в [20, 21] аналитическим способом. Для исследования более сложных разностных схем был разработан численный алгоритм реализации методов теории катастроф [13, 26, 27]. В частности, был проведен анализ устойчивости двухциклической схемы Мак-Кормака [18] для двумерного уравнения адвекции. Результаты приведены на рис. 1, (б) (заштрихованная область). Для сравнения штриховой окружностью выделена область устойчивости, приведённая в работе [28].

Видно, что предложенный метод позволил существенно уточнить области устойчивости широко известных разностных схем.

2. Новые условия достаточности критерия фон Неймана для устойчивости разностных схем

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная достаточным условиям устойчивости разностных схем (см., например, [5, 3, 6, 25, 14]). Наиболее общие условия дает матричная теорема Крайса [16]. Однако эти условия оказались настолько сложными, что сам Крайс отметил в [17]: “На деле почти безнадежно применять их непосредственно к практической задаче”. Другие общие условия устойчивости были получены в работах Като [15]. Однако они тоже оказались слишком сложными для практического применения. Следующие два частных условия достаточности критерия фон Неймана получили широкое распространение на практике [5]: (1) матрица перехода G разностной схемы — нормальная матрица и (2) матрица G равномерно диагонализуемая.

В данном параграфе приводится обобщение последних двух условий достаточности критерия фон Неймана [19, 24].

Теорема 1 [19]. Пусть выполнены следующие условия.

1. Оператор шага S равномерно ограничен в некоторой области значений параметров $\vec{\kappa} \in D$: $\|S(\vec{\kappa})\| \leq M_1$ при $\vec{\kappa} \in D$.
2. Для образа Фурье $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ оператора S существует некоторое целое число $N \geq 1$ такое, что G^N является нормальной матрицей.

Тогда условие Неймана для матрицы $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ является необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы.

Теорема 2 [24]. Пусть выполнены следующие условия.

1. Оператор шага S равномерно ограничен в некоторой области параметров $\vec{\kappa} \in D$: $\|S\| \leq M_1$, $\vec{\kappa} \in D$.
2. Для образа Фурье $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ оператора шага S существует целое положительное число $N \geq 1$ такое, что $G^N(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ является равномерно диагонализуемой матрицей при всех $\vec{\xi}$ и значениях параметров $\vec{\kappa} \in D$.

Тогда условие Неймана для матрицы перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ является необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы для $\vec{\kappa} \in D$.

Теорема 3 [24]. Предположим, что норма оператора шага $S(\vec{\kappa})$ равномерно ограничена в некоторой области параметров $\vec{\kappa} \in D$: $\|S\| \leq M_1$, $\vec{\kappa} \in D$ и условие фон Неймана выполняется в области параметров $\vec{\kappa} \in D$.

Для заданного $\vec{\kappa}$ обозначим через $\Omega_\delta(\vec{\kappa})$ множество значений вектора $\vec{\xi} \in \Omega$, такое, что

$$\max_i |\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| < 1 - \delta, \quad \vec{\xi} \in \Omega_\delta(\vec{\kappa}),$$

где $\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ — собственные значения матрицы перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$, а $\delta > 0$ — постоянная.

Предположим, что существует такое $\delta_0 > 0$, что матрица $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ равномерно диагонализуема для $\vec{\xi} \in \Omega \setminus \Omega_{\delta_0}(\vec{\kappa})$ и всех $\vec{\kappa} \in D$ ($\Omega \setminus \Omega_{\delta_0}$ — дополнение множества $\Omega_{\delta_0}(\vec{\kappa})$ в множестве Ω).

Тогда разностная схема устойчива в D .

В качестве примера применения Теоремы 1 вернёмся к рассмотрению двухциклической схемы Мак-Кормака для двумерного уравнения адвекции. Можно показать, что квадрат матрицы перехода для этой схемы является нормальной матрицей. Тогда по Теореме 1 критерий фон Неймана является как необходимым, так и достаточным для устойчивости этой схемы, следовательно, область, приведённая на рис. 1, (б), является областью устойчивости схемы. Другие примеры применения Теорем 1–3 приведены в [24].

3. Об устойчивости разностных схем в норме пространства C

В настоящее время наиболее детально разработаны практические методы исследования устойчивости разностных схем в норме пространства L_2 . Однако L_2 -норма не реагирует на локальные выбросы решения, если они происходят на множествах нулевой меры, то есть в отдельных точках или вдоль некоторых линий. В этой связи неоднократно предпринимались попытки применения норм, отличных от нормы пространства L_2 , при анализе устойчивости разностных схем.

В [5] отмечалось, что использование в качестве основной не среднеквадратичной нормы, а максимума модуля, то есть нормы пространства C , является очень привлекательным для вычислительных работ.

В данном параграфе приведён новый метод исследования устойчивости разностных схем в норме C , предложенный авторами в работе [1].

Запишем условие устойчивости разностной схемы как в линейном, так и в нелинейном случае в следующем виде:

$$\| Su^n \| \leq (1 + C\tau) \| u^n \|, \quad (16)$$

где $S = C_{n+1}$.

Будем рассматривать разностные операторы как операторы, действующие в пространстве функций с нормой пространства C . Тогда

$$\| u^n \| = \max_J |u_J^n|,$$

где J — мультииндекс, $J = (j_1, \dots, j_s)$, s — число пространственных переменных. Условие устойчивости (16) принимает следующий вид:

$$\max_J |(Su^n)_J| \leq (1 + C\tau) \max_J |u_J^n|. \quad (17)$$

Рассмотрим устойчивость разностной схемы без учёта граничных условий. То есть будем считать, что все узлы сеточных функций в (17) являются внутренними узлами расчётной области.

Предположим сначала, что оператор S не зависит от пространственных координат и времени. Так как шаблон разностной схемы не меняется внутри расчётной области, а функция u^n в каждой внутренней точке может принимать любые значения, то достаточно проверить условие (17) в какой-либо одной точке J_0 . Поэтому (17) эквивалентно следующему условию:

$$|Su^n|_{J_0} \leq (1 + C\tau) \| u^n \|. \quad (18)$$

Пусть разностная схема имеет k_0 -точечный шаблон, то есть значение решения на $(n+1)$ -м слое определяется по значениям решения в k_0 узлах сетки на слое n . Тогда

$$(Su^n)_{J_0} = F(u_{J_0}, \dots, u_{J_0+J_{k_0}}). \quad (19)$$

Обозначим через \tilde{u} сеточную функцию, определенную на шаблоне разностной схемы и имеющую вид $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k_0})$, где

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\| u^n \|} u_{J_0+J_k}. \quad (20)$$

Тогда условие (18) можно записать в виде

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} |S(\| u^n \| \tilde{u})| \leq (1 + C\tau) \| u^n \| \quad (21)$$

где $S(\| u^n \| \tilde{u}) = (Su^n)_{J_0}$ — оператор, действующий в пространстве k_0 -мерных векторов $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k_0})$ с нормой $\|\tilde{u}\| = \max_k |\tilde{u}_k|$.

Таким образом, задача исследования устойчивости разностной схемы сводится к определению условного максимума, стоящего в левой части неравенства (21). Так как разностные схемы имеют небольшую размерность шаблона k_0 , то эта задача может быть решена с помощью известных численных алгоритмов нахождения условного экстремума, а для простых схем с $k_0 = 2, 3$ удается получить даже аналитические решения.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда оператор S зависит от координат и времени: $u^{n+1} = S(x, t^n)u^n$. В этом случае на первом этапе, так же как и в методе Фурье [5], можно считать координаты x внешними параметрами и определить величину

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} |S(x, t^n)(\| u^n \| \tilde{u})|,$$

а затем проверить условие устойчивости следующего вида:

$$\max_J \max_{\|\tilde{u}\|=1} |S(Jh, t^n)(\| u^n \| \tilde{u})| \leq (1 + C\tau) \| u^n \|, \quad (22)$$

где $h = (h_1, \dots, h_s)$ — вектор шагов сетки.

Отметим, что существенным преимуществом предлагаемого метода является то, что анализ устойчивости ведется на исходных сеточных функциях.

В качестве примера рассмотрим уравнение Бюргера без вязкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (23)$$

Аппроксимируем уравнение (23) явной разностной схемой “уголок”:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} \left[\left(u_i^n \right)^2 - \left(u_{i-1}^n \right)^2 \right], \quad (24)$$

где $\sigma = \tau/h$. Так же как и в анализе по Нейману [5, 25] положим в неравенстве (21) $C = 0$. Тогда условие устойчивости (21) можно представить в виде

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} \left[\tilde{u}_2 - \frac{\kappa}{2} (\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2) \right]^2 \leq 1, \quad (25)$$

где $\kappa = \sigma \|u^n\|$. Таким образом, для исследования устойчивости схемы (24) требуется определить максимум функции $\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ вида

$$\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \left(\tilde{u}_2 - \frac{\kappa}{2} (\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2) \right)^2 \quad (26)$$

при одном из следующих ограничений: $|\tilde{u}_1| = 1$; $|\tilde{u}_2| = 1$.

Рассмотрим первое ограничение. Это условие эквивалентно равенству $\tilde{u}_1^2 = 1$. Используем метод множителей Лагранжа. Построим функцию Лагранжа $\tilde{\varphi}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \lambda)$:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \lambda) = \left[\tilde{u}_2 - \frac{\kappa}{2} (\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2) \right]^2 + \lambda (\tilde{u}_1^2 - 1)$$

и приравняем нулю её частные производные. Мы получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left[\tilde{u}_2 - \frac{\kappa}{2} (\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2) \right] (1 - \kappa \tilde{u}_2) = 0, \\ \kappa \left[\tilde{u}_2 - \frac{\kappa}{2} (\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2) \right] + \lambda = 0, \\ \tilde{u}_2 = \frac{1}{\kappa}; \quad \tilde{u}_1 = \pm 1. \end{cases} \quad (27)$$

Второе ограничение даёт аналогичную систему алгебраических уравнений. В результате исследования решений этих систем получено следующее условие устойчивости: если в решаемой задаче выполняется в каждом узле i неравенство

$$u_i^n \geq (1 - \sqrt{3}) \|u^n\|, \quad (28)$$

то счёт по схеме (23) будет устойчивым в C -норме при $(\tau/h) \|u^n\| \leq 1$.

Неравенство (28) можно ещё интерпретировать следующим образом: если в решаемой задаче амплитуда отрицательных значений решения u^n не превышает $(\sqrt{3}-1) \times$ (амплитуда положительных значений решения u^n), то локальный переход со слоя n на слой $n+1$ будет происходить по схеме (24) устойчиво в C -норме. Таким образом, наш нелинейный анализ устойчивости схемы (24) в норме пространства C приводит к интересному результату: в трёхмерном пространстве $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \kappa)$ область устойчивости схемы больше, чем область, получаемая в результате линеаризации схемы и последующего применения метода Фурье, так как метод Фурье даёт ограничение вида $(\tau/h) \max_i |u_i^n| \leq 1$ при $u_i^n \geq 0$. В работе [1] приведены другие примеры исследования устойчивости разностных схем, а также численный алгоритм, реализующий анализ устойчивости разностных схем в нормах пространств C и L_p .

4. Равномерная устойчивость разностных схем

Существуют два направления в решении проблемы подавления схемных осцилляций в вычислительной гидродинамике. Первое из этих направлений, на котором до сих пор было сосредоточено основное внимание исследователей, состоит в подавлении ложных или паразитических схемных осцилляций вдоль осей пространственных координат. С этой целью было введено понятие монотонной разностной схемы [2].

Второе направление связано с подавлением схемных осцилляций во времени. Дело в том, что, например, осцилляции невязки численного решения вдоль временной оси замедляют выход численного решения на стационарный режим при применении метода установления [12].

Другой класс задач, где схемные осцилляции во времени могут существенно исказить решение, — это задачи газовой динамики с областями торможения. Застойная зона может служить генератором схемных колебаний. Так как в самой застойной зоне и ее окрестности течение газа дозвуковое, то схемные колебания распространяются вдоль характеристик по всей расчетной области и могут существенно исказить решение.

Ещё один практически важный класс задач, где схемные колебания создают трудности, это задачи численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода. Из-за схемных осцилляций во времени и пространстве может возникнуть существенная ошибка в определении момента времени перехода от ламинарного режима течения к турбулентному [29].

В работе [24] было показано, что устойчивость разностной схемы в обычном смысле не гарантирует отсутствия схемных осцилляций во времени. В этой связи нами в [24] было предложено новое определение устойчивости разностных схем, а именно, равномерная устойчивость.

Определение 2 [24]. Будем говорить, что разностная схема является равномерно устойчивой в некоторой области значений параметров $\vec{\kappa} \in D$, если:

- 1) оператор шага $S(\vec{\kappa})$ равномерно ограничен: $\|S(\vec{\kappa})\| \leq M, \quad \vec{\kappa} \in D$;
- 2) найдется натуральное число n_0 такое, что при всех значениях волнового вектора $\vec{\xi}$ матрица перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ удовлетворяет условию:

$$\|G^{n+1}(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| \leq \|G^n(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| \quad \text{при } n \geq n_0, \quad \vec{\kappa} \in D. \quad (29)$$

Примечание. Легко показать, что равномерно устойчивая разностная схема устойчива в обычном смысле [24].

Выясним вопрос об условиях, которым должна удовлетворять разностная схема для того, чтобы быть равномерно устойчивой. Рассмотрим разностную схему с постоянными коэффициентами, у которой матрица перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ является нормальной и выполняется условие фон Неймана $\max_{\xi} |\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \leq 1, \quad \kappa \in D$. Очевидно, что такая разностная схема будет устойчивой. Так как матрица $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ нормальная, то из соотношения

$$\|G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| = \max_i |\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \quad (30)$$

и критерия фон Неймана следует, что

$$\|G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| = \max_i |\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \leq 1 \quad \text{для всех } \xi; \quad \vec{\kappa} \in D. \quad (31)$$

Тогда для степеней матрицы $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} \|G^{n+1}(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| &\leq \|G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| \|G^n(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| = \max_i |\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \|G^n(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| \\ &\leq \|G^n(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\|, \quad \vec{\kappa} \in D, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

То есть норма n -ой степени матрицы перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ является невозрастающей функцией показателя степени n . Следовательно, разностные схемы с нормальной матрицей перехода являются равномерно устойчивыми в соответствии с Определением 1.

Более общие критерии равномерной устойчивости разностных схем даются следующей теоремой.

Теорема 4 [24]. Разностная схема является равномерно устойчивой в области $\vec{\kappa} \in D$, если выполняется какой-либо из следующих критериев для матрицы перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$.

Критерий 1. Собственные значения $\gamma_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ матрицы $G^*(\vec{\kappa}, \vec{\xi})G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ удовлетворяют условию:

$$\max_{\xi, i} |\gamma_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \leq 1, \quad \vec{\kappa} \in D.$$

Критерий 2.

1. Критерий 1 удовлетворяется в подобласти $\vec{\xi} \in \Omega_1(\vec{\kappa})$ области периодичности матрицы перехода G .
2. Следующие условия выполняются в дополнении множества Ω_1 в множестве Ω ($\vec{\xi} \in \Omega \setminus \Omega_1$):
 - а) матрица $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ равномерно диагонализуема;
 - б) существует единственное максимальное собственное значение $\lambda_1(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ матрицы G , такое, что для всех собственных значений λ_i

$$|\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| < |\lambda_1(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \quad \text{при } i \neq 1, \quad \max_{i \neq 1} \max_{\vec{\xi} \in \Omega \setminus \Omega_1} \frac{|\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})|}{|\lambda_1(\vec{\kappa}, \vec{\xi})|} < 1 - \delta_1, \quad \vec{\kappa} \in D; \quad (33)$$

в)

$$\max_{\vec{\xi} \in \Omega \setminus \Omega_1} |\lambda_1(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| < 1 - \delta_2, \quad \vec{\kappa} \in D, \quad (34)$$

где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ — некоторые постоянные.

Замечание. Если первый критерий выполняется, можно положить $n_0 = 1$ в вышеприведенном Определении 2.

Отметим, что близкими к понятию равномерной устойчивости являются понятие сильной устойчивости [5] и равномерной корректности [6]. Однако есть существенные различия. С одной стороны, требование равномерной устойчивости более слабое, так как дополнительные ограничения налагаются на разностную схему не с первого шага по времени, а с некоторого шага n_0 ; тем самым допускается рост нормы оператора перехода при $n < n_0$. Заметим, что нормы операторов перехода ряда практически важных разностных схем демонстрируют именно такое поведение: нарастание на начальном интервале $1 \leq n \leq n_0$ и убывание при $n \geq n_0$.

С другой стороны, при $n \geq n_0$ требование равномерной устойчивости налагает более жесткие условия, так как условие (29) должно выполняться при всех ξ , что гарантирует отсутствие схемных осцилляций во времени.

Равномерная устойчивость гарантирует отсутствие схемных осцилляций во времени как с конечными, так и со сколь угодно большими длинами волн. Так как во многих физических процессах существенную роль играют возмущения с конечными длинами волн, то длинноволновые схемные осцилляции могут оказаться несущественными. Поэтому имеет смысл ввести понятие локальной равномерной устойчивости.

Определение 3. Устойчивая разностная схема называется локально равномерно устойчивой, если при сколь угодно малых $\delta > 0$ матрица перехода $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ удовлетворяет условию:

$$\|G^{n+1}(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| \leq \|G^n(\vec{\kappa}, \vec{\xi})\| \quad (35)$$

при $\vec{\xi} \in [\delta, 2\pi - \delta]^L$ и $n \geq n_0(\delta)$, где

$$[\delta, 2\pi - \delta]^L = \overbrace{[\delta, 2\pi - \delta] \times \cdots \times [\delta, 2\pi - \delta]}^L,$$

L — размерность вектора $\vec{\xi}$, а $n_0(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$.

Условия, при которых устойчивая разностная схема является локально равномерно устойчивой, даются Теоремой 5. Заметим, что здесь эта теорема даётся в более общей формулировке, чем аналогичная теорема из [24].

Теорема 5. Устойчивая разностная схема является локально равномерно устойчивой при $\vec{\kappa} \in D$, если для всех значений волнового вектора $\vec{\xi} \in [\delta, 2\pi - \delta]^L \equiv \Omega_\delta$, где $\delta > 0$ — сколь угодно малая величина, выполняются следующие условия.

1. В некоторой подобласти $\Omega_1(\vec{\kappa}) \subset \Omega_\delta$ собственные значения матрицы $G^*(\vec{\kappa}, \vec{\xi})G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{\vec{\xi}, i} |\gamma_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| \leq 1, \quad \vec{\kappa} \in D.$$

2. В дополнении множества Ω_1 ($\vec{\xi} \in \Omega_\delta \setminus \Omega_1$) справедливы следующие утверждения:

- матрица $G(\vec{\kappa}, \vec{\xi})$ диагонализуема;
- существует единственное максимальное собственное значение λ_1 матрицы G :

$$|\lambda_i(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| < |\lambda_1(\vec{\kappa}, \vec{\xi})|, \quad \vec{\kappa} \in D, \quad \vec{\xi} \in \Omega_\delta \setminus \Omega_1;$$

в) $|\lambda_1(\vec{\kappa}, \vec{\xi})| < 1$.

Теоремы 4 и 5 не только позволяют проверить равномерную и локально равномерную устойчивость существующих разностных схем, но и дают конструктивные критерии для построения разностных схем с нужными свойствами.

Пример 1. Рассмотрим задачу об одномерном течении баротропного газа в канале постоянного сечения. Постоянные значения плотности ρ и скорости u задавались на входе в канал, причем, они соответствовали числу Маха $M = 1$. В выходном сечении канала задавалось значение $M > 1$ при $t = 0$, и

при $t > 0$ значения плотности и скорости на правой границе определялись экстраполяцией из ближайшего внутреннего узла сетки.

Сначала мы провели расчеты по схеме Лакса-Вендрофа [5, 6] в терминах переменных u и ρ . Численные результаты представлены на рис. 2, (а), где R_n — максимальная невязка решения при $t = t_n$, $R_n = \max_j |\rho_j^{n+1} - \rho_j^n|/\tau$, и M — число Маха. Оказалось, что при $n \approx 1250$ R_n начинает расти, и при $n \approx 2500$ решение дестабилизируется, имеет место взрывной рост его величины.

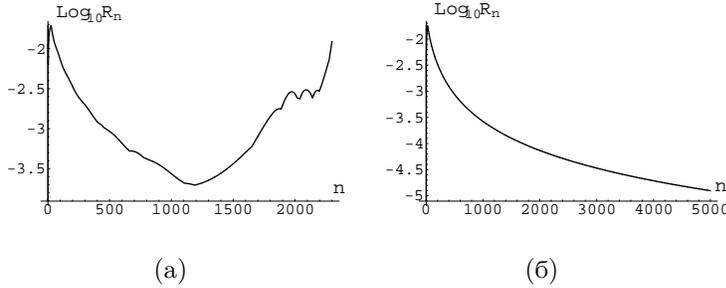


Рис. 2. Графики максимальной невязки $\log_{10}R_n$ как функции числа временных шагов n , полученные по схемам Лакса-Вендрофа при числе Куранта $\kappa = \max_x(u + c)\tau/h = 0.9$: (а) расчёт в переменных ρ, u ; (б) расчёт в новых зависимых переменных U_1, U_2 .

Для построения равномерно устойчивой разностной схемы симметризуем исходные уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + S \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{36}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} u & c \\ c & u \end{pmatrix}, \quad U_1 = \frac{\sqrt{2}}{\gamma - 1}c, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}u. \tag{37}$$

Здесь u — скорость жидкости и c — скорость звука; γ — отношение удельных теплоемкостей газа. Аппроксимируем систему (36), как и раньше, схемой Лакса-Вендрофа. Поскольку матрица S симметричная, то легко показать, что матрица перехода будет нормальной матрицей. А схемы с нормальной матрицей, как было отмечено выше, являются равномерно устойчивыми. Результаты расчётов по полученной схеме приведены на рис. 2, (б). Видно, что величина R_n (см. рис. 2, (б)) монотонно убывает даже при 5000 шагах по t .

Пример 2. Рассмотрим задачу о распространении круглой акустической волны, вызванной точечным возмущением плоского равномерного потока баротропной жидкости. Уравнения соответствующей математической модели изэнтропического течения имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial y} = 0 \tag{38}$$

где

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix}, \quad G(w) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Здесь u, v — составляющие вектора скорости жидкости вдоль осей x, y пространственных координат, ρ — плотность жидкости. Уравнение состояния имеет вид:

$$p = a\rho^\gamma. \tag{40}$$

Следуя [11], возьмем в (40) значения $a = \frac{1}{2}, \gamma = 2$. Система уравнений (38)–(40) решалась в квадрате $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, 0) &= \begin{cases} 1.1, & x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \\ 1.0, & (x, y) \in Q, (x, y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \\ u(x, y, 0) &= 0.1, \quad v(x, y, 0) = 0.01, \quad (x, y) \in Q. \end{aligned} \tag{41}$$

Аппроксимируем уравнения (38) трехстадийной разностной схемой типа Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= w^n, \quad w^{(1)} = w^{(0)} - \alpha_1 \tau P_h w^{(0)}, \quad w^{(2)} = w^{(0)} - \alpha_2 \tau P_h w^{(1)}, \\ w^{(3)} &= w^{(0)} - \tau P_h w^{(2)}, \quad w^{n+1} = w^{(3)}. \end{aligned} \tag{42}$$

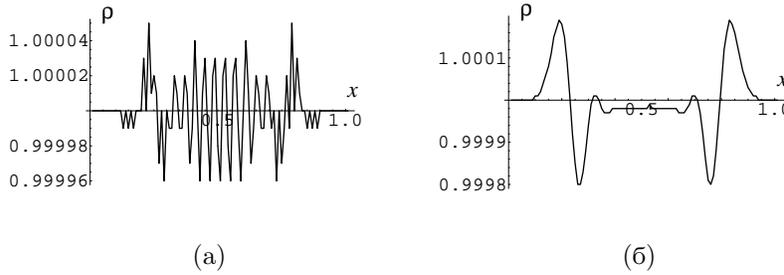


Рис. 3. Графики плотности в сечении $y = 0.5$ при $n = 25$, $t = 0.32$: (а) $\alpha = 0$; (б) $\alpha = 0.06$.

где

$$P_h w_{j,k} = \frac{F_{j+1,k} - F_{j-1,k}}{2h_1} + \frac{G_{j,k+1} - G_{j,k-1}}{2h_2}. \quad (43)$$

Здесь $F_{j\pm 1,k} = F(w_{j\pm 1,k})$, $G_{j,k\pm 1} = G(w_{j,k\pm 1})$, $F(w)$, $G(w)$ — векторы потоков из (39). Можно показать, что данная разностная схема не является равномерно устойчивой. Действительно, численные расчёты показывают наличие схемных пульсаций. Причём, как видно из рис. 3, (а), амплитуда пульсаций сравнима с амплитудой решения. Отметим, что схемные пульсации на рис. 3, (а) являются мелкомасштабными (соответствующие волновые числа k_β порядка $(\pi/2 \div \pi)/h_\beta$, $\beta = 1, 2$). Поэтому можно ожидать, что для их подавления будет достаточно локально равномерной устойчивости разностной схемы (см. Определение 2).

Для получения локально равномерно устойчивой разностной схемы можно использовать широко известный метод — метод сглаживания. Обозначим через \bar{w}^{n+1} вектор сглаженного разностного решения. Он вычислялся по формуле:

$$\bar{w}_{jk}^{n+1} = w_{jk}^{n+1} + \alpha(w_{j+1,k}^{n+1} + w_{j-1,k}^{n+1} + w_{j,k-1}^{n+1} + w_{j,k+1}^{n+1} - 4w_{jk}^{n+1}), \quad (44)$$

где α — параметр сглаживания. Из анализа устойчивости схемы (44) методом Фурье получается следующий интервал значений α : $0 \leq \alpha \leq 0.25$. После того, как находилось сглаженное решение \bar{w}_{jk}^{n+1} во всех узлах пространственной сетки, решение w_{jk}^{n+2} находилось по формуле $w_{jk}^{n+2} = S\bar{w}_{jk}^{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Анализ соответствующей матрицы перехода показал, что она удовлетворяет условиям Теоремы 5. Следовательно, разностная схема является локально равномерно устойчивой.

На рис. 3, (б) приведены результаты расчётов при значении параметра сглаживания $\alpha = 0.06$. Видно, что схемные пульсации исчезли и решение правильно описывает физический процесс.

Приведённые примеры показывают, что равномерно устойчивые разностные схемы могут быть получены либо путём симметризации исходных уравнений, либо с помощью операторов сглаживания. Однако возможны и другие подходы к построению равномерно устойчивых разностных схем.

Список литературы

- [1] Ворожцов Е.В., Скобелев Б.Ю. Об устойчивости разностных схем в различных банаховых пространствах. Препринт №10-94, Новосибирск: Ин-т теоретической и прикладной механики СО РАН, 1994.
- [2] Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнения гидродинамики. Матем. сборник, 1959. Т. 47, № 3. С. 271-306.
- [3] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1977.
- [4] Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Ленинград: Гидрометеиздат, 1986.
- [5] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, v 1972.
- [6] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-е изд. М.: Наука, 1978.
- [7] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
- [8] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
- [9] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

-
- [10] Яненко Н.Н., Демидов Г.В. О структуре абсолютно аппроксимирующих и абсолютно корректных разностных схем. В сб. Проблемы прикладной математики и механики. Новосибирск: Наука, 1971. С. 137–144.
- [11] CLERC S. Numerical simulation of the homogeneous equilibrium model for two-phase flows // J. Comp. Phys. 2000. Vol. 161, No. 1, P. 354–375.
- [12] FERZIGER J.H., PERIĆ M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg, N. Y. 1996.
- [13] GANZHA V.G., SCOBELV B.YU., VOROZHTSOV E.V. Stability analysis of difference schemes by the catastrophe theory methods and by means of computer algebra. In “Proc. of the 1991 Int. Sympos. on Symbolic and Algebraic Computation”, N. Y., ACM Press, 1991. P. 427–428.
- [14] GUSTAFSSON B., KREISS H.-O., OLIGER J. Time Dependent Problems and Difference methods. Wiley, N. Y. 1995.
- [15] KATO T. Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition // Numer. Math. Vol. 1960, Vol. 2, No. 1. P. 22–29.
- [16] KREISS H.-O. Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren // BIT, 1962. Vol. 2. P. 153–181.
- [17] KREISS H.-O. On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations // Commun. Pure Appl. Math. 1964. Vol. 17, No. 3. P. 335–353.
- [18] MACCORMACK R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper No. 354, 1969.
- [19] SCOBELV B.YU. On the question about the sufficiency of the von Neumann criterion for stability of difference schemes // J. Comp. Phys., 1998. Vol. 143, No. 1. P. 278–282.
- [20] SCOBELV B.YU., VOROZHTSOV E.V. Application of the catastrophe theory methods to the stability analysis of difference schemes. In “The Second Japan – Soviet Union Joint Symposium on Computational Fluid Dynamics, Tsukuba, August 27–31, 1990. Preprints”, Tsukuba, 1990. P. 53–60.
- [21] SCOBELV B.YU., VOROZHTSOV E.V. Stability analysis of difference schemes by catastrophe theory methods // J. Computat. and Appl. Math., 1992. Vol. 44, No. 1. P. 1–20.
- [22] SCOBELV B.YU., VOROZHTSOV E.V. The von Neumann criterion and the conditions for its sufficiency. In “Internat. Conf. on the Methods of Aerophysical Research”, Part II, Novosibirsk, 1998. P. 180–185.
- [23] SCOBELV B.YU., VOROZHTSOV E.V. The problem of scheme oscillations in computational fluid dynamics and the ways to eliminate them. In “Internat. Conf. on the Methods of Aerophysical Research”, Part II, Novosibirsk, 2000. P. 164–169.
- [24] SCOBELV B.YU., VOROZHTSOV E.V. Sufficient stability criteria and uniform stability of difference schemes // J. Comp. Phys., 2000. Vol. 165, No. 2. P. 717–751.
- [25] STRIKWERDA J.C. Finite Difference Schemes and partial Differential Equations. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1989.
- [26] VOROZHTSOV E.V., SCOBELV B.YU., GANZHA V.G. Symbolic-numerical method for the stability analysis of difference schemes on the basis of the catastrophe theory // J. Comp. Phys., 1995. Vol. 116, No. 1. P. 26–38.
- [27] VOROZHTSOV E.V., SCOBELV B.YU., GANZHA V.G. Symbolic-numerical method for the stability analysis of difference schemes on the basis of the catastrophe theory. Corrigendum // J. Comp. Phys., 1996. Vol. 123, No. 1. P. 231–232.
- [28] WENDROFF B. The stability of MacCormack’s method for the scalar advection equation // Applied Mathematics Letters, 1991. Vol. 4, No. 1. P. 89–91.
- [29] ZANG T.A., KRIST S.E., HUSSAINI M.Y. Resolution requirements for numerical simulations of transition // Lecture Notes in Engineering, 1988. № 3. P. 508–525.