

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ КОНТАКТНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

В.Н.БАРАШКОВ

НИИ прикладной математики и механики при Томском госуниверситете, Россия

e-mail: ger@mail.tomsknet.ru

Работа посвящена определению осесимметричного упругопластического напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего в системе двух цилиндрических толстостенных тел, посаженных одно на другое с натягом, когда контакт между ними осуществляется по части боковой поверхности.

Решение аналогичной задачи в упругой постановке для контактирующих по всей боковой поверхности цилиндров получено в виде конечных аналитических зависимостей в курсах "Сопrotivления материалов" и "Строительной механики"[1,2] при анализе составных цилиндров. При этом величина натяга Δ (разность диаметров посадочных поверхностей наружного и внутреннего цилиндров) в цилиндрической системе координат r, z удовлетворяет следующему тождеству:

$$\Delta = 2 (u_2 - u_1), \quad (1)$$

где u_1, u_2 – радиальные перемещения посадочных поверхностей внутреннего и наружного цилиндров соответственно. Следует заметить, что перемещения $u_1 < 0$, а $u_2 > 0$. На посадочной поверхности, определяемой перемещениями u_1, u_2 , в условиях равновесия имеет место равенство радиальных напряжений

$$\sigma_{r1} - \sigma_{r2} = 0, \quad (2)$$

где σ_{r1}, σ_{r2} – сжимающие напряжения на посадочных поверхностях внутреннего и наружного цилиндров соответственно.

Для реализации поставленной задачи необходимо привлечение численных методов, а имеющиеся аналитические формулы для контактного давления и перемещений посадочных поверхностей могут быть использованы для тестирования алгоритма численного решения.

1. Для решения задачи предлагается следующий алгоритм. Задавая на посадочной поверхности внутреннего цилиндрического тела радиальные перемещения u_{1i} ($i = 1, 2, \dots, I$) в I узлах конечно-разностной сетки, которая наносится на исследуемую область, определяем его НДС, в том числе радиальные напряжения на внешней поверхности σ_{r1i} . Далее, используя уравнение (1), находим величины перемещений u_{2i} на посадочной поверхности наружного цилиндра

$$u_{2i} = \Delta/2 + u_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

и, определяя НДС наружного тела, вычисляем радиальные напряжения σ_{r2i} на его внутренней посадочной поверхности. Затем проверяется условие (2). Если оно не выполняется с заранее заданной точностью ε , проводится корректировка заданных на посадочной поверхности перемещений, допустим – u_{1i} , по формуле

$$u_{1i}^{(k+1)} = u_{1i}^{(k)} (1 - c_i), \quad c_i = B \frac{(\sigma_{r1i} - \sigma_{r2i})}{(\sigma_{r1i} + \sigma_{r2i})}, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (3)$$

где k – индекс, определяющий номер итерации; c_i – корректирующие добавки, на величину которых изменяются радиальные перемещения u_{1i} ; B – математическая вязкость, вводимая для ускорения сходимости. Величина c_i положительна, если $|\sigma_{r1i}| > |\sigma_{r2i}|$, и – отрицательна в противоположном случае.

Корректирующая формула (3) работает следующим образом. Если в i -м узле посадочной поверхности вычисленные радиальные напряжения удовлетворяют неравенству $|\sigma_{r1i}^{(k)}| > |\sigma_{r2i}^{(k)}|$, использование формулы (3) приводит к уменьшению абсолютной величины перемещения $u_{1i}^{(k+1)}$ и, согласно выражению (1), увеличению перемещения $u_{2i}^{(k+1)}$. В результате расчета НДС двух тел с новыми значениями заданных на посадочной поверхности перемещений $u_{1i}^{(k+1)}, u_{2i}^{(k+1)}$ абсолютная величина напряжения $\sigma_{r1i}^{(k+1)}$ несколько уменьшится, напряжения $\sigma_{r2i}^{(k+1)}$ увеличатся, а разница

$$\Delta\sigma_{ri}^{(k+1)} = |\sigma_{r1i}^{(k+1)} - \sigma_{r2i}^{(k+1)}|$$

станет ближе к нулю. Аналогично происходит выравнивание напряжений в случае, когда $|\sigma_{r1i}^{(k)}| < |\sigma_{r2i}^{(k)}|$. Итак, с помощью формулы (3) корректируются, по сути дела, все $2I$ радиальных перемещений посадочных поверхностей обоих цилиндрических тел. Описанный вычислительный процесс повторяется до тех пор, пока условие (2) не будет выполнено с точностью ε . Этот алгоритм аналогичен подходу, предложенному в [3].

2. Известны две основные формы постановок задач теории упругости и пластичности: дифференциальная и интегральная (вариационная). В первом случае рассматривается равновесие элементарного (дифференциально малого) объема сплошной среды, во втором – для всего объема в целом записывается некоторый вариационный принцип. При гладких решениях обе эти постановки полностью эквивалентны [4]. Однако с точки зрения реализации вариационные методы имеют известные преимущества. "Использование вариационных постановок задач в численных методах позволяет проще получать решения, так как функционалы имеют более низкий порядок производных искомых функций, чем в соответствующих дифференциальных уравнениях... Очевидным преимуществом вариационных постановок является автоматическое выполнение естественных граничных условий" [5], ибо уравнения равновесия и статические граничные условия служат уравнениями Эйлера для функционала энергии системы «тело–внешние нагрузки».

В основу решения предложенного выше алгоритма положен вариационный принцип Лагранжа для функционала полной потенциальной энергии системы \mathcal{E}

$$\delta\mathcal{E} = 0,$$

который записывается в следующем виде

$$\mathcal{E} = U - A_1 - A_2,$$

где U – потенциальная энергия деформации тела; A_1, A_2 – работа объемных и поверхностных сил на вызванных ими перемещениях.

Записанный вариационный принцип Лагранжа имеет следствием выполнение уравнений равновесия и статических граничных условий. Что касается геометрических и физических соотношений, то они закладываются в формулировку функционала. Важно, что вариационный принцип Лагранжа является экстремальным, и поэтому при минимизации функционала энергии \mathcal{E} реализуется истинное равновесие тела. Если при минимизации используются конечно-разностные представления производных, то получаемый метод носит название вариационно-разностного метода (ВРМ) [6, 7].

ВРМ сводит проблему минимизации функционала энергии \mathcal{E} к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки. Для этого в выражении для потенциальной энергии U

$$U = \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{rz} \varepsilon_{rz}) dV,$$

где V – объем; $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_{rz}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$ – компоненты тензора деформации; Γ, Φ, Z – координаты; и где интегрирование проводится по всему объему тела, НДС которого определяется, заменим дифференциальные соотношения разностными, а интегрирование по объему – суммированием. Этот процесс приводит к выражению

$$\mathcal{E} \cong \bar{\mathcal{E}}(u_s, w_p), \quad s = s_1, s_1 + 1, \dots, S; \quad p = p_1, p_1 + 1, \dots, P,$$

где \mathcal{E} является функцией большого числа переменных, суть перемещений радиальных u_s и осевых w_p в узлах сеточной области. В общем случае, $S \neq P, s_1 \neq p_1$, так как постановка граничных условий может исключить часть перемещений (например, радиальные перемещения u на оси вращения) из числа неизвестных, но в этих же узлах другие компоненты перемещений (в данном случае w) являются неизвестными и могут варьироваться. Аналогично проводится дискретизация выражений для работ осесимметричных объемных сил A_1 и поверхностных нагрузок A_2

$$A_1 = \iiint_V (R_v u + Z_v w) dV, \quad A_2 = \iint_S (R_s u + Z_s w) dS,$$

где R_v, Z_v, R_s, Z_s – проекции вектора объемных и поверхностных сил на оси координат r, z соответственно. Для поверхностных сил интегрирование проводится по части поверхности (контур тела), где заданы внешние нагрузки. Работа массовых сил учитывается по всему объему. Выражения для деформаций берутся в виде соотношений Коши. Для аппроксимации производных от перемещений по координатам применялись так называемые ноховские естественные аппроксимации [8]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j \equiv -\frac{\sum_{i=1}^n (u_{i+1} + u_i) (z_{i+1} - z_i)}{F_j}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j \equiv \frac{\sum_{i=1}^n (u_{i+1} + u_i) (r_{i+1} - r_i)}{F_j},$$

$$F_j = \sum_{i=1}^n (z_{i+1} + z_i) (r_{i+1} - r_i),$$

(аналогичные соотношения имеют место для производных от функции w). Здесь n количество вершин в ячейке и в данном случае $n = 4$; u, w – радиальная и осевая проекции вектора перемещений узла конечно-разностной сетки на оси цилиндрической системы координат r, z ; F_j – удвоенная площадь j -й ячейки. В общем случае функционал энергии является неквадратичным. Поэтому общий алгоритм реализации упругопластической задачи деформирования тела вращения состоит из двух итерационных циклов. Внешний процесс заключается в сведении минимизации неквадратичного функционала к последовательной минимизации с помощью метода переменных параметров упругости А.А.Ильюшина функционалов (или функций энергии $\bar{\mathcal{E}}_k$), содержащих только квадратичные и линейные члены, с уточняемыми в каждом приближении параметрами нелинейности. Внутренний цикл состоит в определении совокупности значений компонент вектора перемещений u_s, w_p , доставляющих минимум функции $\bar{\mathcal{E}}_k$, и заканчивается по выполнению какого-либо критерия (например, выполнение заданной точности вычисления перемещений). При отыскании такой совокупности значений перемещений одним из наиболее эффективных путей является использование необходимого условия экстремума функции многих переменных $\bar{\mathcal{E}}_k(u_s, w_p)$:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_k}{\partial u_s} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_k}{\partial w_p} = 0 \quad (s = s_1, s_1 + 1, \dots, S; p = p_1, p_1 + 1, \dots, P),$$

что приводит (в силу квадратичности функции $\bar{\mathcal{E}}_k$) к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно компонент вектора перемещений u_s, w_p . Решение подобных систем уравнений проводится как итерационными, так и прямыми методами. Накопленный опыт решения статических (квазистатических) термоупругопластических задач механики деформируемого твердого тела позволяет сделать следующий вывод [7]: решение СЛАУ в двумерных задачах этого класса предпочтительнее проводить прямыми методами (например, методом исключения Гаусса), что дает огромный выигрыш во времени решения и позволяет на практике численно реализовать задачи рационального прочностного проектирования тел вращения [9]. Представленные ниже результаты расчета НДС контактирующих тел получены с использованием метода Гаусса.

Из описания приведенного алгоритма видно, что при его реализации работа внешних сил (в данном случае поверхностных нагрузок) явно нигде не учитывается. Но задаваемые поочередно на контактных поверхностях обоих цилиндров радиальные перемещения являются некоторым аналогом силовых нагрузок, ибо при исключении этих перемещений из СЛАУ, они в виде линейных комбинаций с элементами матрицы этой СЛАУ переходят в правые нагрузочные части уравнений.

Закljučая теоретическую часть работы, следует подчеркнуть достоинства вариационно-разностного метода, основанного на вариационном принципе Лагранжа:

1. Простота математической постановки задачи.
2. Простота записи функционала полной потенциальной энергии и его физическая ясность.
3. Автоматическое выполнение уравнений равновесия и статических граничных условий при минимизации функционала энергии.
4. Применимость к расчету тел сложной формы с механическими свойствами, терпящими разрыв.
5. Матрица системы линейных алгебраических уравнений относительно дискретных значений аргумента имеет ленточную структуру, симметрична и положительно определена, что очень важно при численной реализации.

3. Предложенный выше алгоритм расчета посадки двух цилиндрических тел был протестирован на решении упругой задачи о контакте двух цилиндров, для которой имеется аналитическое решение. Сравнение показало достаточно хорошее совпадение результатов численного счета с аналитическим решением. Так, разница по радиальным перемещениям на посадочной поверхности составляет около 5%, а величины контактного давления p_k различаются на 7%, что говорит о пригодности алгоритма к анализу НДС задач данного класса.

С помощью разработанного алгоритма была решена задача определения НДС при посадке двух цилиндрических тел, представленных на рис.1, когда их контакт осуществляется по части боковой поверхности, характеризуемой параметром l_1 . Параметры, определяющие геометрию цилиндров, имеют следующие

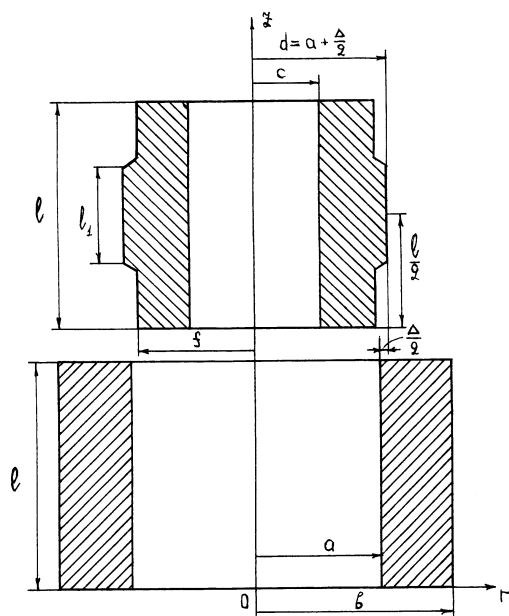


Рис. 1. Расчетная схема

значения: $l_1 = 10$ см; $a = 7,775$ см; $b = 10,5$ см; $c = 4,5$ см; $f = 7,5$ см; $d = 7,8$ см; $\Delta = 0,05$ см. Материал обоих цилиндров – высокопрочная сталь со следующими физико-механическими характеристиками: коэффициент Пуассона $\mu = 0,333$; модуль Юнга $E = 2,02 \cdot 10^5$ МПа; деформация начала текучести $\epsilon_s = 0,007$. Погрешность выполнения равенства (2) $\epsilon = 2,5\%$. Задача решалась при условии жесткой заделки обоих торцов цилиндров:

$$z = 0, l: u(r, 0) = w(r, 0) = u(r, l) = w(r, l) = 0.$$

Остальные поверхности цилиндров свободны от напряжений. Реализуемая система уравнений составляла для каждого цилиндра ≈ 500 уравнений.

Было исследовано влияние геометрического параметра l_1 , характеризующего площадь контактирующих поверхностей, на напряженно–деформированное состояние цилиндров. Очевидно, что при $l_1 = l$ имеет место случай полного контакта, достаточно хорошо описанный в литературе. На рис. 2а, 2б, 3 цифрами 1, 2, 3, 4, 5

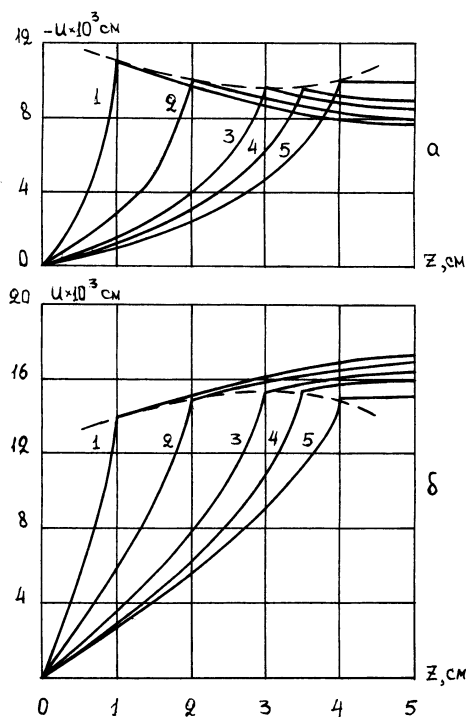


Рис. 2. Радиальные перемещения посадочных поверхностей внутреннего (а) и внешнего (б) цилиндров

обозначены кривые, полученные для значений параметра l_1 равными 8, 6, 4, 3 и 2 см соответственно. Ввиду симметрии НДС относительно координаты $z=l/2$, результаты представлены лишь для половины длины цилиндров.

Следует заметить, что величина натяга Δ в представленном примере была недостаточной для образования в цилиндрах пластических деформаций, ибо величина деформации начала текучести e_s данного сорта стали достаточно высока.

Распределение радиальных перемещений u внешнего контура внутреннего цилиндра и внутреннего

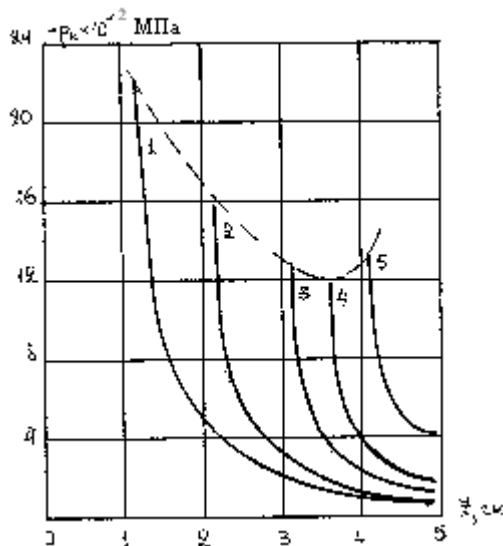


Рис. 3. Распределение контактного давления p_k на посадочной поверхности

контура наружного цилиндра при их посадке, а также возникающее при этом на контактной поверхности давление p_k представлены на рис. 2а, 2б, 3 соответственно. Здесь пунктирными линиями обозначены огибающие максимальных значений напряжений и точек перегиба на графиках для перемещений. Анализ огибающих позволяет дать рекомендацию о выборе величины параметра l_1 с целью получения наименее напряженного НДС на посадочной поверхности. Согласно представленным на рис. 3 результатам этому требованию удовлетворяет цилиндр с параметром $l_1 \approx 3$ см.

Можно отметить, что нет принципиальных трудностей для реализации задач данного класса в упругопластической постановке.

Список литературы.

- [1] Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин // Москва: Машиностроение. 1973. 456 с.
- [2] Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для ВТУЗов /Миролюбов И.Н., Енгальчев С.А., Сергиевский Н.Д. и др. 4-е изд., перераб. // Москва: Высш. школа. 1974. 392 с.
- [3] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задаче о сопряжении и контакте твердых тел // Прикл. мех. 1980, Т. XVI, № 1, С. 13–18.
- [4] Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел // Москва: Высшая школа. 1975. 526 с.
- [5] Рикардс Р.Б. МКЭ в теории оболочек и пластин // Рига: Зинатне. 1988.
- [6] Барашков В.Н. К расчету упругопластической осесимметричной деформации тел вращения // Теория упругости и пластичности. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та. 1978. С. 3–10.
- [7] Барашков В.Н., Люкшин Б.А. К реализации ВРМ для осесимметричных задач теории упругости и пластичности // Томск. гос. ун-т. Томск. 1983. 14 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.83, № 1335-В.
- [8] Нох В.Ф. СЭЛ–совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. Москва: Мир. 1967. С. 128–184.
- [9] Алгоритм прочностного проектирования осесимметричных упругопластических конструкций с использованием вариационно-разностного метода // Барашков В.Н., Люкшин Б.А. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т, 1987. С. 91–97.