

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА ВНУТРЕННИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С.Н. ХАРЛАМОВ, А.М. БУБЕНЧИКОВ  
Томский государственный университет, Россия  
e-mail: kharsn@ctc.tsu.ru

The original numerical algorithm for integration in internal regions of Navier-Stokes equations stated in natural variables is presented. Discretization is carried on the unseparated grids. Two stages are derived at construction of numerical solution and the marched scheme for calculations is realized at one of them. Algorithm allows to optimize the iterative process at the expense of idea realization of simultaneous finding of pressure gradient and velocity field [1]. Calculations of flows in channels are given.

### Схема численного интегрирования уравнений приближения “узкого канала”

При решении осесимметричных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в каналах постоянного и слабоменяющегося сечения в отсутствие влияния объемных сил используется следующая система уравнений импульсов и энергии:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (1)$$

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты обобщенного уравнения (1).

$\Phi$	$\Gamma$	$S$
$U$	$v$	$-(\partial P / \partial x) / \rho$
$0$	$v$	$-(\partial P / \partial r) / \rho - W^2 / r$
$W$	$v$	$-VW / r - vW / r^2$
$T$	$a$	$0$

Здесь  $v = \mu / \rho$  - коэффициент кинематической вязкости,  $a = \lambda(\rho c)$  - коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим ключевые моменты в способе получения численного решения в этом случае. Уравнение (1) перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (U + |U|) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - |U| \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (2)$$

Представление конвективного члена в форме (2) позволяет реализовать двухстадийную схему получения решения, причем на первой стадии корректным образом осуществить маршевую процедуру расчета, связанную с последовательным продвижением в положительном направлении оси  $Ox$ . Это возможно, поскольку коэффициент  $(U + |U|)$  при  $\partial \Phi / \partial x$  всегда неотрицателен даже при наличии в потоке интенсивных возвратных движений.

Рассмотрим аппроксимацию отдельных членов уравнения (2). Эволюционный член представим следующим образом:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]^{i,j} \approx \frac{\Phi^{i,j} - \Phi_{i,j}}{\tau}. \quad (3)$$

Здесь и ниже верхнее расположение двойных индексов будет отвечать верхнему слою по времени, нижнее - нижнему, индекс  $i$  соответствует выделенному сечению по длине канала,  $j$  отмечает положение при продвижении вдоль радиальной координаты,  $\tau$  - шаг по времени.

По возможности будем ориентироваться на разработку неявных схем, поэтому ниже все пространственные производные будут расписаны с использованием сеточных значений функций на верхнем слое по времени. В связи с этим, аппроксимация (3) представляет собой одностороннюю разность по времени и имеет первый порядок точности относительно  $\tau$ . Все производные по радиальной координате будут аппроксимированы со

вторым порядком точности относительно шага  $\Delta r$ , а производные по продольной – с первым относительно шага  $\Delta x$ . Сеточный шаблон, на котором расписаны пространственные производные, имеет следующий вид.

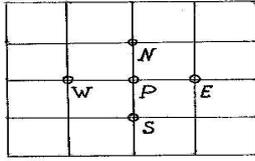


Рис. 1. Сеточный шаблон, используемый для записи разностного аналога уравнения (2).

Выпишем все необходимые аппроксимации:

$$\left[ (U + |U|) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{i,j} = (U + |U|)^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i-1,j}) / \Delta x + o(\Delta x), \quad (4)$$

$$-\left[ |U| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{i,j} = |U|^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i+1,j}) / \Delta x + o(\Delta x), \quad (5)$$

$$\left[ V \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]^{i,j} = V^{i,j} (\Phi^{i,j+1} - \Phi^{i,j-1}) / (2\Delta r) + o(\Delta r^2), \quad (6)$$

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r}) \right]^{i,j} = \frac{1}{r_j \Delta r^2} \{ (r\Gamma)_{j-0,5} \Phi^{i,j-1} - [(r\Gamma)_{j-0,5} + (r\Gamma)_{j+0,5}] \Phi^{i,j} + (r\Gamma)_{j+0,5} \Phi^{i,j+1} \} + o(\Delta r^2), \quad (7)$$

где  $(r\Gamma)_{j-0,5} = 0,5[(r\Gamma)_{j-1} + (r\Gamma)_j]$ ,  $(r\Gamma)_{j+0,5} = 0,5[(r\Gamma)_{j+1} + (r\Gamma)_j]$ .

Далее введем обозначения:

$$\Phi^{i-1,j} = \Phi_W, \quad \Phi^{i,j} = \Phi_P, \quad \Phi^{i+1,j} = \Phi_E, \quad \Phi^{i,j-1} = \Phi_S, \quad \Phi^{i,j+1} = \Phi_N, \quad \Phi_{i,j} = \Phi_P^0.$$

Тогда разностный аналог, отвечающий уравнению (2) будет выглядеть следующим образом:

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b, \quad (8)$$

$$\text{где } a_W = (U + |U|)_P / \Delta x, \quad a_E = |U_P| / \Delta x, \quad a_S = \frac{(r\Gamma)_{j-0,5}}{r_j \Delta r^2} + \frac{V_P}{2\Delta r}, \quad a_N = \frac{(r\Gamma)_{j+0,5}}{r_j \Delta r^2} - \frac{V_P}{2\Delta r},$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0, \quad a_P^0 = \frac{1}{\tau}, \quad b = \frac{\Phi_P^0}{\tau} + S_P. \quad (9)$$

Разностное уравнение (8) будем решать итерационным методом при обязательном прохождении двух последовательных этапов:

$$(I) \quad a_P \Phi_P^m = a_S \Phi_S^m + a_N \Phi_N^m + a_W \Phi_W^m + a_E \Phi_E^{m-1} + b, \quad (10)$$

$$(II) \quad a_P \Phi_P^{m+1} = a_S \Phi_S^m + a_N \Phi_N^m + a_W \Phi_W^m + a_E \Phi_E^{m+1} + b. \quad (11)$$

Здесь  $m$  – номер итерационного слоя. Рассмотрим подробнее первый этап вычислений. При однонаправленном во входном сечении движении жидкости значение субстанции  $\Phi$  в этом сечении следует считать заданным. Мы уже упоминали, что при решении уравнений переноса на этапе (I) возможна реализация маршевой процедуры вычислений. Выполняя первый шаг этой процедуры найдем распределения  $\Phi$  в первом сечении, далее во втором и т.д.

Таким образом, значения  $\Phi_W$ , входящие в (10), всегда будут известны, а величину  $\Phi_E$  на этом этапе берем с предыдущего итерационного слоя. Поэтому уравнения (10) можно переписать следующим образом:

$$a_P \Phi_P = a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b', \quad (12)$$

где  $b' = b + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E$ .

Система уравнений (12) может быть эффективно разрешена методом прогонки. При  $\Phi = W, T$  из (12) получаются разностные уравнения, не содержащие градиента давления и их решение не связано с какими-либо сложностями. Остановимся на особенностях разрешения системы  $U$ -уравнений, полученной на основе (12). В эту систему уже входят неизвестные величины  $(\partial P / \partial x)_P$ .

Для решения этой системы мы используем способ одновременного с полем скорости нахождения градиента давления. Следуя которому сеточные значения продольной компоненты вектора скорости записываются в виде, аналогичном [1], следующим образом:

$$U_j = Z_j \Pi_j + W'_j, \quad (15)$$

где  $\Pi_j = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_j$ . Для простоты записи в (13) индекс  $i$  опущен. Отличие (13) от зависимости,

предложенной в [1], состоит в том, что здесь сеточные значения  $\Pi$  зависят не только от  $i$ , но и от  $j$ , то есть  $\Pi$  является переменной по поперечному сечению величиной. Поэтому для определения продольного градиента давления недостаточно условия постоянства расхода и требуется некоторое уравнение, позволяющее его найти. В качестве такового используем уравнение количества движения в проекции на радиальное направление, разрешенное относительно поперечного градиента давления:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho W^2}{r} = \theta(t, x, r). \quad (14)$$

Соотношение (14) выражает баланс поверхностных и массовых сил (в данном случае центробежных). Дифференцируя его по  $x$  и строя подходящий разностный аналог, будем иметь:

$$\Pi_{j+1} = \Pi_j + \Omega_j, \quad (15)$$

где  $\Omega_j = \left[ \Delta r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{j+0,5}$  и  $\Delta r_{j+1/2} = r_{j+1} - r_j$ . Такое представление обеспечивает аппроксимацию с

точностью до членов второго порядка малости относительно шага по радиальной координате.

При  $\Phi = U$  из (12) имеем

$$a_P U_P = a_S U_S + a_N U_N + b'' - \frac{1}{\rho} P_P, \quad (16)$$

где  $b'' = b' - S_P$

Подставляя в (16) зависимость (13), получим

$$a_P Z_P = a_S Z_S + a_N Z_N - \frac{1}{\rho}; \quad (17)$$

$$a_P W'_P = a_S W'_S + a_N W'_N + b'' + a_P Z_S \Omega_S. \quad (18)$$

Используя связь (13) и формулу трапеций при вычислении интегрального потока массы, можно получить соотношение:

$$\sum_{j=0}^N m_j W'_j + \sum_{j=0}^N m_j Z_j \Pi_j = Q. \quad (19)$$

Здесь  $m_j = 2\pi r_j \Delta r_j$ , узел  $N$  относится к оси течения,  $Q$  – расход жидкости через поперечное сечение канала. Из (15) следует равенство

$$\Pi_j = \Pi_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \Omega_k. \quad (20)$$

Тогда с использованием (19), (20) можем найти

$$\Pi_0 = \frac{(Q - J_w - H)}{J_z}, \quad (21)$$

$$\text{где } J_w = \sum_{j=0}^N m_j W'_j; J_z = \sum_{j=0}^N m_j Z_j; H = \sum_{j=0}^N m_j W'_j \sum_{k=0}^{j-1} \Omega_k. \quad (22)$$

Зная величину продольного градиента давления на стенке  $\Pi_0$  и используя рекуррентное соотношение (15), можно рассчитать значения  $\Pi_j$  во всех точках поперечного сечения канала, которые необходимы для

определения сеточных значений продольной компоненты скорости по (13). Величина поперечной компоненты скорости находится из уравнения неразрывности.

Мы уже ввели переменный шаг по поперечной координате при изложении способа одновременного с полем скорости нахождения градиента давления. Не составит большого труда построить разности (6), (7) применительно к этому случаю. Поэтому, здесь уместно сделать замечания, относящиеся к построению неравномерных сеток, которые будут полезны при рассмотрении задач о турбулентном закрученном течении.

*Преобразование координат, обеспечивающее сгущение сетки.*

При построении сгущающейся сетки у стенки и у оси канала используются преобразования вида:

$$\eta = \ln(R - r + \Delta), \quad r_* < r < R; \quad \eta' = -\ln(r + \Delta_1), \quad 0 < r < r_*,$$

где  $R$  – радиус канала,  $r_*$  – точка, для которой принимается, что  $\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \eta'}{\partial r}$ , т.е.

$1/(R - r_* + \Delta) = 1/(r_* + \Delta_1) \Rightarrow r_* = (R + \Delta - \Delta_1)/2$  (\*). Тогда  $\Delta \eta = [\ln \Delta - \ln(R - r_* + \Delta)]/N_1$ ;  $\Delta \eta' = [\ln \Delta_1 - \ln(r_* + \Delta_1)]/N_2$ . Здесь  $N_1, N_2$  – количество точек разностной сетки, определяющее общее число узлов по поперечной координате ( $NG$ ):  $NG = N_1 + N_2$ . Необходимо также потребовать, чтобы  $\Delta \eta = \Delta \eta'$ , т.е.  $[\ln \Delta - \ln(R - r_* + \Delta)]/N_1 = [\ln \Delta_1 - \ln(r_* + \Delta_1)]/N_2$ . Из последнего соотношения находим  $\Delta_1 = er_*/(1 - e)$  (\*\*), где  $e = \exp\{(N_2/N_1) \cdot [\ln \Delta - \ln(R - r_* + \Delta)]\}$ . Заметим, что  $r_*$  также зависит от  $\Delta_1$ , однако эта зависимость является слабой. Полагая в (\*\*)  $r_* = R/2$ , сразу находим более или менее подходящее приближение для  $\Delta_1$ . Далее оно может быть уточнено простым пересчетом по формулам (\*) и (\*\*). Таким образом, задавая  $\Delta, N_1, N_2$ , можно найти  $\Delta_1$  и, соответственно, все элементы преобразования координат.

*Замечания о сходимости итерационного процесса*

Исходные уравнения нелинейны. Их линеаризация осуществляется сносом коэффициентов, содержащих значения искомой функции на предыдущий итерационный слой. Далее осуществляются как локальные, так и глобальные итерации. Сходимость итерационного процесса обеспечивается тем, что при реализации прогонок вдоль координатных линий мы стремимся обеспечить диагональное преобладание (хорошую обусловленность метода прогонки). В результате всегда выполняется критерий Скарбороу [2]:

$$\sum |a_{nb}|/|a_p| = \begin{cases} \leq 1 & \text{во всех точках} \\ < 1 & \text{хотя бы в одной точке,} \end{cases} \quad (23)$$

где  $\sum |a_{nb}| = |a_W| + |a_E| + |a_S| + |a_N| + |a_p^0|$  [см. (9)].

Из (9) следует, что для того, чтобы выполнялось правило положительной определенности коэффициентов необходимо, чтобы сеточное число Рейнольдса, определенное по поперечной компоненте скорости и шагу по радиальной координате, было меньше 2. Это ограничение не является слишком жестким, т.к. в рамках рассматриваемого класса задач величина  $V$  значительно меньше  $U$ , а большие градиенты по  $r$  требуют использования мелкого шага по поперечной координате.

#### Разностная аппроксимация и схема интегрирования полных уравнений Навье-Стокса

Далее рассмотрим процедуру расчета закрученного течения жидкости в канале с резким расширением площади поперечного сечения. В этом случае следует опираться на систему полных уравнений Навье-Стокса. Обобщенное уравнение, отвечающее этой системе, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (24)$$

Значения коэффициентов  $\Gamma$  и  $S$  даются приводимой ниже таблицей.

Таблица 2.

Коэффициенты обобщенного уравнения (24).

$\Phi$	$\Gamma$	$S$
--------	----------	-----

$U$	$v$	$-(\partial P/\partial x)/\rho$
$V$	$v$	$-(\partial P/\partial r)/\rho + W^2/r$ $-vV/r^2$
$W$	$v$	$-VW/r - vW/r^2$
$T$	$a$	$0$

Описанный выше алгоритм решения уравнений движения, записанных в приближении “узкого канала”, может быть обобщен на случай полных уравнений Навье–Стокса. Обобщенное уравнение (24) представим аналогично (2) следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (U + |U|) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - |U| \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (V + |V|) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - |V| \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (25)$$

Для того, чтобы записать разностный аналог этого уравнения используем аппроксимации (3) – (7), а также разностные представления вновь введенных членов:

$$\left[ (V + |V|) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]^{i,j} = (V + |V|)^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i,j-1}) / \Delta r + o(\Delta r), \quad (26)$$

$$-\left[ |V| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{i,j} = |V|^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i,j+1}) / \Delta r + o(\Delta r), \quad (27)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right]^{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} [\Gamma_{j-0,5} \Phi^{i-1,j} - (\Gamma_{j-0,5} + \Gamma_{j+0,5}) \Phi^{i,j} + \Gamma_{j+0,5} \Phi^{i+1,j}] + o(\Delta x^2). \quad (28)$$

Тогда разностный аналог, отвечающий уравнению (25), будет иметь вид:

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b, \quad (29)$$

где  $a_W = (U + |U|)_P / \Delta x + \Gamma_{i-0,5} / \Delta x^2$ ,  $a_E = |U_P| / \Delta x + \Gamma_{i+0,5} / \Delta x^2$ ,

$$a_S = \frac{(r\Gamma)_{j-0,5}}{r_j \Delta r^2} + (V + |V|)_P / \Delta r, \quad a_N = \frac{(r\Gamma)_{j+0,5}}{r_j \Delta r^2} + |V|_P / \Delta r,$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0, \quad a_P^0 = \frac{1}{\tau}, \quad b = \frac{\Phi_P^0}{\tau} + S_P. \quad (30)$$

Видим, что все коэффициенты безусловно положительны. Далее проходим все этапы присущие схеме решения задач приближения “узкого канала”, а именно получаем уравнения (10), (11), расщепляем продольную компоненту скорости по (13) и т.д. Однако в форме (14) вместо  $\theta(t, x, r)$  используем  $\theta^1(t, x, r)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \theta^1(t, x, r). \quad (31)$$

Здесь уже  $\theta^1(t, x, r)$  содержит все члены, дополняющие (14) до полноценного уравнения импульсов в проекции на радиальную координату. Последовательность проведения расчетов состоит в следующем. Сначала находятся распределения (в выделенном сечении) окружной компоненты скорости  $\{W'_j\}$ , поскольку соответствующее ей уравнение не содержит градиента давления. Потом находятся [с использованием (14)] распределения  $\{Z_j\}$ , далее по (18)  $\{W'_j\}$ , после чего по (13)  $\{U_j\}$ , затем по (21)  $\Pi_0$  и  $\{I_j\}$  по (20) и, наконец,  $\{V_j\}$  из разностного аналога уравнения неразрывности. Далее переходим к другому сечению реализуя по существу маршевую процедуру вычислений (первый этап расчетов). В довершении всего с использованием (11) и прогонок в аксиальном направлении уточняем полученные распределения (второй этап). В качестве граничных условий в выходном сечении канала, необходимых для реализации второго этапа (продольных прогонок), берутся данные вычислений, полученных в конце первого этапа. Таким образом, по нашему алгоритму, как и в схеме расчетов, рекомендованной С. Патанкармом [2], физических граничных условий на выходе не требуется (требуется лишь, чтобы движение в выходном сечении было однонаправленным). Как видим в этом случае критерий Скарбороу (23) безусловно выполняется, что обеспечивает сходимость итерационных циклов.

Получающаяся в результате расчетов схемная вязкость может быть минимизирована с использованием способа Рейсби [3].

Описанная численная процедура имеет преимущество в быстродействии в сравнении с алгоритмом, предложенным для решения аналогичных задач С. Патанкармом [2]. Это обусловлено тем, что в нашем случае нет необходимости в использовании итерационного процесса по согласованию полей скорости и давления. Последнее стало возможным благодаря отказу от требования консервативности на уровне элементарной расчетной ячейки. Однако на участке стабилизированного течения схема становится консервативной. Кроме этого, всегда имеется баланс массы по сечению канала или камеры ибо это условие существенным образом используется при определении градиента давления. Во многих случаях этого оказывается более чем достаточно и решение получается близким к аналитическим распределениям локальных гидродинамических величин либо к экспериментальным данным.

### Некоторые результаты расчетов

Рассмотрим закрученное ламинарное течение несжимаемой жидкости в круглой трубе постоянного сечения. Жидкость на входе в трубу имеет неизменную по сечению осевую скорость, нулевую радиальную и окружную – изменяющуюся по линейному закону (от нуля на оси до максимума у стенки). Как принято говорить, в таких случаях поток на входе в трубу закручен по закону твердого тела. Из-за наличия разности температур входящего в канал потока и стенки трубы течение не является изотермическим. При симметричных граничных условиях для скорости и температуры получающиеся стационарные распределения должны быть осесимметричными.

Представленные рисунками 2-4 графические иллюстрации получены при следующих значениях исходных параметров:  $T_w = 295 K; T_e = 310 K; Pr=6,1; P_0=1 \text{ атм}; Ro=0 \div 10; l_k=0,084 \text{ м}; Re=160 \div 1600; D=0,007 \text{ м}$ .

На рис.2 приведены распределения относительной скорости на оси трубы ( $u_s / U_e$ ) по длине канала в зависимости от безразмерного расстояния  $X=x/(R \cdot Re)$  ( $Re=U_e R / \nu$ ), отвечающие различным значениям параметра закрутки  $Ro=\Omega R / U_0$  (числа Россби). Здесь  $u_s, U_e$  – скорости на оси трубы и входе в канал соответственно;  $R$  – радиус трубы;  $\nu$  – вязкость жидкости;  $\Omega$  – окружная скорость во входном сечении;  $x, r$  – цилиндрические координаты. Значки ■ – экспериментальные данные В. Пфеннингера [4], представляющие осевую скорость на начальном участке трубы в прямоочном движении. Пунктир: линии 2, 3 – численное решение [5]; 4 – приближенное аналитическое решение М.А. Гольдштика [6] ( $Ro=10, Re_D = \frac{2RU_e}{\nu} = 60$ ).

Сплошная линия – расчет, полученный на основе предложенной численной модели при следующих значениях определяющих параметров: 1 –  $Ro=0, 2-4, 3-5, Re_D=160$ ; 4 –  $Ro=10, Re_D = 60$ .

Из рисунка видно, что при  $Ro>4$  появляется зона возвратных движений. С увеличением  $Ro$  зона возвратов существенно увеличивается, а точка минимального значения скорости смещается вниз по течению. На рис.3 представлена кривая обратных токов, полученная расчетным образом (сплошная линия) и по приближенному аналитическому решению М.А.Гольдштика [6] (пунктир). Здесь  $X=x/(R \cdot Re)$ . График позволяет оценить размер зоны, где скорость на оси симметрии имеет противоположное основному потоку направление.

На рис.4 показаны зависимости коэффициента трения  $c'_f = c_f Re_d$  от приведенной длины  $X_3=x/(h \cdot Re_d)$ .

Здесь  $c_f = 2\tau_w / (\rho_e U_{cp}^2)$ ,  $U_{cp} = U_e / (D/d)^2$ ,  $\tau_w$  – напряжение трения на стенке,  $\rho_e$  – характерная плотность среды,  $d$  – диаметр входного сечения,  $D=2R$  – диаметр камеры,  $h=(D-d)/2$  – высота уступа,  $U_e$  – средняя скорость во входном сечении;  $Re_d = U_e d / \nu$  – число Рейнольдса,  $H=h/d$  – коэффициент расширения потока,  $S = 2(W_e / U_e)[1/3 - 1/(m+3)]$  – параметр закрутки ( $m = 41$ ). Сплошные линии (1–5) – расчет по предлагаемой модели; значки 1 – ○, 2 – ■, 3 – ▲, 4 – ◆, 5 – ● – результаты измерений в круглой трубе. Кривые 1,2 отвечают соответственно значениям:  $Re_d=10$  и 250; ( $H=0,5$ ). Эти расчеты выполнены в условиях экспериментов Дж.П. Льюиса, Р.Х. Плетчера [7]. Кривые 3–5 соответствуют значениям  $S=0,94$ ;  $S=0,41$ ;  $S=0$  ( $Re_d=100, H=4,5$ ) соответственно.

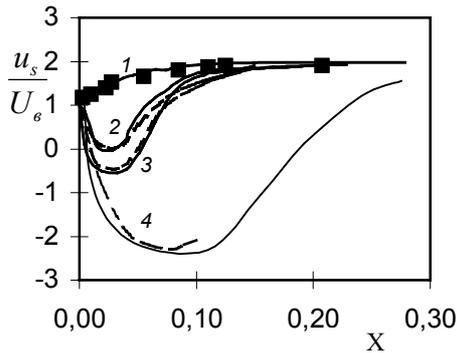


Рис. 2

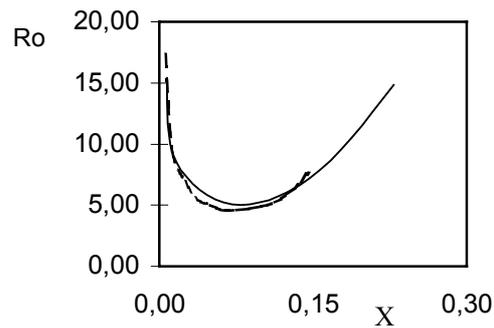


Рис. 3

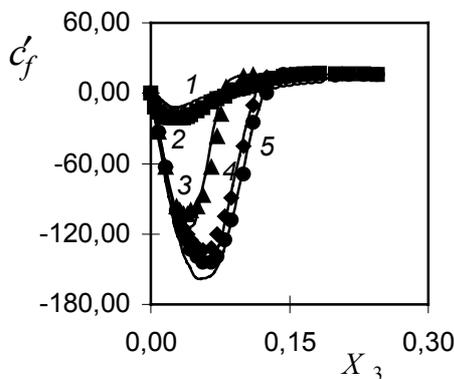


Рис. 4

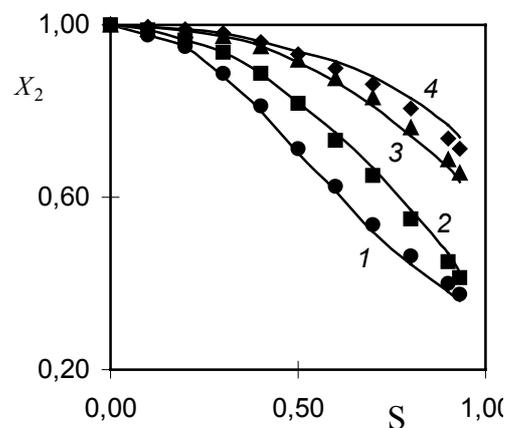


Рис.5

Рис. 2. Распределение относительной скорости на оси трубы  $u_s/U_0$  в зависимости от приведенной длины  $X=x/(R \cdot \text{Re})$  при различных значениях параметра Россби  $Ro$ . Здесь линии – расчет, значки – эксперимент В. Пфеннингера [4]. Сплошные линии – наш расчет для условий: 1 –  $Ro=0$ , 2–4, 3–5,  $Re_D=160$ ; 4 –  $Ro=10$ ,  $Re_D=60$ . Пунктир: линии 2, 3 – численное решение А.И. Ершова [5], 4– решение М.А. Гольдштика [6].

Рис. 3. Кривая обратных токов в зависимости от изменения чисел Россби ( $Ro$ ) и приведенной длины  $X$ . Здесь сплошная линия – расчет по настоящей модели, пунктир – данные расчета М.А. Гольдштика [6].

Рис. 4. Изменение коэффициента трения  $c'_f = c_f \text{Re}_d$  от приведенной длины  $X_3 = x/(h \cdot \text{Re}_d)$ . Сплошные линии – расчет по данной модели, значки – эксперимент Дж.П. Льюиса [7]. Здесь 1 –  $Re_d=10$ ,  $H=0,5$  ( $\circ$ ); 2 –  $Re_d=250$ ,  $H=0,5$  ( $\blacksquare$ ) (прямоточное течение); 3 –  $S=0,94$  ( $\blacktriangle$ ); 4 –  $0,41$  ( $\blacklozenge$ ); 5 –  $0$  ( $\bullet$ ) (для  $Re_d=100$ ,  $H=0,5$ ).

Рис. 5. Распределение относительного значения длины присоединения  $X_2 = x_{\text{пр}}/x_{\text{пр}}^0$  (где  $x_{\text{пр}}^0$  – координата присоединения потока при прямоточном течении в канале со скачком сечения) в зависимости от параметра закрутки  $S = 2(W_\theta/U_\theta)[1/3 - 1/(m+3)]$  [345] при различных значениях коэффициента расширения потока  $H=h/d$ . Здесь линии – расчет, значки – опыт В.В. Бауманна [345] ( $Re=250$ ), причем 1 –  $H=0,2$  ( $\bullet$ ), 2 –  $0,5$  ( $\blacksquare$ ), 3 –  $2$  ( $\blacktriangle$ ), 4 –  $4,5$  ( $\blacklozenge$ ).

Распределения относительного значения длины присоединения  $X_2 = x_{\text{пр}}/x_{\text{пр}}^0$  в зависимости от параметра закрутки  $S$  при различных значениях коэффициента расширения потока  $H$  приведена на рис.5. Здесь линии – расчет по настоящей модели, все значки – данные работы [8]. Кривые 1 – 4 отвечают: 1 –  $H=0,2$ ; 2 –  $0,5$ ; 3 –  $2$ ; 4 –  $4,5$ . Видно, что продольный размер циркуляционной зоны заметно уменьшается с ростом коэффициента закрутки потока при всех рассмотренных значениях  $H$ .

**Список литературы**

- [1] Симуни Л.М. Численное решение задачи при неизотермическом движении вязкой жидкости в плоской трубе// Инженерно–физический журнал. 1966. Т. 10. №1. С. 86-91.
- [2] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152с.
- [3] Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплоотдача и сопротивление пакетов труб., Л.: Энергоатомиздат, 1987. 223 с.
- [4] Pfenninger W. Further laminar flow experiments in a 40-foot long two- inch diameter tube/ Northrop Aircraft, Hawthorne, CA, Rept. AM-133, 1951.
- [5] Шнайдерман М.Ф., Ершов А.И. О влиянии закрутки потока на распределение скоростей и температур в круглой трубе // Инженерно–физический журнал. 1975. Т. 28. № 4. С. 630 - 635.
- [6] Гольдштик М.А. Приближенное решение задачи о ламинарном закрученном потоке в круглой трубе// Инженерно - физический журнал. 1959. Т. 2. №3. С. 100-105.
- [7] Lewis J.P., Pletcher R.H. Limitation of the boundary-layer equations for predicting laminar symmetric sudden expansion flows // AIAA Paper. 1986. №1131. P. 1-8.
- [8] Baumann W.W., Thiele F. Calculation of separated swirling flows in sudden pipe expansion using boundary-layer equations // AIAA Journal. 1987. Vol.24. P. 704-715.